

УДК 537.533

Обобщенный принцип подобия и его применение в электронной спектрографии

Ю. К. Голиков, Н. К. Краснова

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, С.-Петербург, Россия

Предложен общий подход к синтезу спектрографических систем для электронной спектроскопии, основанный на систематическом применении специальных принципов подобия классической механики и их обобщений. Введены новые классы электростатических лапласовых потенциалов как варианты электронно-оптических сред для реализации спектрографов. Доказаны обобщенные принципы подобия. Рассмотрена абстрактная схема синтеза спектрографов и приведены иллюстрирующие примеры.

Процесс измерения энергетических спектров электронных потоков в современной электронной спектроскопии осуществляется с помощью дисперсионного элемента — компактного фрагмента электрической полевой структуры, окаймленного внешними электродами. Через этот элемент пропускается электронный поток, который расщепляется полем на парциальные струи соответственно спектральной плотности $f(E)$. Одна из струй фокусируется на малую выходную щель, за которой стоит детектор, где и фиксируется порция электронов в неразрешенном интервале $(E_0, E_0 + \Delta E)$. Варьируя потенциал развертки, удается прогнать через выходную щель весь энергетический диапазон электронов, и на детекторе запечатлевается в развертке по времени измеряемая спектральная плотность $f(E)$, но с некоторой ошибкой, зависящей от дисперсионных и фокусирующих свойств выбранной системы. Так работают в режиме спектрометра наиболее точные измерители спектров — зеркала и дефлекторы [1]. Среди них существуют весьма совершенные устройства [2, 3], но последнее слово здесь еще не сказано, так как пока не удается найти конфигурацию с максимумом дисперсии при максимуме светосилы, допускаемой природой. Альтернативой спектрометрам выступают спектрографы, привычные для световой оптики, но не для инструментальной электронной оптики. Спектрографический метод предполагает одновременную фиксацию групп электронов с различными энергиями на множестве отдельных детекторов. До появления позиционно-чувствительных детекторов (ПЧД) создание удобных многоканальных детекторов было технически сложной задачей. Параллельная многоканальная обработка электронных потоков открыла дорогу к изучению быстро протекающих процессов, улуч-

шила технику единичного счета с накоплением, упростила схемы спектрометров с угловым разрешением и т. п. Однако на тот момент времени не оказалось удачных схем спектрографов, хорошо совместимых с плоскими ПЧД. Исключение составляет плоский конденсатор, в котором можно осуществить оба режима спектрометра и спектрографа, если ПЧД расположить параллельно обкладкам.

В литературе пока нет сколько-нибудь общих подходов к проблеме спектрографа. Опубликованные в последние годы варианты схем таких устройств (по заверениям авторов) явились результатом компьютерного моделирования [4].

В данном исследовании представлена весьма продуктивная математическая концепция определения электронно-оптических сред (электростатических полей), на базе которых могут быть созданы разнообразные схемы спектрографов. Контрапунктом нижеприведенных рассуждений будут различные версии механического принципа подобия, который имеет тесную связь с особенностями геометрии траекторий в спектрографах.

Безразмерная модель и физическое подобие

Движению частиц в электрических полях свойственны некоторые правила подобия, имеющие сугубо физическое происхождение. Они связаны с выбором линейных размеров систем, потенциалов на электродах, масс, зарядов и начальных скоростей частиц. Математический анализ динамических явлений сильно выигрывает в простоте, если, следуя данным работы [5], перейти к безразмерной модели.

Пусть X, Y, Z — размерные физические координаты, а t — текущее физическое время. Введем линейный и временной масштабы: l (метр) и T (с) и выразим X, Y, Z, t с помощью безразмерных параметров x, y, z, τ :

$$X = lx; Y = ly; Z = lz; t = T\tau. \quad (1)$$

Физический потенциал электрического поля запишем формулой

$$\Phi = \Phi_0 \varphi(x, y, z);$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

где Φ_0 (вольт) — характерный потенциал поля, а безразмерная функция φ выбирается так, чтобы в области движения она менялась на интервале $(0, 1)$ либо $(-1, 1)$.

Безразмерный потенциал $\varphi(x, y, z)$ наиболее эффективно описывает эквипотенциальный портрет поля.

Обозначим знаком (\cdot) производные по τ , и запишем нерелятивистскую функцию Лагранжа для массы m и заряда q , используя соотношение (1)

$$L = \frac{ml^2}{T^2} \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2} - q\Phi_0 \varphi(x, y, z). \quad (2)$$

Линейный масштаб l удобно выбирать из соотношений габаритных размеров системы, а временной масштаб T — выгодно подчинить условию

$$m \frac{l^2}{T^2} = q\Phi_0. \quad (3)$$

Тогда из (2) выделяется общий множитель, и его можно сократить ввиду инвариантности уравнений Лагранжа относительно операции умножения функции Лагранжа на произвольную постоянную. В результате можно записать унифицированную безразмерную функцию Лагранжа в виде

$$L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2} - \varphi(x, y, z). \quad (4)$$

Набор начальных физических данных движения $(X_0, Y_0, Z_0, V_{0x}, V_{0y}, V_{0z})$ при этих переходах с учетом условия (3) трансформируется в набор безразмерных чисел

$$x_0 = \frac{X_0}{l}; y_0 = \frac{Y_0}{l}; z_0 = \frac{Z_0}{l};$$

$$\dot{x}_0 = \sqrt{\frac{m}{q\Phi_0}} V_{0x}; \dot{y}_0 = \sqrt{\frac{m}{q\Phi_0}} V_{0y}; \dot{z}_0 = \sqrt{\frac{m}{q\Phi_0}} V_{0z}. \quad (5)$$

Начальная энергия $E_0 = \frac{mV_0^2}{2}$ замещается безразмерным параметром $W = \frac{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2}{2} = \frac{E_0}{q\Phi_0}$, который выражает физическую стартовую энергию частицы E_0 в долях характерной потенциальной энергии ($q\Phi_0$).

Переход от конкретной физической модели к абстрактной безразмерной всегда однозначен, однако обратный переход от безразмерной траектории $x(\tau), y(\tau), z(\tau)$ сугубо многозначен и дает множество взаимно подобных ситуаций. Действительно, при замороженных левых частях равенств (5) в правых частях можно как угодно менять все физические параметры, лишь бы эти равенства не нарушались. В этом состоит стандартный принцип физического подобия, излагаемый в учебниках в несколько ином ключе, менее прозрачно математически, чем приведенный в [6].

Текущее время в условиях выбора T из (3) выражается формулой $t = \sqrt{\frac{m}{q\Phi_0}} \tau$. Описанная модель

одинаково удобна для расчета спектрометров, спектрографов и времяпролетных масс-анализаторов, обнажая истинную математическую сущность трансформации потоков.

Уравнения Лагранжа здесь совпадают по форме с уравнениями Ньютона, т. е.

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial x}; \\ \ddot{y} = -\frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial y}; \\ \ddot{z} = -\frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial z}. \end{cases} \quad (6)$$

Специальный принцип подобия в полях, однородных по Л. Эйлеру

В самой безразмерной модели могут появиться свои свойства подобия траекторий, обязанные специальной структуре потенциала $\varphi(x, y, z)$. Положим

$$x = k\xi, y = k\eta, z = k\lambda, \quad (7)$$

и подчиним потенциал $\varphi(x, y, z)$ тождеству Л. Эйлера, которое определяет однородные функции n -й кратности

$$\varphi(k\xi, k\eta, k\lambda) = k^n \varphi(\xi, \eta, \lambda). \quad (8)$$

Кроме того, положив $\tau = ap$ и введя все это в функцию Лагранжа (4), получим

$$L = \frac{1}{2} \frac{k^2}{a^2} \left\{ \left(\frac{d\xi}{dp} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dp} \right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dp} \right)^2 \right\} - k^n \varphi(\xi, \eta, \lambda). \quad (9)$$

Если выбрать

$$a = k^{\frac{2-n}{n}}, \quad (10)$$

то из (9) выделится общий множитель, который можно опустить, и функция L сохранит прежнюю форму с точностью до обозначений

$$L = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{d\xi}{dp} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dp} \right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dp} \right)^2 \right\} - \varphi(\xi, \eta, \lambda).$$

Уравнения движения также сохраняют свою прежнюю форму (6), только в переменных ξ, η, λ, p и, следовательно, сохранится вся геометрия траекторий. Само пространство в силу формул (7) претерпевает преобразование подобия с коэффициентом k . При этом любая выбранная конкретная траектория переходит в себе подобную, и если менять k от 0 до ∞ , то получим бесконечную совокупность взаимно подобных траекторий, порождаемых одним и тем же потенциалом φ из класса однородных. Энергия W должна перестраиваться по закону, который легко выводится с помощью соотношения (10)

$$W = \frac{W_0}{k^n}, \quad (11)$$

где W_0 – энергия порождающей траектории.

Итак, в однородных по Л. Эйлеру полях полное интегральное многообразие динамической системы (6) разбивается на совокупность подмногообразий, каждое из которых состоит из взаимно подобных траекторий. Сказанного уже достаточно, чтобы из этого можно извлечь весьма общий подход к синтезу спектрографов.

Абстрактная схема спектрографа

Возьмем какой-нибудь потенциал φ из семейства (8) и поместим в начало координат точечный источник с малым угловым разбросом, но широким энергетическим спектром (W_1, W_2). Выделим парциальный пучок с энергией W_0 из диапазона и проследим его эволюцию. Может оказаться, что возле какой-то точки (x_0, y_0, z_0) он сфокусируется в

малое пятно. В силу принципа подобия при переходе к другой энергии W_s все траектории пучка преобразуются подобным образом, а точка фокусировки переместится в (x_s, y_s, z_s) , которая заведомо лежит на прямом луче, соединяющем (x_0, y_0, z_0) с началом координат $(0, 0, 0)$. При этом, очевидно, источник остается на месте. В результате все электроны спектра распределяются вдоль указанного луча с коэффициентом преобразования, который легко выразить из (11)

$$k = \sqrt{\frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{x_s^2 + y_s^2 + z_s^2}} = \left(\frac{W_0}{W_s} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Если вдоль этого луча выстроить плоский позиционно-чувствительный детектор, то реализуется вариант спектрографа. Разумеется, это только умозрительная схема, но именно к ней все и будет сводиться. Простейший и в то же время замечательный по простоте образец спектрографа дает плоский конденсатор с потенциалом $\varphi = z$, который принадлежит семейству (8) с показателем однородности $n = 1$.

Это единственная система с пропорциональным по W перемещением сфокусированного пятна вдоль плоскости обкладок. При угле ввода пучка $\theta = 45^\circ$ относительно плоскости $z = 0$ имеет место фокусировка I порядка по θ , и пятно фокусировки скользит по этой плоскости по линейной зависимости от W , что очень удобно для калибровки спектрографа.

Следует отметить, что благодаря независимости поля от координат в данной системе можно реализовать два типа спектрографов: для ленточных пучков и для осесимметричных конических пучков. Для реализации идеи спектрографа, действующего по описанному принципу, пригодны все гармонические потенциалы в виде целых полиномов, содержащие в своем эквипотенциальном портрете плоскость, проходящую через начало координат. Такая эквипотенциальная плоскость должна быть местом фокусировки и, соответственно, носителем ПЧД. В частности, для ленточных пучков оптические среды для спектрографов можно описать комплексными потенциалами вида

$$\Omega = \psi(x, z) + i\varphi(x, z) = \omega,$$

$$\omega = x + iz, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Вариант $\varphi = xz$ ($n = 2$) уже исследовался в статье [7], вариант $\varphi = z(3x^2 - z^2)$ при $n = 3$ также изучался (частное сообщение). Случаи дробных, иррациональных и трансцендентных показателей n

также могут применяться в спектрографии, но с некоторыми ухищрениями из-за особых точек поля, возникающих в точке $x = z = 0$.

В случае осесимметричных конических пучков, заключенных между двумя соосными круговыми конусами с осью z , нужны однородные осесимметричные поля с эквипотенциалью $z = 0$, создающие кольцевые изображения на этой плоскости. Кроме упомянутого плоского конденсатора $\varphi = z$, для этих целей подходят все нечетные по z гармонические осесимметричные полиномы, зависящие от z и $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, например кубический $\varphi = z(3r^2 - 2z^2)$.

Если отказаться от требования ПЧД, чтобы он был непременно плоским, для спектрографии можно использовать более широкий ассортимент полей из семейства однородных (8), причем не только в жестких рамках использования принципа подобия, когда источник должен располагаться обязательно в начале координат, но и в более смягченном приближенном режиме "около подобия".

Если источник расположен в стороне от начала координат, но достаточно близко, потоки также склонны фокусироваться на плоскости, однако не во всем диапазоне энергий. При этом дальние траектории с большими W фокусируются лучше, и aberrации растут с уменьшением W . Следует отметить, что само качество фокусировки, определяющее светосилу, и, соответственно, чувствительность спектрографа может сильно меняться в пределах класса (8), и какова в этом смысле оптимальная система – пока сказать нельзя.

Обобщенный принцип подобия

По первому впечатлению класс однородных потенциалов (8) дает столь богатое многообразие электронно-оптических сред для спектрографии, что ничего лучшего и желать не стоит, но это — иллюзия. Специфика эквипотенциальных портретов такова, что реализация полезающих электродов этих полей требует неординарных конструкторских решений, что, естественно, тормозит развитие данных идей. Кроме того, актуальным остается и вопрос о светосиле. Чтобы решать все эти проблемы более гибко и эффективно, надо сначала расширить круг полевых структур, в которых действует принцип подобия. В литературе по аналитической механике ничего другого, отличающегося от однородных структур (8), пока нет. Между тем на практике мы убеждаемся, что такие примеры есть. Круговые траектории в цилиндрическом конденсаторе с логарифмическим потен-

циалом как раз и дают такой пример. Можно существенно расширить класс потенциалов с подобием траекторий, если видоизменить способ доказательства, связанный выше с инвариантностью функции Лагранжа, и построить другую математическую схему. Чтобы наглядней выстроить эту логику, разберем ряд ситуаций в порядке нарастания сложности.

• Ситуация 1

Рассмотрим поток меридиональных траекторий в поле с осесимметричным гармоническим потенциалом

$$\varphi = z \ln r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (12)$$

Функция $\ln r$ растет медленно, и на больших кусках траектории она почти постоянна. Это обстоятельство позволяет предполагать, что траектории для (12) имеют большое сходство со случаем плоского конденсатора, и можно ожидать от него появления некоторых признаков подобия для групп траекторий. Запишем уравнения движения и интеграл энергии:

$$\begin{cases} \ddot{r} = -\frac{z}{r}, \\ \ddot{z} = -\ln r; \end{cases} \quad (13)$$

$$\frac{\dot{r}^2 + \dot{z}^2}{2} + z \ln r = g, \\ g = W + z_0 \ln r_0, \quad W = \frac{\dot{r}_0^2 + \dot{z}_0^2}{2}. \quad (14)$$

Исключим из (13) $\ln r$ с помощью (14) и запишем эти уравнения в виде

$$\begin{cases} r\ddot{r} = -z, \\ \ddot{z} = \frac{\dot{r}^2 + \dot{z}^2}{2} - g. \end{cases} \quad (15)$$

Положим, что

$$r = k\xi; \quad z = k\eta; \quad \tau = a\rho \quad (16)$$

и, кроме того, возьмем другую постоянную полной энергии g^* , тогда (15) примет вид

$$\begin{cases} \frac{k^2}{a^2} \left(\xi \frac{d^2\xi}{d\rho^2} \right) = -k\eta; \\ \frac{k^2}{a^2} \left(\eta \frac{d^2\eta}{d\rho^2} \right) = \frac{k^2}{2a^2} \left\{ \left(\frac{d\xi}{d\rho} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\rho} \right)^2 \right\} - g^*. \end{cases} \quad (17)$$

Выберем $k = a^2$ и приведем (17) к той же форме, что и (15)

$$\begin{cases} \xi \frac{d^2 \xi}{dp^2} = -\eta; \\ \eta \frac{d^2 \eta}{dp^2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\xi}{dp} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dp} \right)^2 \right] - \frac{g^*}{k}. \end{cases} \quad (18)$$

Чтобы иметь полное совпадение по форме (15) и (18), надо величину g^* выбрать из условия

$$\frac{g^*}{k} = g. \quad (19)$$

При соблюдении всех этих условий любая траектория системы (15) с полной энергией g переходит в другую траекторию, с той же полной энергией, но отличающейся от старой размерами, с коэффициентом подобия k .

При переходе на новую подобную траекторию начальные данные (r_0, z_0) также преобразуются подобным образом и переходят в $\xi_0 = \frac{r_0}{k}, \eta_0 = \frac{z_0}{k}$. В этой новой точке полная энергия будет иметь вид

$$g^* = W^* + \eta_0 \ln \xi_0 = W^* + \frac{z_0}{k} \ln \frac{r_0}{k}. \quad (20)$$

Подставим (20) в (19) и найдем условие на W^*

$$W^* = kg - \frac{z_0}{k} \ln \frac{r_0}{k}.$$

Именно при такой кинетической энергии старая траектория переходит в новую, подобную ей. Меняя k , можно построить множество взаимно подобных траекторий. Итак, мы вполне строго доказали, что потенциал (12) допускает многообразие подобных траекторий, кинетическая энергия которых перестраивается по указанному закону. В чистом виде реализовать на базе этого поля спектрограф не удастся, так как точка $r = 0, z = 0$ — особая. Однако если пучок начинается несколько в стороне, то на плоскости $z = 0$ образуется ряд кольцевых изображений при достаточно больших W в полном согласии с принципом подобия (рисунок). Данный расчет был произведен для фирмы "Филипс", этот же результат, но как компьютерный продукт был опубликован в работе [4].

• **Ситуация 2**

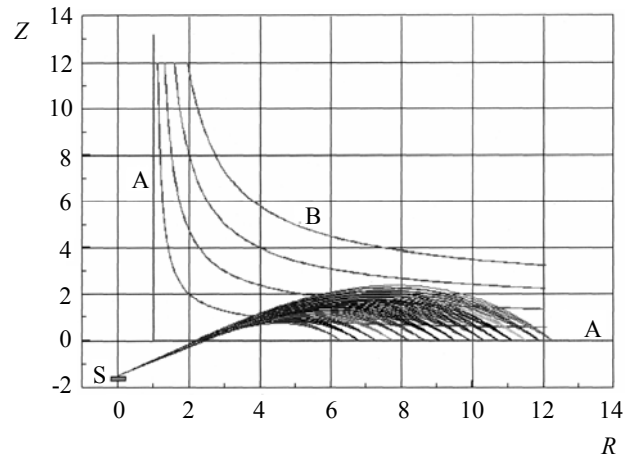
Рассмотрим класс осесимметричных гармонических потенциалов, обобщающих (12),

$$\varphi(r, z) = P(r, z) \ln r + Q(r, z), \quad (21)$$

где P, Q — однородные по Л. Эйлеру функции одной и той же кратности n :

$$P(k\xi, k\eta) = k^n P(\xi, \eta);$$

$$Q(k\xi, k\eta) = k^n Q(\xi, \eta).$$



Осесимметричный квазигиперболический спектрограф на основе полевой структуры $\Phi = z \ln r$.

Спектр анализируемых частиц записывается в широком диапазоне энергий $3 < W < 10$ (в рамках безразмерной модели). S — образец; A и B — полезадающие электроды; потенциал A — нулевой

Эти потенциалы уже рассматривались в [8] как богатая база для синтеза спектрометров, теперь покажем их перспективность при синтезе спектрографов. Ход наших рассуждений будет таким же, как и в ситуации 1.

Запишем уравнения движения в меридиональной плоскости и интеграл энергии, обозначая частные производные нижними индексами

$$\begin{cases} \dot{r} = -P_r \ln r - \frac{P}{r} - Q_r, \\ \dot{z} = -P_z \ln r - Q_z, \end{cases} \quad (22)$$

$$\frac{\dot{r}^2 + \dot{z}^2}{2} - P \ln r + Q = g, \quad (23)$$

$$g = P(r_0, z_0) \ln r_0 + Q(r_0, z_0) + W.$$

Избавимся в (22) от $\ln r$ с помощью (23), и получим систему

$$\begin{cases} \dot{r} = -\frac{P_r}{P} \left\{ g - Q - \frac{\dot{r}^2 + \dot{z}^2}{2} \right\} - \frac{P}{r} - Q_r; \\ \dot{z} = -\frac{P_z}{P} \left\{ g - Q - \frac{\dot{r}^2 + \dot{z}^2}{2} \right\} - Q_z. \end{cases} \quad (24)$$

Снова воспользуемся подстановками (16), а производные от P и Q вычислим так, что

$$P_r = k^{n-1} P_\xi; \quad Q_r = k^{n-1} Q_\xi;$$

$$P_z = k^{n-1} P_\eta; \quad Q_z = k^{n-1} Q_\eta.$$

Подстановка всех этих соотношений в (24) и небольшая перестройка дают следующую систему:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{k^{2-n}}{a^2} \frac{d^2\xi}{dp^2} &= -\frac{P_\xi}{P} \left\{ gk^{-n} - Q(\xi, \eta) - \right. \\ &\left. -\frac{k^{2-n}}{2a^2} \left[\left(\frac{d\xi}{dp} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dp} \right)^2 \right] \right\} - \frac{P}{\xi} - Q_\xi; \\ \frac{k^{2-n}}{a^2} \frac{d^2\eta}{dp^2} &= -\frac{P_\eta}{P} \left\{ gk^{-n} - Q(\xi, \eta) - \frac{k^{2-n}}{2a^2} \times \right. \\ &\left. \times \left[\left(\frac{d\xi}{dp} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dp} \right)^2 \right] \right\} - Q_\eta. \end{aligned} \right. \quad (25)$$

Если положить

$$\frac{k^{2-n}}{a^2} = 1, \quad gk^{-n} = g^*, \quad (26)$$

то система (25) примет тот же вид, что и первоначальная система (24), только в переменных ξ, η, p .

Как и в ситуации 1, мы должны при этом поменять на траектории энергию W на W^* так, чтобы в совокупности изменений полная энергия, претерпев формульное изменение (26), не изменила саму величину. Имеем

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dp^2} &= -\frac{P_\xi}{P} \left\{ g^* - Q(\xi, \eta) - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\xi}{dp} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dp} \right)^2 \right] \right\} - \frac{P}{\xi} - Q_\xi; \\ \frac{d^2\eta}{dp^2} &= -\frac{P_\eta}{P} \left\{ g^* - Q(\xi, \eta) - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\xi}{dp} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dp} \right)^2 \right] \right\} - Q_\eta. \end{aligned} \right.$$

Таким образом, обнаруживается, что полевая структура (21) также допускает принцип подобия и может быть базой для расчета целой серии осесимметричных спектрографов.

• Ситуация 3

Успешность предыдущих рассуждений побуждает нас еще обобщить исследуемые потенциальные структуры, а потому положим:

$$\varphi = P(x, y, z) \ln S(x, y, z) + Q(x, y, z). \quad (27)$$

Это выражение уже трехмерное, и оно обобщает все предыдущие математические конструкции как частные случаи.

Пусть P, Q — однородные по Л. Эйлеру функции кратности n , а S — однородная функция кратности m , причем вещественные m и n могут быть разными, а могут и совпадать. Снова воспользуемся подстановками

$$x = k\xi, \quad y = k\eta, \quad z = k\lambda, \quad \tau = ap. \quad (28)$$

Эти функции подчиняются тождествам

$$\left\{ \begin{aligned} P(k\xi, k\eta, k\lambda) &= k^n P(\xi, \eta, \lambda); \\ Q(k\xi, k\eta, k\lambda) &= k^n Q(\xi, \eta, \lambda); \\ S(k\xi, k\eta, k\lambda) &= k^m S(\xi, \eta, \lambda). \end{aligned} \right.$$

Соответствующие частные производные, которые понадобятся, вычисляются с помощью (28) и имеют следующее представление:

$$\left\{ \begin{aligned} P_x &= k^{n-1} P_\xi & Q_x &= k^{n-1} Q_\xi & S_x &= k^{m-1} S_\xi; \\ P_y &= k^{n-1} P_\eta & Q_y &= k^{n-1} Q_\eta & S_y &= k^{m-1} S_\eta; \\ P_z &= k^{n-1} P_\lambda & Q_z &= k^{n-1} Q_\lambda & S_z &= k^{m-1} S_\lambda. \end{aligned} \right.$$

Дальнейший путь в точности копирует предыдущий и отличается только некоторыми деталями. Снова напишем уравнения движения и интеграл энергии:

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{x} &= -\left(P_x \ln S + \frac{PS_x}{S} + Q_x \right); \\ \ddot{y} &= -\left(P_y \ln S + \frac{PS_y}{S} + Q_y \right); \\ \ddot{z} &= -\left(P_z \ln S + \frac{PS_z}{S} + Q_z \right). \end{aligned} \right. \quad (29)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2} + P \ln S + Q &= g; \\ g &= P(x_0, y_0, z_0) \ln S(x_0, y_0, z_0) + \\ &+ Q(x_0, y_0, z_0) + W. \end{aligned} \right. \quad (30)$$

Исключение из (29) $\ln S(x, y, z)$ с помощью интеграла энергии (30) и последующий переход к переменным (28) дают систему

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{k^{2-n}}{a^2} \frac{d^2\xi}{dp^2} &= -\frac{P_\xi}{P} \times \\ &\times \left\{ k^{-n} g - Q - \frac{k^{2-n}}{2a^2} \left[\left(\frac{d\xi}{dp} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dp} \right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dp} \right)^2 \right] \right\} - \frac{PS_\xi}{S} - Q_\xi; \\ \frac{k^{2-n}}{a^2} \frac{d^2\eta}{dp^2} &= -\frac{P_\eta}{P} \times \\ &\times \left\{ k^{-n} g - Q - \frac{k^{2-n}}{2a^2} \left[\left(\frac{d\xi}{dp} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dp} \right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dp} \right)^2 \right] \right\} - \frac{PS_\eta}{S} - Q_\eta; \\ \frac{k^{2-n}}{a^2} \frac{d^2\lambda}{dp^2} &= -\frac{P_\lambda}{P} \times \\ &\times \left\{ k^{-n} g - Q - \frac{k^{2-n}}{2a^2} \left[\left(\frac{d\xi}{dp} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dp} \right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dp} \right)^2 \right] \right\} - \frac{PS_\lambda}{S} - Q_\lambda. \end{aligned} \right.$$

Остается наложить условия

$$\frac{k^{2-n}}{a^2} = 1, \quad gk^{-n} = g^*, \quad (31)$$

и мы снова вернемся к форме системы (29), только в переменных (28):

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dp^2} &= -\frac{P_\xi}{P} \left\{ g^* - Q - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\xi}{dp} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dp} \right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dp} \right)^2 \right] \right\} - \\ &-\frac{PS_\xi}{S} - Q_\xi; \\ \frac{d^2\eta}{dp^2} &= -\frac{P_\eta}{P} \left\{ g^* - Q - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\xi}{dp} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dp} \right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dp} \right)^2 \right] \right\} - \\ &-\frac{PS_\eta}{S} - Q_\eta; \\ \frac{d^2\lambda}{dp^2} &= -\frac{P_\lambda}{P} \left\{ g^* - Q - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\xi}{dp} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dp} \right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dp} \right)^2 \right] \right\} - \\ &-\frac{PS_\lambda}{S} - Q_\lambda. \end{aligned} \right.$$

Сохранение формы этих уравнений означает, что преобразования (28) при дополнительных условиях (31) не выводят нас за пределы интегрального многообразия первоначальной системы (29), и любая выбранная траектория при подходящем пересчете энергии по тем же рецептам, что и в ситуации 1, порождает семейство взаимно подобных

траекторий. Отсюда один шаг до синтеза трехмерных спектрометров.

Заключение

Приведен эскизный проект подхода к синтезу спектрографов на базе классического и обобщенного принципов подобия для различных потенциальных структур. Исчерпывает ли структура (27) все возможные в этом направлении, и нет ли еще других математических конструкций, допускающих подобие траекторий? Такой уверенности нет, однако пока нет и ясного понимания, как их строить. Во всяком случае построенный класс столь обширен, что в нем можно ставить разнообразные задачи оптимизации спектрографов.

Литература

1. Афанасьев В. П., Явор С. Я. // Письма в ЖТФ. 1975. Т. 1. № 17. С. 779.
2. Siegbahn K. et al. // NIM A. 1997. V. 384. P. 563.
3. Konji I. et al. // Sur. Sci. 2003. V. 528. P. 261.
4. Read F. H. et al. // Rev. of sci. instr. 2002. V. 73. № 3. P. 1129.
5. Golikov Yu. K., Krasnova N. K. // NIM A. 1999. V. 427. P. 2093.
6. Кельман В. М., Явор С. Я. Электронная оптика. — М.: Наука, 1968.
7. Jacka M. et al. // Abstracts of the CPO-5. 1998. The Netherlands. P. 145.
8. Голиков Ю. К., Григорьев Д. В., Соловьев К. В., Уткин К. Г. // Тез. докл. IV Всерос. семинара "Проблемы теоретической и прикладной электронной оптики". — М., 1999.

Статья поступила в редакцию 22 декабря 2005 г.

Generalized principle of similarity in electron spectrography

Yu. K. Golikov, N. K. Krasnova

St.-Petersburg State Polytechnic University, St.-Petersburg, Russia

In the article the generalized conceptual approach to design a spectrograph for electron spectroscopy is set forth. The suggested method is based on using special principles of similarity of the classical mechanics and their generalizations. The new classes of electrostatic Laplace's potentials to design a spectrograph scheme of scanning energy spectra are defined. It is proved the generalized principles of similarity and considered an abstract outline to build up a spectrograph. Some potential structures are given as an example to use.