

УДК 537.626:537.533:519.632

Математическое моделирование магнитных электронных линз

Д. Э. Гринфельд

ФГУП «Научно-производственное объединение "Орион"» — Государственный научный центр РФ,
Москва, Россия

А. П. Шуленок

Московский физико-технический институт (Государственный университет),
г. Долгопрудный, Россия

Представлены алгоритмы и программное обеспечение для моделирования магнитных электронных линз с произвольной осесимметричной геометрией обмоток и магнитопровода с учетом эффекта насыщения материала магнитопровода. Рассмотрены методы расчета хроматической и геометрических aberrаций, а также статистической обработки совокупности траекторий электронов. Приведены результаты тестирования созданной программы и пример расчета магнитной электронной линзы.

Для фокусировки электронного луча в электронно-оптической технике используются магнитные электронные линзы. При их конструировании большую роль играет математическое моделирование, которое позволяет значительно уменьшить затраты времени и финансов на проведение экспериментов в целях оптимизации рабочих характеристик линз.

Моделирование магнитных электронных линз включает в себя два этапа: расчет магнитного поля линзы и анализ его электронно-оптических характеристик, таких как фокусное расстояние, геометрические и хроматические aberrации.

При расчете магнитного поля, генерируемого линзой с магнитопроводом, следует учитывать возможность насыщения магнитного материала. Учет нелинейных свойств магнитных материалов необходим для оптимального выбора геометрических размеров магнитопровода и материалов для его изготовления. Для расчета поля применяется метод конечных элементов [1—3]. Представлены результаты сравнения эффективности различных итерационных методов для решения нелинейной задачи магнитостатики.

Моделирование фокусировки электронного луча осуществляется методом тау-вариаций [4]. Вычисляются коэффициенты сферической и хроматической aberrаций [5], среднеквадратические размеры пучка и распределения плотности тока в произвольных сечениях. С учетом начального распределения электронов и aberrационных характеристик линзы определяются положение плоскости

наименьшего сечения пучка и плотность тока в этом сечении. При использовании в качестве источника электронов термоэмиссионной электронной пушки, предварительно рассчитанной по программе Wincharge [6], предусмотрена возможность переноса из этой программы начальных данных для расчета траекторий частиц в электронной линзе.

В качестве примера в работе приводятся результаты моделирования магнитной электронной линзы, которые подчеркивают необходимость учета насыщения материала магнитопровода.

Алгоритм расчета магнитного поля

Расчет магнитного поля состоит в решении уравнений Максвелла

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}, \quad (1)$$

$$\text{rot} \frac{\vec{B}}{\mu(|\vec{B}|)} = \vec{j} \quad (2)$$

с граничными условиями

$$|\vec{B}| \rightarrow 0 \text{ при } \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где \vec{A} — векторный потенциал поля;

\vec{B} — магнитная индукция;

\vec{j} — плотность тока;

μ — магнитная проницаемость, которая в общем случае является функцией индукции

поля (будем предполагать возможность насыщения магнитных материалов).

В случае аксиальной симметрии магнитопроводов и распределения токов можно выбрать такую калибровку векторного потенциала, в которой отличной от нуля является одна лишь аксиальная компонента, в дальнейшем обозначаемая скалярно $A(z, r)$.

При решении уравнений (1) и (2) применяется метод конечных элементов, для реализации которого удобно представить уравнения Максвелла в вариационной форме [1]. Можно показать, что при решении этих уравнений функционал энергии магнитного поля

$$W = 2\pi \iint_S [U(|B|) - jA] r dr dz, \quad (4)$$

где
$$U(B) = \int_0^B \frac{B' dB'}{\mu(B')}$$

принимает минимальное значение. Поскольку расчетная область S конечна, на ее границе ∂S ставятся условия

$$A(r, z)|_{(r,z) \in \partial S} = 0,$$

аппроксимирующие условия (3).

Численный поиск минимума функционала (4) требует перехода к конечномерной аппроксимации неизвестной функции $A(z, r)$. Для этого разработан алгоритм автоматического разбиения произвольной расчетной области с кусочно-гладкой границей на конечные элементы треугольной формы. Применение сетки с треугольными элементами позволяет корректно описать границы магнитопроводов даже в случае их сложной формы. Построение сетки выполняется по следующему алгоритму. На первом этапе проводится предварительное разбиение области на подобласти, площадь которых составляет 20—50 площадей конечных элементов. Оптимальное положение прямых линий разбиения подбирается перебором различных вариантов. На предварительное разбиение накладываются следующие условия: подобласти должны быть выпуклыми многоугольниками приблизительно одинаковой площади. Далее каждая из подобластей разбивается на треугольные элементы, причем разбиение проводится начиная от периметра подобласти к ее центру, как показано на рис. 1. Элементы, если это возможно, должны быть близки по форме к равносторонним треугольникам, длина сторон которых выбирается исходя из задания локальных сгущений сетки. Однако форма элементов может быть и иной, если

это необходимо для предотвращения пересечений границ элементов. В результате этих операций определяется связность сетки, т. е. взаимное расположение узлов, ребер и элементов. На последнем этапе осуществляется регуляризация сетки, для чего внутренние узлы смещаются таким образом, чтобы сумма квадратов длин всех ребер стала минимальной. Процесс регуляризации итерационный и требует 5—10 итераций по методу градиентного спуска.

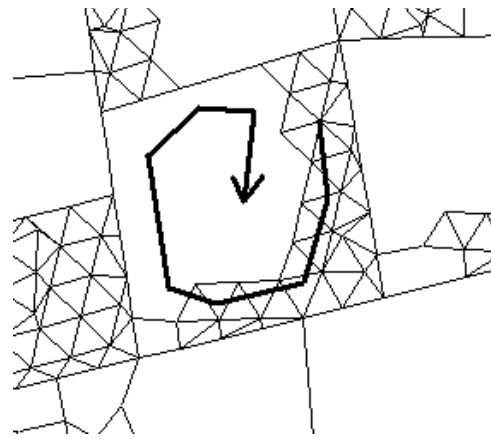


Рис. 1. Триангуляция подобласти
Стрелка показывает направление обхода периметра подобласти при построении элементов

На каждом элементе вводятся локальные координаты u и v , которые пробегают диапазон значений, определяемый неравенствами

$$u \geq 0, \quad v \geq 0 \quad \text{и} \quad u + v \leq 1.$$

Локальные координаты связаны с цилиндрическими координатами z и r линейным преобразованием

$$\begin{aligned} z &= z_0(1 - u - v) + z_1u + z_2v, \\ r &= r_0(1 - u - v) + r_1u + r_2v, \end{aligned}$$

где z_k и r_k ($k = 0, 1, 2$) представляют собой координаты угловых точек элемента.

С помощью локальных координат искомую функцию аппроксимируем по формуле

$$A(z, r) = r\alpha(z, r) = r[\alpha_0(1 - u - v) + \alpha_1u + \alpha_2v],$$

где коэффициенты α_k соответствуют узлам сетки, расположенным в углах треугольных элементов.

Введение множителя r повышает точность аппроксимации на примыкающих к оси симметрии элементах. Действительно, функция $A(z, r)$, обращаясь на оси симметрии в нуль, приближается на приосевых элементах линейной комбинацией трех функций r , r^2 и zr , т. е. на этих

элементах фактически имеет место второй порядок аппроксимации.

В рамках принятой аппроксимации компоненты магнитной индукции выражаются формулами:

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(Ar)}{\partial r} = 2\alpha(u, v) + \frac{r(u, v)}{2S} \times \\ \times [\alpha_0(z_2 - z_1) + \alpha_1(z_0 - z_2) + \alpha_2(z_1 - z_0)]; \quad (5)$$

$$B_r = -\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{r(u, v)}{2S} \times \\ \times [\alpha_0(r_2 - r_1) + \alpha_1(r_0 - r_2) + \alpha_2(r_1 - r_0)], \quad (6)$$

где S — площадь элемента сетки.

Подставляя (5) — (6) в (4), выражаем функционал энергии через неизвестные коэффициенты α_j , число которых равно числу узлов сетки. Минимизация функционала (4) на конечномерном подмножестве аппроксимирующих функций эквивалентна решению системы уравнений

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_j} = 0 \quad (7)$$

относительно этих коэффициентов.

Из-за эффекта магнитного насыщения система уравнений (7) является нелинейной, и ее решение проводится итерационными методами. Для исследования эффективности различных способов поиска минимума функции многих переменных при решении рассматриваемой задачи мы программно реализовали три численных метода по приведенным ниже итерационным схемам:

- метод Ньютона

$$\alpha_j^{(n+1)} = \alpha_j^{(n)} - C\rho_j,$$

где $\rho_j^{(n)} = \frac{W_j^{(n)}}{W_{jj}^{(n)}}$, $W_j^{(n)} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_j}$, $W_{ij}^{(n)} = \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}$;

- метод наискорейшего (градиентного) спуска

$$\alpha_j^{(n+1)} = \alpha_j^{(n)} - C\gamma^{(n)}\rho_j^{(n)},$$

где $\gamma^{(n)} = \frac{\sum_i W_i^{(n)2} / W_{ii}^{(n)}}{\sum_{i,k} \rho_i^{(n)} \rho_k^{(n)} W_{ik}^{(n)}}$;

- метод с использованием градиента на предыдущей итерации (сопряженных градиентов)

$$\alpha_j^{(n+1)} = \alpha_j^{(n)} - C\gamma^{(n)} \frac{\rho_j^{(n)} + \beta^{(n)} \rho_j^{(n-1)}}{2}.$$

Критерием останова итерационного процесса являлось уменьшение нормы изменения искомых коэффициентов α_j

$$\Delta^{(n)} = \max_j |\alpha_j^{(n)} - \alpha_j^{(n-1)}|, \quad (8)$$

на n -й итерации до некоторого малого значения ϵ .

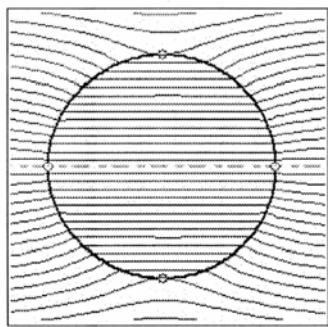
На первой итерации коэффициент релаксации C принимался равным единице. На последующих итерациях он изменялся в пределах интервала $[0, 2]$ по следующим правилам. Если норма (8) монотонно убывала на двадцати последовательных итерациях, то коэффициент релаксации увеличивался на 10%. При возрастании нормы изменения α_j хотя бы на одной итерации коэффициент релаксации, наоборот, уменьшался на 10%.

Точность и скорость сходимости к решению анализировались на примере тестовой задачи о шаре с радиусом $\rho_0 = 1$ из однородного магнитного материала с магнитной проницаемостью μ , помещенном во внешнее однородное магнитное поле с индукцией B_0 . Расчет методом Ньютона производился в достаточно большой области, так что ошибка, обусловленная ограниченностью расчетной области, заведомо не превышала 10^{-3} . Результаты расчета на каждой итерации сравнивались с известным аналитическим решением [7]

$$\alpha = \begin{cases} \frac{3}{2} \frac{\mu}{\mu + 2} B_0, & \rho < \rho_0 \\ \left(\frac{B_0}{2} + \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{-3} \right) B_0, & \rho \geq \rho_0 \end{cases}.$$

При выбранном для расчета значении магнитной проницаемости $\mu = 4$ индукция поля внутри сферы ровно в два раза превышает значение B_0 .

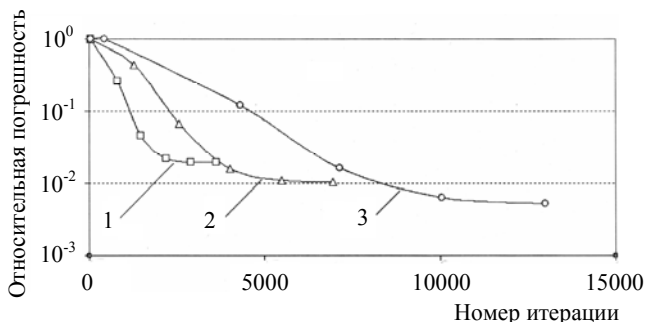
На рис. 2, а показана картина силовых линий магнитного поля вблизи магнитного шара и приведены зависимости относительной погрешности вычисления от числа итераций при фиксированном параметре релаксации $C = 0,9$ для сеток, содержащих различное число конечных элементов N (см. рис. 2, б). Как видно из графиков, с увеличением числа элементов достижимая точность решения растет благодаря уменьшению ошибки аппроксимации, а скорость сходимости падает.



a

Рис. 2. Итерационный процесс:

a — силовые линии магнитного поля в тестовой задаче;



б

Рис. 2. Окончание.

б — зависимость относительной погрешности вычисления от числа итераций на сетках с различным числом элементов N : 1 — $N = 2000$; 2 — $N = 4000$; 3 — $N = 8000$

Пример моделирования магнитного поля электронной линзы

Нелинейные магнитные характеристики различных конструктивных материалов $B(H)$ приведены в литературе, например в [8], в виде графиков или таблиц. В нашем вычислительном алгоритме удобно использовать сплайненные таблицы $\mu(B)$, которые легко получить из справочных данных. Приведем пример расчета магнитной линзы с магнитопроводом из насыщаемого материала (сталь марки 1211), кривая намагниченности которой приведена на рис. 3. Силовые линии магнитного поля и распределение индукции поля на оси линзы показаны на рис. 4. При толщине внутренней втулки магнитопровода $D = 5$ мм и возбуждении соленоида $J = 500$ ампер-витков в распределении индукции поля на оси симметрии (см. рис. 4, кривая 5) имеется второй максимум, обусловленный снижением магнитной проницаемости материала магнитопровода вследствие эффекта насыщения. Для устранения последнего необходимо увеличение толщины магнитопровода и/или использование материала с более высоким порогом насыщения. Повторение моделирования с большим значением толщины D , равным 15 мм, показано на рис. 4 пунктиром. При такой толщине магнитопровода насыщение его материала практиче-

ски отсутствует, а распределение индукции (см. кривую 6) имеет только один максимум, соответствующий промежутку между полюсными наконечниками.

На представленном примере расчета магнитной линзы с насыщением материала магнитопровода была исследована эффективность трех упомянутых методов минимизации функционала энергии. Не имея точного аналитического решения, мы оценивали скорость сходимости по убыванию модуля разности искоемых коэффициентов (8). Изменение относительной величины этой разности на последовательных итерациях представлено на рис. 5, из которого видно, что наибольшей скоростью сходимости обладает метод сопряженных градиентов (см. кривую 3). Однако в начале итерационного процесса сходимость по нему неустойчива, что, по видимому, связано с необходимостью поиска оптимального для решения конкретной нелинейной задачи коэффициента релаксации C . Исходя из полученных результатов, представляется предпочтительным использовать в начале итерационного процесса метод Ньютона (кривая 1) или метод градиентного спуска (кривая 2), а по достижении устойчивой сходимости дальнейшее повышение точности решения проводить методом сопряженных градиентов.

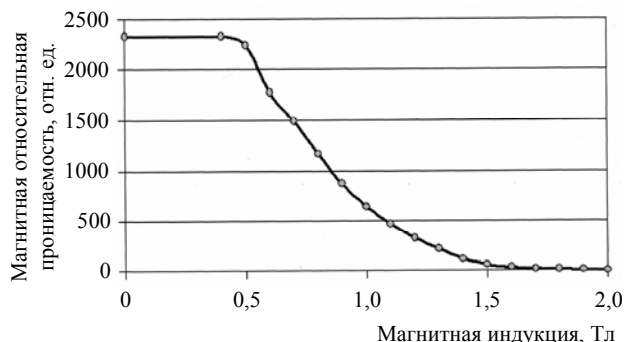


Рис. 3. Сплайн-аппроксимация кривой насыщения материала магнитопровода (сталь 1211)

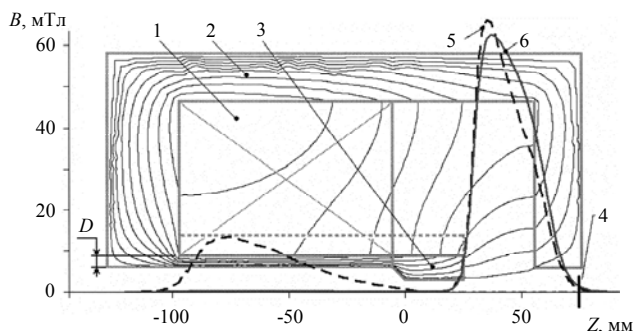


Рис. 4. Моделирование магнитной линзы:

1 — соленоид; 2 — магнитопровод; 3 — полюсный наконечник; 4 — положение плоскости Гаусса; 5, 6 — осевое распределение магнитной индукции при толщине магнитопровода $D = 5$ и 15 мм, соответственно

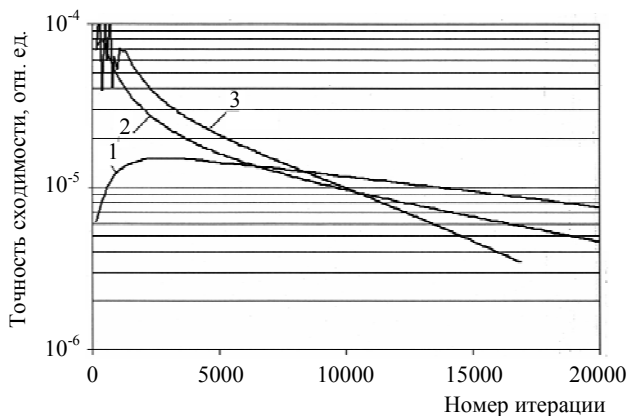


Рис. 5. Сходимость различных итерационных процессов при расчете магнитного поля линзы с насыщением материала магнитопровода:
1 — метод Ньютона; 2 — метод градиентного спуска;
3 — метод сопряженных градиентов

Траекторный и абберационный анализ

В дифференциальные уравнения для расчета тау-вариаций входят производные индукции магнитного поля до третьего порядка включительно [4], что накладывает на осевое распределение магнитной индукции условие гладкости $B(z) \in C^3$. Для выполнения этого требования мы аппроксимируем значения индукции $B_z(z_j, 0) = 2\alpha_j$, найденные в расположенных на оси узлах сетки, сплайном пятого порядка дефекта 1 [9]. Сглаженная таким образом функция $B_z(z)$ используется при восстановлении распределения скалярного магнитного потенциала в приосевой области рядом Буша с точностью до членов четвертого порядка по координате r [5].

В таблице представлены результаты расчета электронно-оптических характеристик рассмотренных выше магнитных линз. Ток в обмотках соленоидов подобран таким образом, чтобы плоскости Гаусса рассматриваемых линз совпадали. Видно, что в случае насыщаемого магнитопровода наличие второго максимума индукции поля приводит к большим значениям как коэффициента увеличения, так и коэффициентов сферической и хроматической аббераций.

Показатели	$D = 5$ мм	$D = 15$ мм
Возбуждение обмотки соленоида, ампер-виток	500	335
Положение плоскости Гаусса, мм	75,0	75,0
Увеличение	0,127	0,074
Коэффициент абберации, мм:		
сферической	-400	-133
хроматической	43,5	30,0

Абберационный ряд позволяет вычислять в плоскости Гаусса $z = z_g$ радиальные координаты r_i электронов с заданными начальными координатами и скоростями. По заданному распределению

начальных параметров фокусируемого магнитной линзой электронного луча строится распределение плотности тока в любом сечении и определяется положение наименьшего сечения луча по критерию минимизации среднеквадратичного отклонения

$$\sigma(z) = \sum_i \left| r_i + (z - z_g) \frac{dr_i}{dz} \right|^2$$

электронов от оси в произвольной плоскости z , расположенной в бесполовом пространстве.

Приведем результаты моделирования фокусировки электронного пучка, имевшего в плоскости источника $z_0 = -400$ мм (шкала на рис. 4) однородное распределение по поперечным координатам в пределах радиуса 0,2 мм и однородное распределение по углам вылета в пределах угла раскрытия 0,01 рад. При средней энергии 50 кэВ распределение электронов по энергии соответствовало термоэмиссии с катода, нагретого до температуры 2500 К. На рис. 6 представлены нормированные на максимум распределения плотности тока электронов в плоскостях Гаусса $z_g = 75,0$ мм и плоскости наименьшего сечения (2) $z_g = 73,7$ мм.

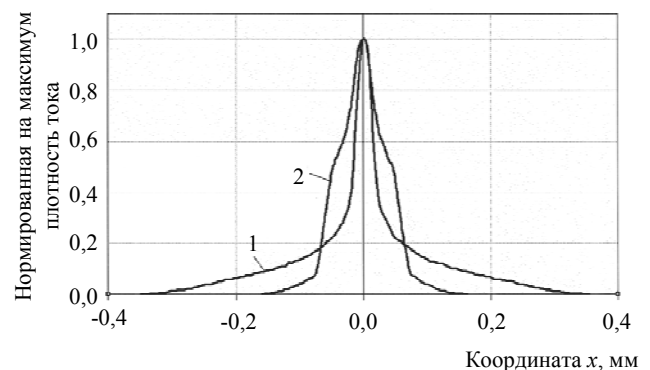


Рис. 6. Нормированное распределение плотности тока в плоскостях, перпендикулярных оси пучка:
1 — в плоскости Гаусса; 2 — в плоскости минимального сечения

Заключение

В работе представлен алгоритм расчета поля магнитных электронных линз с осевой симметрией, учитывающий возможность насыщения материала магнитопровода. Исследованы три численных метода решения уравнений Максвелла для нахождения магнитного потенциала на сетке конечных элементов. Показано, что, комбинируя метод сопряженных градиентов с методом Ньютона и/или методом наискорейшего спуска, можно достичь наибольшей эффективности численного решения нелинейной задачи магнитостатики.

На примере тестовой задачи с известным аналитическим решением исследованы точность и скорость сходимости при различной мелкости раз-

биения расчетной области. Приведен пример расчета магнитного поля линзы и ее электронно-оптических параметров, а также пример моделирования фокусировки электронного пучка.

Разработанную программу можно применять при проектировании магнитных электронных линз в целях оптимизации их электронно-оптических характеристик путем проведения численных экспериментов.

Л и т е р а т у р а

1. Хокс П., Каснер Э. Основы электронной оптики. — М.: Мир, 1993.

2. Lencova B. On magnetic lens computations with FEM and BEM// Nuclear Instruments & Methods in Physics Research, Section A, 2004. V. 519. № 1—2. P. 133—140.

3. Lencova B., Zlamal J. A New Problem for the Design of Electron Microscopes// Abstracts of Seventh International Conference on Charged Particle Optics, Cambridge, England, 24—28th July 2006. P. 71, 72.

4. Монастырский М. А. Метод τ -вариаций и некоторые вычислительные проблемы электронной оптики динамических эмиссионных систем// Прикладная физика. 1996. № 3. С. 7—27

5. Глазер В. Основы электронной оптики. — М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1957.

6. Муравьев А. Г. Математическое моделирование электронных пушек с катодом произвольной формы: Дис..... на соискание степени канд. физ.-мат. наук/ МФТИ, 2001.

7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982.

8. Физические величины: Справочник/ Под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. — М.: Энергоатомиздат, 1991.

9. Вербжицкий В. М. Численные методы. Математический анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Высш. шк., 2001..

Статья поступила в редакцию 19 октября 2006 г.

Numerical simulation of magnetic electron lenses

D. E. Greenfield

ORION Research-and-Production Association, Moscow, Russia

A. P. Shulenok

Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Dolgoprudny, Russia

The paper presents mathematical algorithms and software for numerical simulation of magnetic electron lenses with arbitrary axially symmetrical geometry of coils and magnetic cores, which take into account the magnetic saturation effect. Considered are the methods of estimating chromatic and geometrical aberrations and statistical properties of the electron trajectories distribution. The software testing results and an example of lens simulation are given.