

1. *Lencova B., Zlamal J.* A New Problem for the Design of Electron Microscopes// Abstracts of Seventh International Conference on Charged Particle Optics, Cambridge, England, 24—28th July 2006. P. 71, 72.

2. *Монастырский М. А.* Метод τ -вариаций и некоторые вычислительные проблемы электронной оптики динамических эмиссионных систем// Прикладная физика. 1996. № 3. С. 7—27

3. *Глазер В.* Основы электронной оптики. — М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1957.

4. *Муравьев А. Г.* Математическое моделирование электронных пушек с катодом произвольной формы: Дис..... на соискание степени канд. физ.-мат. наук/ МФТИ, 2001.

5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982.

6. Физические величины: Справочник/ Под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. — М.: Энергоатомиздат, 1991.

7. *Вербжицкий В. М.* Численные методы. Математический анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Высш. шк., 2001..

Статья поступила в редакцию 19 октября 2006 г.

Numerical simulation of magnetic electron lenses

D. E. Greenfield

ORION Research-and-Production Association, Moscow, Russia

A. P. Shulenok

Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Dolgoprudny, Russia

The paper presents mathematical algorithms and software for numerical simulation of magnetic electron lenses with arbitrary axially symmetrical geometry of coils and magnetic cores, which take into account the magnetic saturation effect. Considered are the methods of estimating chromatic and geometrical aberrations and statistical properties of the electron trajectories distribution. The software testing results and an example of lens simulation are given.

УДК 621.3.049.77.001.2:681.3

Два способа вычисления функции Грина для уравнения Лапласа

И. А. Конников

С.-Петербургский университет культуры и искусств, Россия

Предложены модификация традиционного способа вычисления функции Грина для слоистой среды, существенно повышающая его точность, а также способ вычисления функции Грина, позволяющий контролировать точность расчета потенциала и приводящий к простым аналитическим выражениям. Способ основан на использовании свойств функций Бесселя и Струве. Приведен пример расчета. Результаты распространяются на широкий класс задач, решение которых основано на вычислении функции Грина для уравнения Лапласа в слоистой среде.

Исходные положения

Решение многих задач прикладной физики основано на использовании функции Грина для уравнения Лапласа. Так, например, уравнению Лапласа удовлетворяют температура при стационарных процессах, потенциал электростатического поля в точках пространства, свободных от других источников поля, и т. д. При решении таких задач в качестве физической модели реального пространства, где рассчитывается поле, нередко принимают слоистую среду, состоящую из произволь-

ного числа плоскопараллельных слоев. Каждый слой характеризуется своей толщиной и физическими характеристиками. Физические процессы считаются квазистационарными. Методика определения функции Грина для уравнения Лапласа в такой модели рассмотрена в ряде работ, в том числе в [1, 2]. Если слои неограничены в азимутальном направлении и расположены перпендикулярно оси аппликат, то решение уравнения Лапласа для потенциала единичного точечного источника поля в i -м слое модели описывается формулой [1—3]

$$G = K \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \Phi_i(\lambda, z - z_0) d\lambda, \quad (1)$$

где K — коэффициент, зависящий от физической природы поля (например, $K = 1/(4\pi\epsilon_0)$, при расчете электростатического потенциала и $K = \mu_0/(4\pi)$ — при решении магнитостатической задачи;

ϵ_0, μ_0 — абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости свободного пространства, соответственно;

J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка;

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2};$$

x_0, y_0, z_0 — абсцисса, ордината и аппликата точки, где вычисляется поле;

x, y, z — абсцисса, ордината и аппликата источника поля, соответственно;

функция $\Phi_i(\lambda, z - z_0)$ определяется из граничных условий.

Метод получения аналитического выражения $\Phi_i(\lambda, z - z_0)$ для полей различной физической природы в строгом классическом варианте изложен в работах [1, 3], соответствующая инженерная методика для потенциала электрического поля представлена в [2, 4].

Для каждой конкретной природы поля существует своя физическая модель среды, и для любой (в пределах указанных выше ограничений) N -слойной физической модели существует N функций $\Phi_i(\lambda, z - z_0)$, ($i = \overline{1, N}$). Для любого слоя модели в плоскости $z = z_0$ имеется своя функция $\Phi_i(\lambda, z - z_0) = \Phi_i(\lambda)$, причем всегда $0 \leq \Phi_i(\lambda) < \infty$. Эта монотонно изменяющаяся функция не имеет особенностей и представляет собой отношение линейных комбинаций экспонент [2—4], поэтому несобственный интеграл (1) выражается через первообразные только в простейших случаях.

Традиционный способ вычисления функции Грина в известных вариантах обладает определенными недостатками, рассмотренными ниже. В настоящей работе предлагаются модификация традиционного способа, позволяющая существенно повысить ее точность, а также способ вычисления функции Грина, который практически не ограничивает точность ее расчета и нередко может использоваться в качестве альтернативного традиционному.

Модификация традиционного способа вычисления функции Грина

Как отмечено выше, интеграл (1) может быть вычислен через первообразные лишь для тривиальных случаев, не представляющих практическо-

го интереса. Известные способы его приближенного вычисления основаны на использовании тождества Вебера-Липшица

$$\int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \exp(-\lambda \tau) d\lambda = \frac{1}{\sqrt{r^2 + \tau^2}} \quad (\tau \geq 0). \quad (2)$$

Точность вычисления функции Грина при этом либо оценивается эвристически, либо не рассматривается вообще: оценивается лишь точность представления функции $\Phi(\lambda)$. Исключением является работа [3], где при решении основной задачи электроразведки в частном случае двухслойной среды функцию $\Phi(\lambda)$ удается представить рядом Маклорена с последующим его интегрированием; в результате функция Грина получается представленной медленно сходящимся рядом. Способы улучшения сходимости таких рядов обсуждаются в работе [5]. При некоторых сочетаниях значения проводимостей слоев ряд является знакопеременным, и тогда нетрудно оценить погрешность, которая получается при замене ряда его отрезком. В [2] предлагается аппроксимировать функцию $\Phi(\lambda)$ полиномами Лежандра по степеням $u = \exp(-\lambda \tau)$, где τ — нормирующий множитель, причем трудоемкость вычисления коэффициентов аппроксимации сравнима с трудоемкостью вычисления самого интеграла (1).

В работе [4] предлагается аппроксимация интерполяционным многочленом — линейной комбинацией функций Чебышева первого рода — с оптимальным выбором узлов на интервале $[0, 1]$ также по степеням $u = \exp(-\lambda \tau)$.

Учитывая простоту процедуры получения коэффициентов интерполяции [4, 6] и известные возможности аппроксимации в базисе функций Чебышева первого рода, предлагаемый в [4] вариант на первый взгляд представляется предпочтительным. Однако следует учесть, что точность аппроксимации степенным полиномом по степеням переменной $u \in [0, 1]$ на границах указанного интервала имеет особое значение. Прежде всего в зависимости от вида физической модели (соотношения физических характеристик и толщин слоев, наличия экранов* и т. д.) функция $\Phi(\lambda)$ на одной из границ интервала может сколь угодно близко приближаться к нулю или даже обращаться в нуль, поэтому даже незначительная абсолютная погрешность аппроксимации функции $\Phi(\lambda)$ вблизи любой из границ интервала может проявляться как большая относительная погрешность вычисления подынтегральной функции интеграла (1). Влияние этой ошибки на точность вычисления функции

* Под экраном подразумевается плоскость, где потенциал поля равен нулю.

Грина может оказаться определяющим, необходимо избежать появления участка с большой погрешностью вычисления подынтегральной функции интеграла (1). Кроме того, погрешность аппроксимации $\Phi(\lambda)$ при $\lambda = \infty$ и $u = 0$ проявляется как неточность определения свободного члена, который является основной составляющей аппроксимирующего полинома, так как абсолютная величина суммы остальных членов не превосходит абсолютной величины свободного члена, и последний должен рассчитываться с максимальной доступной точностью.

Слагаемые полинома со старшими степенями переменной u являются лишь поправкой, учитывающей неоднородность среды, в том числе наличие экранов. В промежутке между крайними узлами интерполяции погрешность приближения функции $\Phi(\lambda)$ знакопеременная, ошибки интегрирования на участках с погрешностью разных знаков аддитивны и отчасти взаимно компенсируются. Но, как известно, аппроксимация в базисе функций Чебышева первого рода позволяет минимизировать максимальную абсолютную ошибку, и абсолютная погрешность аппроксимации (если она отлична от нуля) именно на границах интервала аппроксимации максимальна. Поэтому целесообразно формально расширить указанный интервал и интерполировать на интервале $[u_1, u_1]$ (при этом $u_1 < 0, u_1 > 1$) так, чтобы при $u = 0$ и $u = 1$ погрешность аппроксимации отсутствовала; для $u < 0$ и $u > 1$ интерполирующий многочлен $\Lambda(u)$ не используется. Принимая формулы из [6] в качестве исходных, получим:

$$\Phi(\lambda) \approx \Lambda(u) = A_0/2 + \sum_{\nu=1}^Y A_\nu T_\nu[(2u - u_1 - u_1)/(u_1 - u_1)], \quad (3)$$

где $A_\nu = \frac{2}{Y+1} \sum_{j=0}^Y \Phi(\lambda_j) \cos \frac{(2j+1)\nu\pi}{2Y+2}$ ($\nu = \overline{0, Y}$);

T_ν — функция Чебышева первого рода степени ν ;

$$\lambda_j = -\frac{\ln u_j}{\tau};$$

$$u_j = \frac{u_1 + u_1}{2} + \frac{u_1 - u_1}{2} \cos \frac{(2j+1)\pi}{2Y+2} \quad (j = \overline{0, Y});$$

$$u_1 = \frac{1 - \cos \alpha_0}{\cos \alpha_Y - \cos \alpha_0}; \quad u_1 = \frac{1 + \cos \alpha_0}{\cos \alpha_0 - \cos \alpha_Y};$$

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{2Y+2}; \quad \alpha_Y = \frac{(2Y+1)\pi}{2Y+2}.$$

После приведения подобных членов линейная комбинация функции Чебышева (3) принимает вид

$$\Lambda(u) = \sum_{\nu=0}^Y B_\nu u^\nu, \text{ а выражение (1) для функции}$$

Грина с учетом формулы (2), упрощается, т. е.

$$G(r) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\nu=0}^Y \frac{B_\nu}{\sqrt{r^2 + (\nu\tau)^2}}. \quad (4)$$

С формальной точки зрения выражение (4) описывает поле в плоскости $z_0 = 0$, создаваемое расположенной в свободном пространстве на оси аппликат системой Y точечных зарядов величиной B_ν , отстоящих от расположенного в начале координат заряда величиной B_0 на расстоянии $\nu\tau$, $\nu = \overline{1, Y}$. Такая физическая трактовка поясняет необходимость возможно более точного определения свободного члена аппроксимирующего полинома $\Lambda(u)$ и целесообразность описанного выше изменения интервала интерполяции.

Выбор масштабирующего множителя

Как показывают проведенные исследования, традиционный способ представления функции Грина в форме (4) имеет значительный резерв повышения точности (по сведениям автора публикаций по рассматриваемому вопросу не имеется). Оказалось, что при заданной старшей степени интерполирующего многочлена Y весьма существенное влияние на точность аппроксимации функции $\Phi(\lambda)$ оказывает выбор масштабирующего множителя τ . В работе [2] предлагается τ принять равным толщине одного из слоев, а именно, толщине подложки. В отсутствие формального критерия для выбора нужного слоя задачу определения τ приходится решать методом полного перебора, что для многослойной структуры не всегда приемлемо из-за возникающих при вычислениях проблем: переполнение разрядной сетки, потеря точности и др. Более того, найденное таким способом значение τ не позволяет обеспечить максимальную точность аппроксимации, которая достижима для заданного Y . Поэтому в качестве рабочего значения масштабирующего множителя предлагается принять значение τ_0 , которое минимизирует максимальную величину абсолютной погрешности аппроксимации функции $\Phi(\lambda)$. Способ получения такого значения не принципиален, его нетрудно получить любым из известных методов минимизации. Значение $\tau = \tau_0$ назовем характеристическим размером конструкции.

Как показывает вычислительный эксперимент, такое значение τ мало отличается от получаемого

при минимизации максимальной относительной ошибки для всех $u \in [0, 1)$, за исключением области вблизи точки $u = 1$, где поведение относительной ошибки нерегулярно, по-видимому, из-за потери точности компьютерных вычислений.

Использование характеристического размера конструкции в качестве рабочего значения масштабирующего множителя позволяет существенно повысить точность традиционного способа расчета функции Грина. Преимущество предлагаемой модификации традиционного способа подтверждается приведенным ниже примером расчета.

Оценка точности вычисления функции Грина

При рассмотрении задач, включающих решение уравнений Пуассона и Лапласа, традиционно ориентируются на погрешности выполнения законов сохранения и расчета полей менее 1 % [7]. Оценим точность вычисления функции Грина по формуле (4), для чего представим выражение (1) в виде

$$G = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (I_1 + I_2),$$

$$\text{где } I_1 = \int_0^\beta J_0(\lambda r) \Phi(\lambda) d\lambda; \quad I_2 = \int_\beta^\infty J_0(\lambda r) \Phi(\lambda) d\lambda;$$

β — произвольный предел интегрирования, выбираемый из условия

$$\Phi(\beta) \approx \Phi(\infty). \quad (5)$$

Учитывая монотонный характер изменения функции $\Phi(\lambda)$, условие (5) может быть выполнено с любой требуемой степенью точности, ограниченной лишь особенностями языка программирования и техническими возможностями компьютера. Тогда

$$I_2 = \Phi(\infty) \int_\beta^\infty J_0(\lambda r) d\lambda = \Phi(\infty) \cdot \Theta(\beta r), \quad (6)$$

где аналитическое выражение функции $\Theta(\beta r)$ (6) имеет вид

$$\Theta(\beta r) = 1 - \beta r J_0(\beta r) + \frac{\pi \beta r}{2} [J_0(\beta r) H_1(\beta r) - J_1(\beta r) H_0(\beta r)], \quad (7)$$

где J_ν — функция Бесселя первого рода ν -го порядка;

H_ν — функция Струве ν -го порядка;
 $\nu = 1, 2$ [8].

Функция $\Theta(\beta r)$ имеет колебательный характер (рис. 1). Первые нули θ_k ($k = \overline{1, 17}$) этой функции представлены в табл. 1.

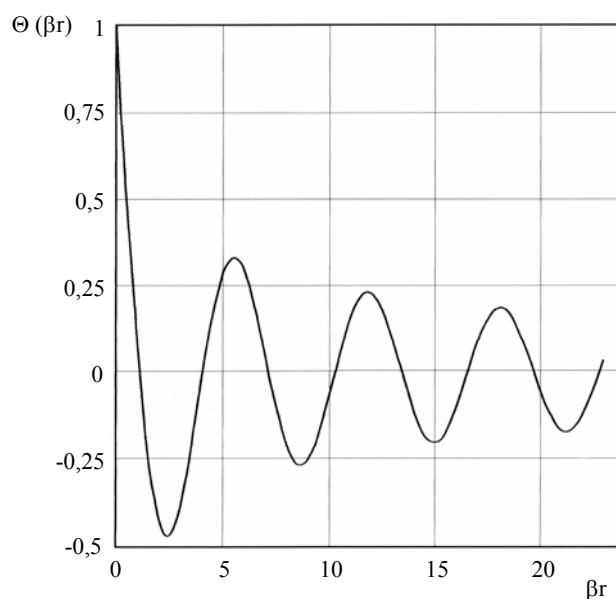


Рис. 1. Θ -функция

Таблица 1

| k | Нули θ_k |
|-----|-----------------|
| 1 | 1,108364661 |
| 2 | 4,062644472 |
| 3 | 7,151557848 |
| 4 | 10,269381067 |
| 5 | 13,397636191 |
| 6 | 16,530742102 |
| 7 | 19,666476075 |
| 8 | 22,803787326 |
| 9 | 25,942117194 |
| 10 | 29,081142112 |
| 11 | 32,220662040 |
| 12 | 35,360546791 |
| 13 | 38,500708053 |
| 14 | 41,641083834 |
| 15 | 44,781629355 |
| 16 | 47,922311469 |
| 17 | 51,063105122 |

При вычислении нулей с помощью выражения (7) функции Бесселя рассчитывались по интегральной формуле Бесселя [9], функции Струве — по интегральной формуле Пуассона [9].

Указанные интегральные представления хорошо верифицированы и допускают простой контроль погрешности; повышенный расход машинного времени по сравнению, например, с [10] при

проведении данного исследования, значения не имел. Для снижения влияния погрешности округления все вычисления проводились с учетом 32 десятичных знаков мантиссы каждого операнда. При численном интегрировании использовалась квадратурная формула Гаусса для трех узлов, причем для снижения влияния методической погрешности интервал интегрирования был разбит на 10^4 шагов. При таком способе вычислений результат содержит, по меньшей мере, 11 верных десятичных знаков. Погрешность расчета интегралов контролировалась методом Рунге [11], не требующим вычисления производной высокого порядка от подынтегральной функции.

Для выбора предела интегрирования интеграла I_2 при заданной относительной погрешности δ_Φ равенства (5) необходимо решить относительно β уравнение $1 - \Phi(\beta) / \Phi(\infty) = \delta_\Phi$. Соотношение (5) обеспечивается любым пределом интегрирования $\beta_k \in [\beta, \infty]$. Определяемый по табл. 1 для наибольшего расстояния r_{\max}^* ближайший больший нуль Θ -функции $\theta_k \geq \beta r_{\max}$ даст величину произведения $\beta_{\min} r_{\max}$, обладающего следующим свойством: для всех расстояний $r \leq r_{\max}$ может быть взят один и тот же нуль Θ -функции θ_k , так как он соответствует значению предела $\beta_k = \theta_k / r \geq \beta_{\min}$, а β_k заведомо обеспечивает соотношение (5) и всегда обеспечивает равенство $I_2 = 0$ при заданной относительной погрешности δ_Φ . Тогда функция Грина

$$G(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\beta_k} J_0(\lambda r) \Phi(\lambda) d\lambda. \quad (8)$$

Равенство (8) является принципиально точным. Вычисление интеграла с конечными пределами в (8) не представляет особых трудностей при численном интегрировании. Оценку погрешности интегрирования можно проводить не только во внутренней сходимости: точность приближенных квадратурных формул хорошо изучена. Учитывая возможность разбиения интервала интегрирования на шаги, значение функции Грина в произвольной точке на плоскости $z = z_0$ может быть рассчитано по формуле (8) с любой требуемой точностью (в пределах возможностей компьютера и языка программирования). Это позволяет при вычисле-

нии потенциала в слоистой среде, полученное с помощью формулы (8), значение условно считать точным и использовать его для контроля точности вычисления функции Грина приближенными методами. В частности, это позволяет оценить погрешность вычислений по формуле (4), обусловленную аппроксимацией функции $\Phi(\lambda)$.

Предлагаемый способ вычисления функции Грина

Неустрашимым, на первый взгляд, недостатком формы представления функции Грина (8) является трудность ее интегрирования по объему реального источника поля с весом, равным плотности распределения элементарных источников. Этот недостаток легко возмещается простотой и доступностью получения точных значений функции Грина по формуле (8), что дает возможность использовать эту формулу не только для контроля точности. В случае необходимости указанного интегрирования можно провести аппроксимацию выражения (8), причем вид аппроксимирующего выражения для удобства интегрирования можно подобрать с учетом специфики решаемой задачи. Актуальность такого приема обусловлена еще и тем, что приближенные выражения для функции Грина вида (4), полученные с использованием формулы Вебера-Липшица, обладают тремя неустрашимыми недостатками.

Во-первых, интегрирование этих выражений по объему источника поля приводит к весьма громоздким выражениям [2, 4 и др.], а интегралы от функции Грина с весом, равным плотности элементарных источников поля, нередко через первообразные не выражаются, как и интегралы, включающие выражение (8).

Во-вторых, при отсутствии методов точного вычисления интеграла (1) оценку погрешности его вычисления можно проводить лишь по внутренней сходимости; такая оценка не всегда надежна и возможна.

В-третьих, при традиционном методе вычислений, предполагающем аппроксимацию функции $\Phi(\lambda)$ суммой экспонент и использование формулы Вебера-Липшица, погрешность расчета функции Грина существенно зависит от расстояния r , и на достаточно больших расстояниях с увеличением r , сохраняя знак, быстро растет по абсолютной величине. Поэтому нередко необходима другая форма представления функции Грина, отличающаяся от (4).

Функция Грина $G(r)$ в интегральном представлении (8) — неотрицательная монотонно спадаю-

* В качестве наибольшего размера r_{\max} , необходимого для прямых расчетов поля или последующего интегрирования функции Грина, может быть принята, например, диагональ самого длинного прямоугольного проводника на подложке или диагональ ее рабочего поля.

шая функция, имеющая как описанную в [3, 5 и др.] особенность при $r = 0$. Чтобы упростить выражение (8), представим его в виде

$$G(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} [r \int_0^{\beta_k} J_0(\lambda r) \Phi(\lambda) d\lambda] / r. \quad (9)$$

Заключенное в квадратные скобки [] выражение в (9) особенностей не имеет; оно является функцией расстояния r и может быть аппроксимировано в базисе функций Чебышева первого рода переменной $p = (r/r_{\max})^2$ на интервале $[0, 1]$ так, чтобы на краях указанного интервала погрешность аппроксимации была равна нулю по описанной выше методике, принимая в формуле (3) $u = p$:

$$I_3(p) = r_{\max} \sqrt{p} \int_0^{\beta_k} J_0(\lambda r_{\max} \sqrt{p}) \Phi(\lambda) d\lambda \approx \\ \approx A_0 / 2 + \sum_{\nu=1}^Y A_\nu T_\nu[(2p-a-b)/(b-a)], \quad (10)$$

где $[0, r_{\max}]$ — интервал изменения переменной r .

После приведения подобных членов выражение (10) для I_3 примет вид

$$I_3(p) = D_0 + \sum_{\nu=1}^Y D_\nu p^\nu,$$

где D_ν — коэффициенты аппроксимации;
 $\nu = \overline{0, Y}$.

Теперь представим выражение (8) в виде

$$G(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_0^{\beta_k} J_0(\lambda r) \Phi(\lambda) d\lambda - D_0/r \right\} + D_0/r.$$

В последней формуле заключенное в квадратные скобки [] выражение особенностей не имеет; оно может быть аппроксимировано отрезком степенного ряда по четным степеням r так же, как это сделано для I_3 , и приведено к виду

$$G(r) = \frac{D_0}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\zeta=0}^Z E_\zeta r^{2\zeta}, \quad (11)$$

где E_ζ — коэффициенты аппроксимации;
 $\zeta = \overline{0, Z}$.

Это выражение гораздо более "физично", чем (8): первое слагаемое в (11) с точностью до множителя D_0 имеет физический смысл функции Грина для свободного пространства, второе сла-

гаемое — поправка, учитывающая отличие физических свойств слоистой среды от свойств свободного пространства.

В случае вычисления поля реального источника, размеры которого сравнимы с расстоянием r , интегрирование выражения (11) по объему источника поля с весом (8), и конечные выражения получаются проще, что позволяет существенно снизить объем вычислений.

Следует также учесть, что возрастание (по абсолютной величине) относительной погрешности с увеличением r не обязательно свидетельствует о неприемлемо высокой абсолютной погрешности вычисления потенциала, так как с ростом r поле быстро убывает. Неважно, с какой погрешностью рассчитывается поле, если априори известно, что оно по абсолютной величине пренебрежимо мало. Недостатки предлагаемого способа — зависимость относительной погрешности от величины интервала аппроксимации и быстрый рост относительной погрешности за пределами этого интервала.

Подробное сравнительное исследование точности вычисления функции Грина по формулам (4) и (11) и области их предпочтительного использования выходит за рамки данной работы.

Пример расчета

Для иллюстрации изложенной методики рассмотрим двухслойную структуру, ограниченную сверху и снизу идеальными экранами (физическая модель микросхемы на диэлектрической подложке в металлическом корпусе). Единичный точечный заряд расположен на границе раздела слоев. Для такой конструкции имеем

$$\Phi(\lambda) = \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_2\Omega - \epsilon_1} \left[\frac{1}{1 + u^{2(h-H)/\tau_0}} - \frac{1}{1 + u^{2(H-h)/\tau_0}} \right],$$

$$\lim_{\substack{u \rightarrow 1 \\ \lambda \rightarrow 0}} \Phi(\lambda) = 0,$$

$$\text{где } u = \exp(-\lambda\tau_0); \quad \Omega = \frac{(1+u^{2h/\tau_0})[1-u^{2(h-H)/\tau_0}]}{(1-u^{2h/\tau_0})[1+u^{2(h-H)/\tau_0}]},$$

ϵ_1 и ϵ_2 — относительные диэлектрические проницаемости верхнего и нижнего слоев, соответственно;

h — толщина нижнего слоя (толщина подложки);

H — расстояние между проводящими плоскостями (внутренняя высота корпуса).

В табл. 2 сведены результаты исследования точности аппроксимации функции $\Phi(\lambda)$ при $\tau = h$ и $\tau = \tau_0$ для часто встречаемых на практике значений: $\varepsilon_1 = 1$; $\varepsilon_2 = 8,5$; $h = 1$ мм; $H = 3$ мм. Минимум максимальной абсолютной погрешности Δ_0 и минимум максимальной относительной погрешности аппроксимации δ_0 соответствуют величине $\tau = \tau_0$, максимальная абсолютная погрешность Δ и максимальная относительная погрешность δ рассчитывались при $\tau = h$. Из табл. 2 видно, что при $\tau = \tau_0$ точность аппроксимации значительно выше.

Таблица 2

Зависимость максимальной погрешности аппроксимации функции $\Phi(\lambda)$ от старшей степени аппроксимирующего полинома Y

| Y | Δ_0 | $\delta_0, \%$ | Δ | $\delta, \%$ |
|-----|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1 | $7,81 \cdot 10^{-3}$ | 4,11 | $3,14 \cdot 10^{-2}$ | 18 |
| 2 | $1,27 \cdot 10^{-3}$ | 4,76 | $1,12 \cdot 10^{-2}$ | 5,79 |
| 3 | $-1,69 \cdot 10^{-4}$ | -1,21 | $9,57 \cdot 10^{-4}$ | 3,64 |
| 4 | $1,29 \cdot 10^{-5}$ | $1,53 \cdot 10^{-1}$ | $-3,84 \cdot 10^{-4}$ | $-1,84 \cdot 10^{-1}$ |
| 5 | $-3,93 \cdot 10^{-6}$ | $-2,95 \cdot 10^{-3}$ | $-5,9 \cdot 10^{-5}$ | $-5 \cdot 10^{-1}$ |
| 6 | $-1,53 \cdot 10^{-6}$ | $-1,02 \cdot 10^{-3}$ | $1,35 \cdot 10^{-5}$ | $6,4 \cdot 10^{-3}$ |
| 7 | $4,07 \cdot 10^{-7}$ | $3,49 \cdot 10^{-4}$ | $3,06 \cdot 10^{-6}$ | $3,97 \cdot 10^{-3}$ |
| 8 | $8,83 \cdot 10^{-8}$ | $6,7 \cdot 10^{-5}$ | $-6,5 \cdot 10^{-7}$ | $-3,1 \cdot 10^{-4}$ |
| 9 | $1,73 \cdot 10^{-8}$ | $1,2 \cdot 10^{-5}$ | $-1,94 \cdot 10^{-7}$ | $1,48 \cdot 10^{-4}$ |
| 10 | $3,9 \cdot 10^{-9}$ | $1,9 \cdot 10^{-6}$ | $2,9 \cdot 10^{-8}$ | $1,38 \cdot 10^{-5}$ |
| 11 | $-4,3 \cdot 10^{-10}$ | $-3,28 \cdot 10^{-7}$ | $-1,3 \cdot 10^{-8}$ | $-6,9 \cdot 10^{-6}$ |

Для всех $Y > 3$ отношение $\tau_0/h \approx 2$ (с абсолютной погрешностью $\leq 6,5 \cdot 10^{-4}$). При $Y = 2$ получаем $\tau_0/h = 1,842468$, $\Delta_0 = 1,2728 \cdot 10^{-3}$, $\delta_0 = 4,76 \%$; при $Y = 3$ — соответственно, $\tau_0/h = 1,970179$, $\Delta_0 = 1,6858 \cdot 10^{-4}$, $\delta_0 = 1,21 \%$.

Соотношение (5) с относительной погрешностью $\delta_\Phi = 0,01 \%$ выполняется при $\beta = 4896,11$. При $r = \tau_0$ получим $\beta r = 9,64622$. Ближайший большой корень Θ -функции $\theta_4 = 10,269381$, при $r = 2\tau_0$ — ближайший большой корень Θ -функции $\theta_6 = 16,530742$. Относительная погрешность вычисления функции Грина δ_G представлена на рис. 2.

Проведенные исследования с применением предлагаемого метода контроля точности показали (см. рис. 2), что использование характеристического размера конструкции в качестве рабочего значения масштабирующего множителя позволяет

существенно повысить точность традиционного способа расчета функции Грина.

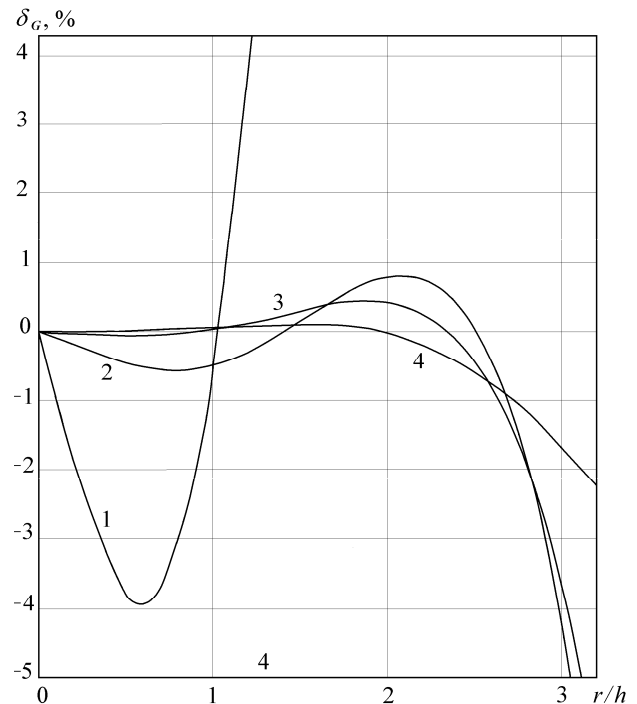


Рис. 2. Зависимость относительной погрешности вычисления функции Грина, %, от нормированного расстояния r/h (h — толщина подложки) при фиксированной старшей степени аппроксимирующего полинома Y :
 1 — $\tau = h, Y = 2$; 2 — $\tau = \tau_0, Y = 2$; 3 — $\tau = h, Y = 3$;
 4 — $\tau = \tau_0, Y = 3$

Заключение

Предлагаемый метод представления функции Грина в виде (8), основанный на использовании свойств специальных функций, решает задачу вычисления этой функции без аппроксимации. При его использовании точность расчетов практически не ограничивается, что дает возможность при выборе и реализации конкретного способа приближенного вычисления функции Грина исходить из требуемой погрешности вычисления поля, контролируя эту погрешность, и не ограничиваться контролем точности промежуточных результатов.

Предлагаемая методика вычисления функции Грина, сочетающая аппроксимацию в базисе функций Чебышева первого рода и численную минимизацию ошибки как функции масштабирующего множителя, позволяет существенно повысить точность традиционного способа расчета функции Грина по сравнению с известными методиками.

Поскольку исследование соотношения (1) справедливо для полей различной физической природы, полученные результаты могут быть ис-

пользованы для модификации методов решения широкого класса задач, решение которых основано на вычислении функции Грина для уравнения Лапласа в слоистой среде.

Л и т е р а т у р а

1. Пановский В., Филипс М. Классическая электродинамика. — М.: Физматгиз, 1963. — 432 с.
2. Семенов В. И. Расчет емкостей плоских проводников в слоистых средах// Радиотехника. 1973. Т. 28. № 10. С. 84—90.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977. — 736 с.
4. Конников И. А. Расчет емкостей прямоугольных плечных проводников с произвольным коэффициентом формы// Судостроение. 1980. № 8. С. 32—33.

5. Морс Ф. М., Фейнбах Г. Методы теоретической физики. Т. 1. — М.: ИЛ, 1958. — 930 с.

6. Корн Г. А., Корн Т. М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — Санкт-Петербург: Лань, 2003. — 831 с.

7. Кукиева Э. А., Снытников В. Н. Параллельная реализация фундаментального решения уравнения Пуассона// Вычислительные технологии. 2005. № 4. С. 63—71.

8. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1971. — 1108 с.

9. Справочник по специальным функциям/ Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. — М.: Наука, 1979. — 832 с.

10. Скобло В. С. Методика аппроксимации цилиндрических функций// Известия вузов. Сер. Приборостроение. 2005. № 7. С. 61—63.

11. Хемминг Р. В. Численные методы для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1972. — 400 с.

Статья поступила в редакцию 28 июля 2006 г.

Two techniques for computing Green function for the Laplace equation

I. A. Konnikov

St.-Petersburg University of Culture and Arts, Russia

A modification of the generally accepted technique for computing Green function for a layered medium is proposed; the modification enables to increase the precision of the computation. A technique which enables to check upon the precision of computing Green function is proposed; the technique is based upon employing properties of Bessel and Struve functions and leads to simple mathematical expressions. An elucidatory example is submitted. The results are valid for a broad class of problems solved by means of the Green functions technique.

* * *