Электронные и ионные пучки

УДК 537.533

Решение параксиального уравнения огибающей электронного пучка в рассеивающей среде и внешнем магнитном поле

Р. Н. Ризаханов
ФГУП "Исследовательский центр им. М. В. Келдыша", Москва, Россия

Получено аналитическое решение параксиального уравнения огибающей электронного пучка (уравнения Ли-Купера) в магнитном поле с учетом рассеивающе-диссипационных сил со стороны частиц газа. Введен критерий фокусировки, определяющий закономерности увеличения поперечных размеров пучка по мере распространения в газовой среде. Проанализированы частные случаи транспортировки.

• В ряде вневакуумных технологических применений интенсивного электронного пучка (резка, сварка, сверление, поверхностная закалка) наибольший интерес представляет начальный участок его распространения в газовой среде. Здесь пучок представляет собой практически мононаправленный поток частиц, характеризующийся током, энергией и диаметром. Эволюция поперечного сечения пучка может быть описана, например, параксиальным уравнением огибающей [1]

$$\frac{d^2r}{dx^2}+\frac{1}{\gamma\beta^2}\frac{d\gamma}{dx}\frac{dr}{dx}+\frac{k^2}{4\beta^2\gamma^2}r-\frac{E^2}{\beta^2\gamma^2r^3}=0, \qquad (1)$$

где r — радиус пучка;
β, γ — релятивистские факторы, $\beta = v/c$, $\gamma=(1-\beta^2)^{-1/2}$;
v, c — скорость электрона и света, соответственно;
k — параметр фокусировки;
E — эмиттанс пучка.

Уравнение учитывает диссипацию энергии электронов (второй член), влияние магнитного поля (третий член). Наличие рассеяния учтено через увеличение эмиттанса. Пучок полагается нейтрализованным по заряду и току.

На уравнение (1) накладываются начальные условия

$$r(x=0)=r_0, \quad r'(x=0)=0, \qquad (2)$$

где $r' = dr/dx$.

Диссипация энергии имеет вид

$$\frac{d\gamma}{dx}=-\frac{1}{G\beta^2}, \quad G=\frac{(4\pi\varepsilon_0)^2m_0^2c^4}{2\pi Ne^4Z\ln\Lambda}, \qquad (3)$$

где G — слабоменяющаяся величина размерности длины;
N и Z — концентрация и заряд ядра рассеивающих атомов, соответственно;
e и m_0 — заряд и масса покоя электронов, соответственно;
ε_0 — диэлектрическая постоянная;
$\ln\Lambda$ — величина, слабо зависящая от энергии, для воздуха $\ln\Lambda \approx 15$ [2].

Фокусирующее воздействие внешнего осесимметричного магнитного поля с осевой индукцией B задается параметром k

$$k = eB/m_0c.$$

В дальнейшем положим $k = \text{const}$.

Распространение пучка в газе сопровождается ростом эмиттанса по закону [1, 3]

$$E^2=E_0^2+\int_0^x\beta^2\gamma^2r^2\frac{\partial\langle\Theta^2\rangle}{\partial z}dz, \qquad (4)$$

где $E_0^2=\beta_0^2\gamma_0^2r_0^2\langle\Theta_0^2\rangle$ — эмиттанс в исходном сечении;
$\langle\Theta^2\rangle$ — среднеквадратичный угловой разброс.

Согласно [4] в приближении теории многократного рассеяния изменение среднеквадратичного углового разброса на единицу длины можно записать как

$$\frac{\partial\langle\Theta^2\rangle}{\partial z}=\frac{1}{D\gamma^2\beta^4}, \quad D=\frac{(4\pi\varepsilon_0)^2m_0^2c^4}{8\pi NZ(Z+1)e^4\ln\Lambda}, \qquad (5)$$

где D — слабо изменяющаяся величина размерности длины; для воздуха $\ln\Lambda \approx 4$.

Справедливо

$$G\approx D(Z+1). \qquad (6)$$

• Прежде чем приступить к решению (1), целесообразно оценить расстояние S, в пределах которого пучок можно полагать параксиальным. Для этого в соответствии с [5] должны соблюдаться два условия: $(r')^2 = 1$ и r — заметно меньше характерных неоднородностей в распределении магнитных полей или концентраций рассеивающих частиц. Как правило, в технологических пучках последнее условие выполняется, а первое трансформируем в требование

$$\langle\Theta_{cr}^2\rangle = 0,2, \qquad (7)$$

имея в виду, что угол наклона электрона к оси характеризуется именно среднеквадратичным угловым разбросом, а не наклоном огибающей пучка.

Интегрируя (3), можно оценить длину пробега электронов в газе

$$L = G(\gamma_0 - 1)^2 / \gamma_0,$$

где γ_0 – значение γ в исходном сечении ($x = 0$).

Пренебрегая изменением релятивистских факторов на начальном участке $0 \le x \le S$ из (5) и (7) имеем

$$S = \langle\Theta_{cr}^2\rangle D\gamma_0^2\beta_0^4 = \frac{0,2G}{Z+1}\frac{(\gamma_0^2-1)^2}{\gamma_0^2}.$$

Тогда

$$S / L = \frac{0,2}{Z+1}\frac{(\gamma_0+1)^2}{\gamma_0}.$$

В частности, для воздуха при давлении 10^5 Па ($Z \approx 7$, $N \approx 5{,}36\cdot10^{25}$ м$^{-3}$ с учетом двухатомности молекул, G = 3,6 м) и $\gamma_0 = 1{,}6$ (начальная энергия электронов $3\cdot10^5$ эВ) имеем L = 0,8 м и $S \approx 0{,}1\cdot L = 0{,}08$ м. Однако на практике локальный разогрев газа вдоль тракта мощного технологического пучка может снизить концентрацию атомов в несколько раз. Во столько же раз увеличивается длина, на которой можно пользоваться параксиальным приближением.

- Для решения выражения (1) введем обозначения

$$y = r^2, \quad h = \beta^2\gamma^2. \qquad (8)$$

Тогда (1) примет вид

$$\frac{h}{4}(2yy'' - y'^2) + \frac{h'}{4}yy' + \frac{k^2}{4}y^2 = E_0^2 + \int_0^x \frac{y}{D\beta^2}dz,$$

где $h' = 2\gamma\gamma'$.

Продифференцируем данное выражение по x, сократим на y и затем проинтегрируем. Учитывая (3), а также начальные условия, вытекающие из (1), (2) и (8),

$$y(x=0) = y_0 = r_0^2; \quad y'(x=0) = 0;$$
$$y''(x=0) = \frac{2}{h_0}\left(\frac{E_0^2}{y_0} - \frac{k^2}{4}y_0\right), \qquad (9)$$

имеем

$$\frac{h}{2}y'' + \frac{h'}{4}y' + \frac{k^2}{2}y = (Z+1)(\gamma_0 - \gamma) + \frac{E_0^2}{y_0} + \frac{k^2}{4}y_0. \qquad (10)$$

Таким образом, вместо исходного нелинейного интегродифференциального уравнения второго порядка (1), (4) имеем линейное уравнение того же порядка (10). Оно может быть решено после определения зависимостей $\gamma = \gamma(x)$, $h = h(x)$, например, с помощью соотношения

$$\gamma + \frac{1}{\gamma} = \gamma_0 + \frac{1}{\gamma_0} - \frac{x}{G}, \qquad (11)$$

следующего из (3). Однако в рамках рассматриваемой модели возможна замена уравнения (10) на приблизительное, но допускающее аналитическое решение. Действительно, из (11) можно получить следующие выражения:

$$\gamma = \gamma_0 - \frac{x}{G\beta_0^2} - \frac{x^2}{G^2\beta_0^6\gamma_0^3} - \frac{(\gamma_0^2+1)x^3}{G^3\beta_0^{10}\gamma_0^6},$$
$$\gamma' = -\frac{1}{G\beta_0^2}\left(1 + \frac{2x}{G\beta_0^4\gamma_0^3} + \frac{3x^2(\gamma_0^2+1)}{G^2\beta_0^8\gamma_0^6}\right).$$

В точке с координатой $x = S$ первые три члена в разложении γ относятся как 1:0,0675:0,00056, а в разложении γ' — как 1:0,02:0,002 (при $\gamma_0 = 3$ и $Z = 7$, азот). Это означает, что коэффициенты при $y^{(n)}$, $n = 0, 1, 2$, в (10) могут быть представлены как

$$h = h_0\left(1 - \frac{2x}{G\beta_0^4\gamma_0}\right); \quad h' = h_0'\left(1 + \frac{3-\gamma_0^2}{G\beta_0^4\gamma_0^3}x\right).$$

Тогда уравнение (10) преобразуется к виду

$$\frac{h_0}{2}\left(1 - \frac{2x}{G\beta_0^4\gamma_0}\right)y'' + \frac{h_0'}{4}\left(1 + \frac{3-\gamma_0^2}{G\beta_0^4\gamma_0^3}x\right)y' + \frac{k^2}{2}y =$$
$$= \frac{Z+1}{G\beta_0^2}x + \frac{E_0^2}{y_0} + \frac{k^2}{4}y_0. \qquad (12)$$

Уравнение (12) может быть решено точно через ряды Куммера [6]. Однако более наглядным в данном случае является метод последовательных приближений. На первом этапе решается уравнение

$$\frac{h_0}{2}\tilde{y}'' + \frac{h_0'}{4}\tilde{y}' + \frac{k^2}{2}\tilde{y} = \tilde{f}, \qquad (13)$$
$$\tilde{f} = \frac{Z+1}{G\beta_0^2}x + \frac{E_0^2}{y_0} + \frac{k^2}{4}y_0,$$

в котором не учтены малые поправки, пропорциональные x, в левой части уравнения (12).

Если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — фундаментальная система решений однородного уравнения (13), то общее решение имеет вид

$$\tilde{y} = \frac{2\varphi_1}{h_0}\int\frac{\varphi_2\tilde{f}}{w}dx - \frac{2\varphi_2}{h_0}\int\frac{\varphi_1\tilde{f}}{w}dx + c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2, \quad (14)$$

где $w = \varphi_2\varphi_1' - \varphi_1\varphi_2'$ — детерминант Вронского;

c_1, c_2 — константы интегрирования, определяемые начальными условиями.

Теперь решение уравнения (12) можно искать в виде

$$y = \tilde{y} + g, \tag{15}$$

где g — поправка к приблизительному решению (14), обращающаяся в нуль при $x = 0$.

Подставим y в (12) и, полагая $g = \tilde{y}$, $g' = \tilde{y}'$, $g'' = \tilde{y}''$, сохраним члены одного порядка:

$$\frac{h_0}{2}g'' + \frac{h_0'}{4}g' + \frac{k^2}{2}g = f; \tag{16}$$

$$f = \left(\frac{h_0}{G\beta_0^4\gamma_0}\tilde{y}'' - \frac{h_0'(3-\gamma_0^2)}{4G\beta_0^4\gamma_0^3}\tilde{y}'\right)x \tag{17}$$

с начальными условиями

$$g(x=0) = g'(x=0) = 0. \tag{18}$$

Так как однородные части (13) и (16) совпадают, то общее решение (16) имеет вид:

$$g = \frac{2\varphi_1}{h_0}\int\frac{\varphi_2 f}{w}dx - \frac{2\varphi_2}{h_0}\int\frac{\varphi_1 f}{w}dx + c_3\varphi_1 + c_4\varphi_2, \tag{19}$$

а решение (12) задается в виде суммы (15).

- В качестве примера рассмотрим решение в отсутствие магнитного поля ($k = 0$). Тогда фундаментальная система решений (13) есть

$$\varphi_1 = \exp(-h_0'x/2h_0); \quad \varphi_2 = c;$$
$$w = -\frac{ch_0'}{2h_0}\exp(-h_0'x/2h_0),$$

и с учетом (9)

$$\tilde{y} = y_0 + \left[\frac{8h_0E_0^2}{y_0h_0'^2} - \frac{16h_0^2(Z+1)}{G\beta_0^2h_0'^3}\right]\left[\exp\left(-\frac{h_0'}{2h_0}x\right) - 1\right] +$$
$$+\left[\frac{4E_0^2}{y_0h_0'} - \frac{8h_0(Z+1)}{G\beta_0^2h_0'^2}\right]x + \frac{2(Z+1)}{G\beta_0^2h_0'}x^2.$$

При $x \le S$ экспоненциальную функцию можно разложить в ряд, тогда

$$\tilde{y} = y_0 + \frac{E_0^2}{h_0y_0}x^2 + \left(\frac{1}{3}\frac{Z+1}{G\beta_0^2h_0} - \frac{1}{6}\frac{E_0^2}{y_0}\frac{h_0'}{h_0^2}\right)x^3. \tag{20}$$

Полученный результат находится в соответствии с решением из работы [7].

Расчет поправки g согласно (15)—(19) дает

$$g = \frac{2}{3}\frac{E_0^2x^3}{y_0G\beta_0^6\gamma_0^3} + \frac{1}{3}\frac{Z+1}{G^2\beta_0^8\gamma_0^3}x^4.$$

Непосредственный анализ показывает, что на рассматриваемом участке g не превышает $\tilde{y}/10$, что оправдывает подход последовательных приближений.

- При наличии достаточного магнитного поля $(k > h_0'^2/16h_0)$ система фундаментальных решений принимает вид

$$\varphi_1 = \sin(kx/\sqrt{h_0})\exp(-h_0'x/4h_0),$$
$$\varphi_2 = \cos(kx/\sqrt{h_0})\exp(-h_0'x/4h_0),$$
$$w = (k/\sqrt{h_0})\exp(-h_0'x/2h_0).$$

После ряда преобразований

$$\tilde{y} = \frac{y_0}{2} + \frac{2E_0^2}{k^2y_0} + \frac{2(Z+1)}{G\beta_0^2}\frac{x}{k^2} +$$
$$+\left[\frac{h_0'}{4k\sqrt{h_0}}\left(\frac{y_0}{2} - \frac{2E_0^2}{k^2y_0}\right) - \frac{2\sqrt{h_0}}{k^3}\frac{Z+1}{G\beta_0^2}\right]\varphi_1 +$$
$$+\left(\frac{y_0}{2} - \frac{2E_0^2}{k^2y_0}\right)\varphi_2.$$

Если поле достаточно сильное $(k \gg h_0'^2/16h_0)$, решение упрощается

$$\tilde{y} = y_0\cos^2\left(\frac{kx}{2\sqrt{h_0}}\right) + \frac{2(Z+1)}{G\beta_0^2}\frac{x}{k^2}. \tag{21}$$

Сравнение решений (20) и (21) наглядно демонстрирует целесообразность наложения сопровождающих магнитных полей при транспортировке пучка в плотном газе, если в технологическом процессе пучок используется как концентрированный поток энергии. В присутствии поля увеличение площади поперечного сечения пучка (и его эмиттанса) происходит немного медленнее.

Заключение

Отметим, что проведенный анализ позволяет ввести критерий влияния магнитного поля на транспортировку пучка в рассеивающей среде в виде

$$i = \frac{16hk}{h'}.$$

Равенство $i = 1$ соответствует изменению вида системы фундаментальных решений уравнения (10). Если $i < 1$, имеет место расширение по экспоненциальному закону, в то время как при $i > 1$ появляются синусоидальные сомножители, играющие заметную роль на начальном участке транспортировки.

Следует также отметить, что конкуренцию фокусировке в (22) формально составляет диссипация энергии, а не рассеяние, как следовало ожидать. Однако практическая идентичность последних эффектов (выражения (3), (5) и (6)) подтверждает, что на самом деле именно рассеяние играет основную роль в увеличении диаметра пучка.

Литература

1. *Lee E. P., Cooper R. K.*// Particle Accelerators. 1976. № 7. P. 83.
2. *Кольчужкин А. М., Учайкин В. В.* Введение в теорию прохождения частиц через вещество. — М.: Атомиздат, 1978.
3. *Lee E. P.*// Physics of Fluids. 1976. V. 19. P. 60.
4. *Мотт Н., Месси Г.* Теория атомных столкновений. — М.: Мир, 1969.
5. *Кирштейн П. Т., Кайно Г. С., Уотерс У. Е.* Формирование электронных пучков. — М.: Мир, 1981.
6. *Зайцев В. Ф., Полянин А. Ф.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Физматлит, 2001.
7. *Власов М. А., Дубас Л. Г., Жаринов А. В.*// Физика и химия обработки материалов. 1977. V. 2. С. 21.

Статья поступила в редакцию 14 августа 2006 г.

Analytical solution of electron beam envelope equation in paraxial approximation taking into account scattering medium and external magnetic field

R. N. Rizakhanov
Keldish Research Center, Moscow, Russia

Analytical solution of electron beam envelope equation in paraxial approximation (Lee-Cooper's equation) under external magnetic field and scattering-dissipative forces from gas particles is considered. Focusing criterion that governs beam cross dimension extension during its transportation through gas medium is presented. Particular cases of transportation are analyzed.

УДК 537.533.35.7:519.245

Вычисления распределений по глубине энергии и заряда выделенных при облучении мишени электронным пучком в приближении дискретных потерь

С. С. Борисов, Е. А. Грачев
МГУ им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Москва, Россия

С. И. Зайцев
Институт проблем технологий микроэлектроники РАН, г. Черноголовка Московской обл., Россия

Рассмотрена проблема моделирования распределения выделенных в процессе облучения образца электронным пучком энергии (дозы облучения) и заряда. Сравниваются результаты, полученные методом Монте-Карло в приближении дискретных и непрерывных потерь. Получены аналитические выражения для распределений глубина—доза и глубина—заряд для Si, Au, Ag, Cu, GaN.

Существуют два подхода к моделированию рассеяния электронов в твердых телах: приближения дискретных (ПДП) и непрерывных (ПНП) потерь. Приближение, в котором все существенные в предлагаемом диапазоне энергии сечения рассеяния (упругое взаимодействие с атомными ядрами, ионизация внешних и внутренних атомных оболочек, генерация Оже-электронов, плазмонов) рассматриваются по отдельности, можно назвать приближением дискретных потерь в отличие от приближения непрерывных потерь, в котором потери энергии вычисляются исходя из непрерывного характера потерь, рассчитываемого обычно по формуле Бете. Фактически используемый для моделирования метод Монте-Карло в ПДП является имитационным для задачи рассеяния электронов в твердых гетерогенных средах. Более подробно используемая при расчетах модель описана в [1, 2].