

сосных ходов поршня, но и определяется важнейшая характеристика газообмена — зависимость коэффициента остаточных газов от коэффициента избытка продувочного воздуха.

Решение данной задачи позволяет повысить точность инженерных расчетов при проектировании двигателей внутреннего сгорания и агрегатов наддува, а также может быть использовано при разработке бортовых систем оптимального управления транспортными двигателями.

Совокупное использование упомянутых выше технических решений и математической модели газообмена позволит реально прогнозировать повышение топ-

ливной экономичности двигателей и снижение эмиссии выпускных газов в эксплуатации.

Л и т е р а т у р а

1. Орлов Б. В., Мазинг Г. Ю. Термодинамические и баллистические основы проектирования ракетных двигателей на твердом топливе. — М.: Машиностроение, 1964. — 408 с.

2. Тепловозные двигатели внутреннего сгорания: Учеб. для вузов/ А. Э. Симсон, А. З. Хомич, А. А. Куриц и др. 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Транспорт, 1987. — 536 с.

3. Пржиалковский А. Л., Щучинский С. Х. Электромагнитные клапаны. — Л.: Машиностроение, 1967. — 248 с.

4. Вуклович М. П., Новиков И. И. Техническая термодинамика. — М.: Энергия, 1968. — 496 с.

Статья поступила в редакцию 21 марта 2006 г.

Mathematical modeling of gas distribution processes in an internal combustion engine

S. P. Kalugin, V. N. Balabin

Moscow State University of Communication, Moscow, Russia

In article pressing questions of calculation of processes of gas exchange in cylinders of internal combustion transport engines with traditional type of a mechanical valve drive both alternative electrohydraulic and electromagnetic drive are considered. The detailed mathematical models, which are taking into account all essential thermodynamic and electromechanical phenomena, occurring at, are made. Process of gas exchange is considered as a gas flow in the system of several tanks connected by pipelines. The joint solution of the equations of energy, mass and heat transfer and the equation of mixing gives sought-for temperatures and masses, and also proportions of a gas mix in the cylinder. It allows to find energy expenses for a valve drive, and also to calculate more precisely factor of filling and the engine power. Thus, the main characteristic of scavenge – dependence of factor of residual gases on factor of scavenging air excess is defined. Although, the system of non-linear differential equations has a 6-th order, and in case of electromagnetic drive it has 12-th order. This special feature leads to problem of numerical stability. The solution of the given problem allows to raise accuracy of engineering calculations at designing engines of internal combustion and units of supercharging, and also can be used by development of vehicle-borne systems of transport engines optimum control. Cumulative use of the mentioned above technical decisions and mathematical model of gas exchange really will allow to predict increase of fuel profitability of engines and decrease of issue of exhaust gases in operation.

УДК 539.186.2

Тормозное излучение заряженных частиц, проходящих через слой рассеивающих центров в однородном электрическом поле

В. И. Крылов

Тихоокеанский государственный университет, г. Хабаровск, Россия

Рассмотрено тормозное излучение быстрых нерелятивистских электронов, проходящих через двухмерную кристаллическую структуру, находящуюся в однородном электрическом поле. Показано, что в дифференциальное сечение могут давать заметный вклад фотоны, возникшие в результате движения электронов в однородном электрическом поле, которое значительно слабее атомного. При определенных условиях найденные сечения

имеют заметную осцилляционную структуру, что связано с чисто квантовым эффектом — интерференции движения электронов в однородном поле и Кулоновом поле рассеивающих центров.

В работах [1—3] было показано, что при столкновении заряженных частиц друг с другом в однородном электрическом поле, даже слабом по сравнению с атомным, дифференциальное сечение тормозного излучения, найденное в дипольном приближении, может заметно отличаться от сечения, определенного для случая, когда такое поле отсутствует. Причина такого изменения связана с перераспределением (по сравнению со столкновением на изолированном рассеивающем центре) средней плотности заряда рассеянных частиц при их отражении от потенциального барьера внешнего однородного поля.

Однако в этих работах предполагалось, что при внешнем поле, значительно слабее атомного, основной вклад в сечение рассматриваемого процесса дают фотоны, возникающие при Кулоновом взаимодействии частиц. Вкладом же непосредственно в излучение фотона движения частицы в однородном поле пренебрегалось. Его роль заключалась только в изменении пространственного распределения среднего электрического заряда рассеивающихся частиц, как уже было отмечено, при их отражении от потенциального барьера внешнего поля. Математически это выражалось в том, что матричный элемент градиента $(\nabla U)_{fi}$ потенциальной энергии U взаимодействия рассеивающихся друг на друге частиц, входящий в сечение дипольного излучения фотона (в борновском приближении),

$$(\nabla U)_{fi} = \int \int_{-\infty}^{\infty} \int \Psi_f^*(z) \Psi_i(z) \nabla U d^3r, \quad (1)$$

вычислялся по волновым функциям $\Psi_{i,f}$ начального и конечного состояний излучающей системы не в виде плоских (де-бройлевских) волн (как это делается в задаче без однородного поля), а искаженных из-за движения частиц во внешнем однородном поле. Однако, если быть до конца последовательными, то эти функции (вместе с поправками, определяемыми взаимодействием частиц), вообще говоря, нужно было подставлять в матричный элемент оператора перехода системы (в результате которого рождается тормозной фотон), который отличается от (1) и, как известно [4], в нерелятивистском приближении содержит оператор импульса, действующий на волновую функцию рассеивающихся частиц в их начальном состоянии.

В настоящей работе именно такой оператор и использовался при определении (в нерелятивистском приближении) сечения тормозного излучения частиц, возникающего при их столкновении с рассеивающими центрами, находящимися во внешнем однородном стационарном электрическом поле.

Очевидно, что при таком вычислении сечений будет учтен вклад в излучение фотонов движения частиц, вызванное как однородным полем, так и полем рассеивающих центров.

Постановка задачи

Пусть однородное электрическое поле с напряженностью $\vec{\varepsilon}$ (нормальной к его границе) находится в полупространстве с z -координатами точек, удовлетворяющих неравенству $z > -L_1$, где L_1 — расстояние от рассеивающего центра до границы внешнего поля, из-за которой поток электронов падает на такие центры. Ось z Декартовой системы координат $x y z$ считаем направленной антипараллельно напряженности $\vec{\varepsilon}$ однородного поля: $\vec{\varepsilon} = (0, 0, -\varepsilon)$. Взаимодействие проходящих через слой частиц с рассеивающими центрами рассматриваем как возмущение. Тогда, учитывая, что ускоряемые однородным полем электроны создают поток с ненулевой продольной (вдоль $\vec{\varepsilon}$) составляющей его плотности, волновые функции нулевого приближения при $z > -L_1$ выбираем в виде

$$\Psi_{\vec{k}_{i,f}} = \frac{A_{i,f}}{\sqrt{L_x L_y S_{i,f}^{1/4}}} \exp \left[i \left(\frac{2\chi_{zi,f}}{3|\chi_{zi,f}|} S_{i,f}^{3/2} + \vec{k}_{i,f} \perp \vec{r} \right) \right], \quad (2)$$

где $\vec{\chi}_{i,f} = (\vec{k}_{i,f} \perp, \chi_{zi,f})$ — волновой вектор, определяющий импульс невозмущенного движения частиц на границе поля; индексы i и f — начальное и конечное состояния падающих на рассеивающий центр частиц;

$$S_{i,f} = \frac{z}{l_e} + \frac{E_{zi,f}}{|\varepsilon| l_e}; \quad l_e = (\hbar^2 / 2m_e |\varepsilon|)^{1/3};$$

e, m_e — заряд и масса электрона, соответственно;

A_f — нормировочная постоянная, выбираемая из условия нормировки Ψ_f на нормировочную длину $L_1 + L_2$ вдоль оси z ;

A_i — нормировочная постоянная, через которую определяется плотность потока падающих электронов;

L_x и L_y — длины сторон нормировочного прямоугольника вдоль x и y ;

E_{zf}, E_{zi} — энергии продольного (невозмущенного) движения электрона в однородном поле в конечном и начальном состояниях, соответственно;

$\vec{k}_{f\perp}$ и $\vec{k}_{i\perp}$ — волновые векторы, определяющие поперечный (относительно $\vec{\varepsilon}$) импульс электронов конечного и начального состояний, соответственно.

Функции $S^{-1/4} \exp[i(2/3)S^{3/2}]$, входящие в (2), являются асимптотами функций Эйри в классически разрешенной области движения частицы, когда S_f и $S_i \gg 1$, т. е. при $z > -L_1$, если E_{zf} и $E_{zi} > |\varepsilon| L_1$. Физически это означает, что такие частицы не отражаются от

потенциального барьера внешнего поля. Тем самым в настоящей работе мы исключаем из рассмотрения рождение фотонов, происходящих при переходах рассеянных частиц в состояния, в которых они отражаются от потенциального барьера однородного поля.

Ниже будет показано, что вклад в сечение или интенсивность тормозного излучения движения частицы в однородном электрическом поле, находящемся в макроскопической области пространства, значительно больше (примерно в $L_x L_y / a^2$ раз), чем вклад ее движения в окрестности одного рассеивающего центра, даже если $\bar{\epsilon}$ значительно меньше характерного значения напряженности электрического поля атома — $Z |e| / a^2$ [где

$a = \hbar^2 / (Ze^2 m_e)$ — Кулонова единица длины; $Z |e|$ — заряд иона]. Поэтому в такой задаче необходимо рассматривать столкновения заряженных частиц не с одним рассеивающим центром, а с макроскопическим числом таких рассеивающих центров. Будем считать, что эти центры расположены в одной плоскости xu , на которой потенциал внешнего поля равен нулю. В этом случае потенциальная энергия падающего на рассеивающие центры электрона в однородном электрическом поле при $z > -L_1$ равна $-|e|\epsilon z$, и их волновые функции по-прежнему определяются выражением (2).

В соответствии с общей формулой Борна [5] вероятность излучения фотона

$$dW = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{Ffi}|^2 \delta(E_f - E_i) dv, \quad (3)$$

где

$$V_{Ffi} = \iiint \Psi_{fp}^* \hat{V}_F \Psi_{ip} d^3 \vec{r}$$

есть матричный элемент перехода излучаемой системы из начального состояния с энергией E_i и точной волновой функцией Ψ_{ip} в конечное состояние с энергией E_f и точной волновой функцией Ψ_{fp} , в результате чего рождается фотон с волновым вектором \vec{k}_F и вектором поляризации \vec{e}_F [4, 6];

$$\hat{V}_F = -\frac{e}{m_e c} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{k_F V}} \vec{e}_F^* e^{-i\vec{k}_F \vec{r}} \vec{p} \quad (4)$$

c — скорость света;

V — нормировочный объем;

dv — интервал состояний, в который переходит система при излучении тормозного фотона, отнесенный к объему элемента \vec{k}_F -пространства: $d^3 \vec{k}_F$, к интервалу энергии $(E_{z_f}, E_{z_f} + dE_{z_f})$ продольного движения электрона и интервалам волнового вектора $((k_{fx}, k_{fx} + dk_{fx}), (k_{fy}, k_{fy} + dk_{fy}))$, определяющего его поперечное движение [2]

$$dv = \frac{L_x L_y V}{8\pi^3} \frac{d^3 \vec{k}_F d^2 \vec{k}_{\perp f} dE_{z_f}}{16\pi^3 \epsilon_e \epsilon l_e^2 |A_f|^2}. \quad (5)$$

Представляя волновую функцию в виде $\Psi_{pi, f} = \Psi_{i, f} + \Psi_{i, f}^{(1)}$ и рассматривая потенциальную энергию взаимодействия U рассеивающего центра с падающей на него частицей как возмущение, после достаточно простых, но громоздких вычислений получим следующее выражение для V_{Ffi} в первом порядке теории возмущений по U :

$$\begin{aligned} V_{Ffi} = & -\frac{e}{m_e c} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{k_F V}} \left\{ \vec{e}_F^* \iiint \Psi_f^* e^{-i\vec{k}_F \vec{r}} \hat{p} \Psi_i d^3 \vec{r} + \right. \\ & + \frac{1}{\Delta E_{if}} \iiint \Psi_f^* \Psi_i e^{-i\vec{k}_F \vec{r}} \vec{e}_F^* \hat{p} U d^3 \vec{r} + \\ & + \frac{\hbar^3}{m_e \Delta E_{if} \Delta E_{i, fF}} \left[(\vec{e}_F^* \vec{k}_f)(\vec{k}_f \vec{k}_F + k_F^2) - \right. \\ & \left. - (\vec{e}_F^* \vec{k}_i)(\vec{k}_i \vec{k}_F - k_F^2) \right] \iiint \Psi_f^* e^{-i\vec{k}_F \vec{r}} U \Psi_i d^3 \vec{r} \left. \right\}, \quad (6) \end{aligned}$$

где $\Delta E_{i, fF} = \frac{\hbar^2}{2m_e} [k_i^2 - (\vec{k}_f + \vec{k}_F)^2]$, $\Delta E_{f, iF} = \frac{\hbar^2}{2m_e} \times [k_f^2 - (\vec{k}_i - \vec{k}_F)^2]$, $\Delta E_{if} = E_i - E_f$.

При выводе соотношения (6) мы пренебрегли величинами k_F^2 по сравнению с k_i^2 и k_f^2 , введенными нами локальными волновыми векторами $\vec{k}_f = (\vec{k}_{f\perp}, \vec{k}_{zf})$, $\vec{k}_i = (\vec{k}_{i\perp}, \vec{k}_{zi})$ ($k_{zi, f} = \sqrt{2mE_{zi, f}} / \hbar$) в окрестности точек с $z = 0$, в которых находятся неподвижные рассеивающие центры. Если функция Ψ_f конечного состояния будет отличаться от (2) и описывать движение отраженных от потенциального барьера рассеянных частиц, то вид третьего слагаемого в правой части следующего уравнения, по-видимому, существенно изменится.

Сравнивая второе и третье слагаемые в правой части (6) можно установить, что последнее необходимо сохранить, если вычисления проводить с точностью до величин порядка v/c включительно, где $v = \hbar k_i / m_e$ — скорость частицы в начальном состоянии.

Ограничиваясь нулевым порядком малости по v/c , получим

$$\begin{aligned} V_{Ffi} = & -\frac{e}{m_e c} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{k_F V}} \left\{ \vec{e}_F^* \iiint \Psi_f^* e^{-i\vec{k}_F \vec{r}} \hat{p} \Psi_i d^3 \vec{r} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\Delta E_{if}} \iiint \Psi_f^* \Psi_i e^{-i\vec{k}_F \vec{r}} \vec{e}_F^* \hat{p} U d^3 \vec{r} \right\}. \quad (7) \end{aligned}$$

При подстановке в (7) волновых функций, соответствующих свободному движению частицы с импульса-

ми \vec{p}_f, \vec{p}_i в конечном и начальном состояниях, первый интеграл будет пропорционален $\delta(\vec{p}_f + \hbar\vec{k}_F - \vec{p}_i)$ и не даст вклад в сечение (3), содержащее $\delta(E_f - E_i)$, так как одновременно законы сохранения энергии и импульса для свободной частицы, излучающей фотон, выполняться не могут. В этом случае сечение определяется только вторым интегралом и будет совпадать при $\vec{k}_F = 0$ с выражением, полученным, по-видимому, несколько иным путем в [4].

В рассматриваемом здесь случае $\vec{\varepsilon} \neq 0$, и выбранные волновые функции (2) нулевого приближения, подставленные в первый интеграл (7), дадут только двухмерную $\square\delta$ -функцию, и этот интеграл уже будет давать вклад в сечение, что физически, очевидно, соответствует излучению ускоренно двигающейся частицы.

Используя выражения (2), (4), (5), (7) и поделив (3) на плотность тока, определяемую формулой

$$j = \frac{\hbar |A_i|^2}{L_x L_y m_e |e| \chi_z},$$

представим выражение для дифференциального сечения $d\sigma = dW / j$ в виде суммы

$$d\sigma = d\sigma_1 + d\sigma_2, \quad (8)$$

где

$$d\sigma_1 = \frac{e^2 |e|^2 \chi_z}{4\pi^2 \hbar^3 \chi \omega} \left\{ L_x L_y (\vec{\varepsilon}_{k_F}^* \vec{\xi}) (\vec{\varepsilon}_{k_F} \vec{\xi}^*) + \frac{i}{\omega} \left[(\vec{\varepsilon}_{k_F} (\nabla U)_{fi}^*) \times (\vec{\varepsilon}_{k_F}^* \vec{\xi}) - (\vec{\varepsilon}_{k_F}^* (\nabla U)_{fi}) (\vec{\varepsilon}_{k_F} \vec{\xi}^*) \right] \right\} \delta(\vec{k}_{f\perp} + \vec{k}_{F\perp} - \vec{k}_{i\perp}) \times \delta \left(E_{z_f} + \frac{\hbar^2 k_{f\perp}^2}{2m_e} + \hbar\omega - E_{z_i} - \frac{\hbar^2 k_{i\perp}^2}{2m_e} \right) d^3 k_F d^2 k_{f\perp} dE_{z_f};$$

$$d\sigma_2 = \frac{e^2 |e|^2 \chi_z}{16\pi^4 \hbar^3 \chi \omega^3} (\vec{\varepsilon}_{k_F}^* (\nabla U)_{fi}) (\vec{\varepsilon}_{k_F} (\nabla U)_{fi}^*) \times \delta \left(E_{z_f} + \frac{\hbar^2 k_{f\perp}^2}{2m_e} + \hbar\omega - E_{z_i} - \frac{\hbar^2 k_{i\perp}^2}{2m_e} \right) d^3 k_F d^2 k_{f\perp} dE_{z_f};$$

$$\vec{\xi} = \left(\hbar \vec{k}_{i\perp} \int_{-\infty}^{\infty} F_{z_f}^*(z) e^{-ik_{Fz} z} F_{z_i}(z) dz, \int_{-\infty}^{\infty} F_{z_f}^*(z) e^{-ik_{Fz} z} \hat{p}_z F_{z_i}(z) dz \right);$$

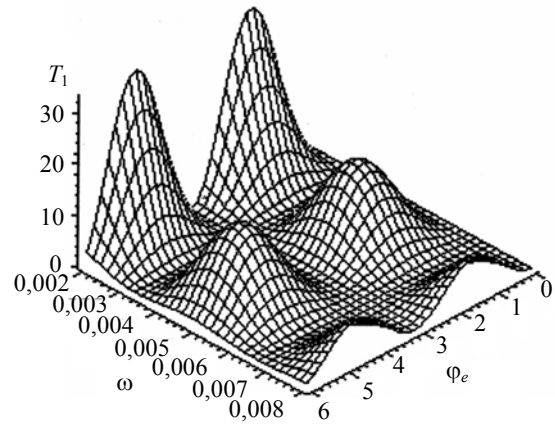
$$(\nabla U)_{fi} = \int \int \int e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r} - i\vec{k}_F \cdot \vec{r}} F_{z_f}^*(z) e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} F_{z_i}(z) \nabla U d^3 \vec{r}; \quad (9)$$

$$F_{z_i, f} = S_{i, f}^{-1/4} \exp(i \frac{2}{3} S_{i, f}^{3/2}),$$

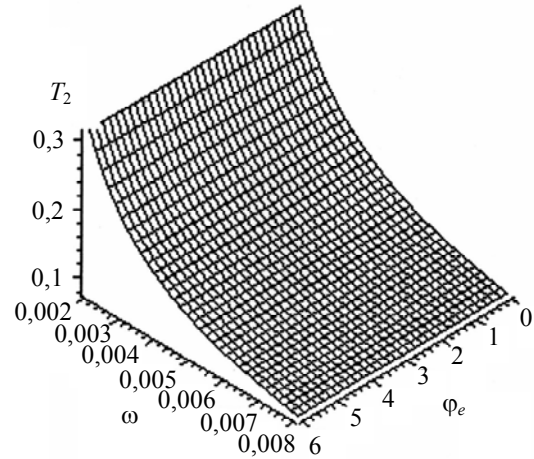
и учтено, что $ck_F = \omega$ (частота излученного фотона), а $\Delta E_{if} = \hbar\omega$.

Первое слагаемое в (8) — $d\sigma_1$ описывает рождение тормозного фотона при ускорении частиц внешним однородным полем (выражение, пропорциональное $L_x L_y$) и чисто квантовый эффект — появление излучения, являющегося результатом интерференции двух движений — в однородном электрическом поле и в поле рассеи-

вающего центра (часть $d\sigma_1$, содержащая $(\nabla U)_{fi}$). Выражение $d\sigma_1$ само по себе не является сечением в отличие от его первого слагаемого и $d\sigma_2$ (это следует уже из того, что оно может быть отрицательным, рис. 1).



а



б

Рис. 1. Поверхности T_1 (а) и T_2 (б) при $\theta = 0,06; \varphi = 0; \theta_F = 0; \varphi_F = \pi; \varepsilon = 0,001; \omega \in (0,002; 0,008)$

Второе слагаемое $d\sigma_2$ определяет сечение возникновения фотонов при столкновении частиц с рассеивающими центрами.

Интегрируя $d\sigma_1$ по $d^2 \vec{k}_{f\perp}$ и dE_{z_f} найдем

$$d\sigma_{1k_F} = \frac{e^2 |e|^2 \chi_z}{4\pi^2 \hbar^3 \chi \omega} \left\{ L_x L_y (\vec{\varepsilon}_{k_F}^* \vec{\xi}) (\vec{\varepsilon}_{k_F} \vec{\xi}^*) + \frac{i}{\omega} \left[(\vec{\varepsilon}_{k_F} (\nabla U)_{fi}^*) \times (\vec{\varepsilon}_{k_F}^* \vec{\xi}) - (\vec{\varepsilon}_{k_F}^* (\nabla U)_{fi}) (\vec{\varepsilon}_{k_F} \vec{\xi}^*) \right] \right\} d^3 k_F,$$

где теперь, в отличие от (9)

$$(\nabla U)_{fi} = \int \int \int F_{z_f}^*(z) F_{z_i}(z) e^{-ik_F z} \nabla U d^3 \vec{r}, \quad (10)$$

потому что выполняется закон сохранения поперечного импульса

$$\vec{k}_{f\perp} = \vec{k}_{i\perp} - \vec{k}_{F\perp},$$

используя который представим закон сохранения энергии в виде:

$$E_{z_f} = E_{z_i} - \hbar\omega - \frac{\hbar^2 k_{F\perp}^2}{2m_e} + \frac{\hbar\vec{k}_{i\perp}\hbar\vec{k}_{F\perp}}{m_e}. \quad (11)$$

Нетрудно проверить, что последние два слагаемых в (11) являются величинами порядка v/c и поэтому ими в нерелятивистском приближении можно пренебречь, что позволяет в дальнейших вычислениях положить

$$E_{z_i} - E_{z_f} = \hbar\omega.$$

Будем считать, что слой одинаковых рассеивающих центров представляет собой идеальную двухмерную кристаллическую структуру с базисными векторами \vec{a}_1, \vec{a}_2 , лежащими в плоскости xy , т. е. точки пространства, в которых находятся неподвижные рассеивающие центры, определяются векторами $\vec{r}_{n_1 n_2} = n_1 \vec{a}_1 + n_2 \vec{a}_2$ ($n_1 = 0, 1, 2, \dots, N_1 - 1$; $n_2 = 0, 1, 2, \dots, N_2 - 1$). Тогда координаты таких центров будут иметь следующие значения:

$$x_{n_1, n_2} = n_1 a_{1x} + n_2 a_{2x}; \quad y_{n_1, n_2} = n_1 a_{1y} + n_2 a_{2y}.$$

Предположим также, что потенциальную энергию U взаимодействия рассеивающих центров с падающими на них электронами можно представить как сумму "смещенных" относительно друг друга одинаковых слагаемых

$$U = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \tilde{U}(x - x_{n_1, n_2}, y - y_{n_1, n_2}, z), \quad (12)$$

где $\tilde{U}(x - x_{n_1, n_2}, y - y_{n_1, n_2}, z)$ — потенциальная энергия взаимодействия с отдельным рассеивающим центром, находящимся в точке пространства с координатами $(x_{n_1, n_2}, y_{n_1, n_2}, z)$. Так, например, для Кулоновых центров рассеяния

$$\tilde{U}(x - x_{n_1, n_2}, y - y_{n_1, n_2}, z) = -\frac{Ze^2}{|\vec{r} - \vec{r}_{n_1, n_2}|}. \quad (13)$$

Вводя переменные $\vec{\zeta}_{n_1, n_2} = (x - x_{n_1, n_2}, y - y_{n_1, n_2}, z)$ и подставляя в (10) выражение (12), получим

$$(\nabla \tilde{U})_{fi} = N_1 N_2 (\nabla \tilde{U})_{fi} = N (\nabla \tilde{U})_{fi}, \quad (14)$$

так как очевидно, что все слагаемые

$$(\nabla \tilde{U})_{fi} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{z_i}^*(z) F_{z_i}(z) e^{-ik_{Fz}z} \nabla \tilde{U}(\zeta_x, \zeta_y, z) d\zeta_x d\zeta_y dz$$

в правой части (10) одинаковые, а $N_1 N_2 = N$ — полное число рассеивающих центров.

Для нахождения матричного элемента $(\nabla \tilde{U})_{fi}$, входящего также в (9), для кулоновского потенциала (13), разложим выражения $(2/3)S_{i,f}^{3/2}$ по степеням $z|e\varepsilon|/E_{z_i, f}$ до первого порядка включительно (при $\varepsilon \cong 0,001e/a^2$ такое разложение законно в окрестности рассеивающего центра радиусом порядка $100a$), а в множителях $(S_i S_f)^{-1/4}$, пренебрегая зависимостью от z , получим

$$(\nabla \tilde{U})_{fi} = -\frac{4\pi i Z e^2}{l_e \sqrt{k_{z_i} k_{z_f}}} \exp\left[\frac{2}{3}i(k_{z_i}^3 - k_{z_f}^3)\right] l_e^3 \frac{\vec{Q}}{Q^2}, \quad (15)$$

где $\vec{Q} = (\vec{Q}_{\perp}, q_z + k_{Fz})$; $q_z = k_{z_f} - k_{z_i}$.

Для взятия интегралов, входящих в $\vec{\zeta}_{n_1, n_2}$, область интегрирования которых, вообще говоря, может быть физически бесконечно большой, выражение $(2/3)S_f^{3/2}$ необходимо разложить по степеням $\hbar\omega/E_{z_i}$, после чего они выражаются через интеграл вероятности ошибок

$$\text{erf}(z) = \frac{2}{(\pi)^{1/2}} \int_0^z e^{-t^2} dt.$$

Собирая все вместе и учитывая, что для $(\nabla \tilde{U})_{fi}$, входящего в $d\sigma_1$, величина $\vec{Q}_{\perp} = 0$, в атомных единицах получим первое слагаемое (8), отнесенное к единице площади слоя рассеивающих центров, а также к интервалу частоты $d\omega$ и элементу телесного угла $d\Omega_F$ волнового вектора фотона:

$$\begin{aligned} d\sigma_{1, \omega, \Omega_F, \vec{e}_\Phi} &= \alpha^3 \frac{\chi_z}{\chi} \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\omega}{2\pi} \left[(\vec{e}_{F\perp}^* \vec{k}_{i\perp}) (\vec{e}_{F\perp} \vec{k}_{i\perp}) + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left(\frac{|e_{Fz}|^2}{2 \cos \theta_F} + 2e_{Fz} \vec{e}_{F\perp} \vec{k}_{i\perp} \right) \frac{1}{\alpha \cos \theta_F} \right] |\lambda_{11}|^2 + \right. \\ &+ \omega \left[(2\varepsilon)^{2/3} |e_{Fz}|^2 (L_1 + L_2) + (2\varepsilon)^{1/3} \left(e_{Fz} \vec{e}_{F\perp} \vec{k}_{i\perp} + \frac{|e_{Fz}|^2}{\alpha \cos \theta_F} \right) \times \right. \\ &\left. \left. \times \left(\lambda_{11}^* e^{i\omega k_{z_i}/\varepsilon} + \lambda_{11} e^{-i\omega k_{z_i}/\varepsilon} \right) \right] \delta(\alpha\omega \cos \theta_F) - 2Z \frac{1}{|\vec{a}_1, \vec{a}_2|} \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{(2\varepsilon)^{1/3}}{\omega} e_{Fz} \sqrt{\frac{k_z}{k_{zF}}} \times [4\pi(2\varepsilon)^{1/3} e_{Fz} \cos((k_z - \chi_z) \frac{\omega}{\varepsilon}) \times \\ & \times \delta(\alpha\omega \cos\theta_F) + (\bar{e}_{F\perp} \bar{k}_{f\perp} + \frac{e_{Fz}}{\alpha \cos\theta_F}) \times \\ & \times (\lambda_{11}^* e^{i\omega k_z/\varepsilon} + \lambda_{11} e^{-i\omega k_z/\varepsilon})] \Big\} d\omega dO_F, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= \frac{1}{(2\varepsilon)^{1/6} \sqrt{2\omega \cos\theta_F}} \times \\ & \times \sqrt{\frac{\pi}{i}} \left\{ \operatorname{erf} \left(\sqrt{i \frac{2\omega \cos\theta_F}{2\varepsilon}} \left[\sqrt{\chi_z^2 + 2\varepsilon(L_1 + L_2)} - \frac{1}{\alpha \cos\theta_F} \right] \right) - \right. \\ & \left. - \operatorname{erf} \left(\sqrt{i \frac{2\omega \cos\theta_F}{2\varepsilon}} \left[\chi_z - \frac{1}{\alpha \cos\theta_F} \right] \right) \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ i \left[\frac{\alpha\omega E_z \cos\theta_F}{\varepsilon} + \frac{\omega}{2\alpha\varepsilon \cos\theta_F} \right] \right\}; \\ \chi &= \sqrt{\chi_z^2 + k_{ix}^2 + k_{iy}^2}; \quad E_z = k_z^2 / 2; \quad k_{Fz} = \sqrt{k_z^2 - 2\omega}; \end{aligned}$$

□

α — постоянная тонкой структуры;
 L_2 — нормировочная длина.

Для линейно поляризованного фотона (именно этот случай мы и будем рассматривать) $\bar{e}_F = \bar{e}_F^*$, и в выбранной Декартовой системе координат компоненты вектора \bar{e}_F определяются следующими выражениями [2]: $\bar{e}_F = (\sin\varphi_F \cos\varphi_{\bar{e}} + \cos\theta_F \cos\varphi_F \sin\varphi_{\bar{e}}, \cos\theta_F \sin\varphi_F \times$
 $\times \sin\varphi_{\bar{e}} - \cos\varphi_F \cos\varphi_{\bar{e}}, -\sin\theta_F \sin\varphi_{\bar{e}})$, где $\varphi_{\bar{e}}$ — угол между вектором $\bar{a}_{\perp} = [\bar{n}, \bar{e}]/(\varepsilon \sin\theta_F)$ и \bar{e}_F ; θ_F, φ_F — сферические координаты вектора $\bar{n} = \bar{k}_F / k_F$.

Уже здесь отметим, что, так как выражение (16) содержит произведение макроскопического параметра $L_1 + L_2$ и \square -функции, аргументом которой является $k_{zF} \equiv \alpha\omega \cos\theta_F$, то интенсивность тормозного излучения в поперечном направлении, т. е. когда $k_{zF} \leq 1/(L_1 + L_2)$ по отношению к \bar{e} может быть сравнима с его интенсивностью при столкновении электронов с рассеивающими центрами, находящимися не в одной плоскости, а распределенными по всей области пространства, где индуцировано однородное электрическое поле. Если же $k_{zF} \neq 0$, то, как будет показано, оба слагаемых в (8) могут быть одного порядка при прохождении электронов через двухмерный плоский слой.

При определении $d\sigma_2$ следует учесть, что это слагаемое не содержит двухмерную дельта-функцию, обеспечивающую закон сохранения поперечного импульса системы, и поэтому входящий в $d\sigma_2$ матричный элемент определяется выражением (9), более сложным, чем (14).

Подставляя (12) в (9), получим

$$(\nabla \bar{U})_{fi} = (\nabla \bar{U})_{fi} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} e^{-i\bar{q}_{\perp} \bar{r}_{n_1 n_2} - i\bar{k}_{F\perp} \bar{r}_{n_1 n_2}}, \quad (17)$$

где теперь

$$(\nabla \bar{U})_{fi} = \int_{-\infty}^{\infty} \int F_{z_f}^*(z) F_{z_f}(z) e^{-i\bar{q}_{\perp} \bar{z}_{\perp} - i\bar{k}_{F\perp} \bar{z}_{\perp} - ik_{Fz} z} \nabla_{\bar{z}} \bar{U}(\bar{z}) d^3 \bar{z}.$$

Проводя суммирование в (17), подставляя результат в $d\sigma_2$ и устрояя в нем δ -функцию интегрированием по dE_{z_f} , получим при выполнении закона сохранения энергии

$$E_{z_f} = \frac{\hbar^2}{2m_e} (k_{i\perp}^2 - k_{f\perp}^2) - \hbar\omega - E_z, \quad (18)$$

часть дифференциального сечения (связанную с движением электронов в поле рассеивающих центров) $d\sigma_{2\bar{k}_F \bar{k}_{f\perp} \bar{e}_F}$, определяющего излучение фонона с поляризацией \bar{e}_F , волновым вектором \bar{k}_F , находящегося в элементе \bar{k}_F -пространства объемом $d^3 \bar{k}_F$, при переходе рассеянного электрона из состояния с волновым вектором $\bar{k}_{i\perp}$ в состояние с волновым вектором $\bar{k}_{f\perp}$, лежащим в интервале $(\bar{k}_{f\perp}, \bar{k}_{f\perp} + d\bar{k}_{f\perp})$

$$\begin{aligned} d\sigma_{2\bar{k}_F \bar{k}_{f\perp} \bar{e}_F} &= \frac{e^2 I_e^2 \chi_z}{4\pi^2 \hbar^3 \chi \omega^3} (\bar{e}_F^* (\nabla \bar{U})_{fi}) (\bar{e}_F (\nabla \bar{U})_{fi}^*) \frac{1}{(2\pi)^2} \times \\ & \times \frac{\sin^2 \frac{N_1 (\bar{q}_{\perp} + \bar{k}_{F\perp}) \bar{a}_1}{2} \sin^2 \frac{N_2 (\bar{q}_{\perp} + \bar{k}_{F\perp}) \bar{a}_2}{2}}{\sin^2 \frac{(\bar{q}_{\perp} + \bar{k}_{F\perp}) \bar{a}_1}{2} \sin^2 \frac{(\bar{q}_{\perp} + \bar{k}_{F\perp}) \bar{a}_1}{2}} \times \\ & \times d^3 \bar{k}_F d^2 \bar{k}_{f\perp}. \end{aligned} \quad (19)$$

Из (19) следует, что при условии

$$(\bar{q}_{\perp} + \bar{k}_{F\perp}) \bar{a}_1 = 2\pi m_1, \quad (\bar{q}_{\perp} + \bar{k}_{F\perp}) \bar{a}_2 = 2\pi m_2, \quad (20)$$

где $m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и больших N_1, N_2 найденное сечение имеет острые пики. Как известно, подобные пики имеют сечения рассеяния нейтронов, проходящих через кристаллическую решетку [6].

Отметим, что значения m_1 и m_2 , входящие в (19), ограничены законом сохранения (18) и неравенством

$$E_{z_f} / |e\epsilon| I_e \gg 1, \quad (21)$$

которое следует из условия применимости асимптот функций Эйри (2).

При стремлении N_1 и N_2 к бесконечности последние два множителя в (19) переходят в выражение

$$(2\pi)^2 N \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \delta\left(\left(\vec{q}_\perp + \vec{k}_{F_\perp}\right) \vec{a}_1 - 2\pi m_1\right) \times \delta\left(\left(\vec{q}_\perp + \vec{k}_{F_\perp}\right) \vec{a}_2 - 2\pi m_2\right). \quad (22)$$

Используя (22) для больших N_1 и N_2 , получим

$$d\sigma_{2\vec{k}_F \vec{k}_{f_\perp} \vec{e}_F} = \frac{e^2 I_e^2 \chi_z N}{4\pi^2 \hbar^3 \chi \omega^3} \left(\vec{e}_F^* (\nabla \vec{U})_{fi} \right) \times \left(\vec{e}_F (\nabla \vec{U})_{fi}^* \right) \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \delta\left(\left(\vec{q}_\perp + \vec{k}_{F_\perp}\right) \times \vec{a}_1 - 2\pi m_1\right) \delta\left(\left(\vec{q}_\perp + \vec{k}_{F_\perp}\right) \vec{a}_2 - 2\pi m_2\right) d^3 \vec{k}_F d^2 \vec{k}_{f_\perp}. \quad (23)$$

Подставляя в это выражение (15), интегрируя (23) по $d^2 \vec{k}_{f_\perp}$ и переходя к сферической системе координат в \vec{k}_F -пространстве и к частоте фотона ω , найдем

$$d\sigma_{2\omega_F, \omega, \vec{e}_F} = \frac{4Z^2 e^6 \chi_z N}{k_{zF} \chi c^3 \hbar^3} \times \sum_{m_2 m_1} \frac{(\vec{e}_F^* \vec{Q})(\vec{e}_F \vec{Q})}{k_{zF} Q^4} \frac{1}{\left[\vec{a}_1, \vec{a}_2 \right]} \frac{d\omega}{\omega} dO_F,$$

где $Q_x = 2\pi \frac{m_1 a_{2y} - m_2 a_{1y}}{\left[\vec{a}_1, \vec{a}_2 \right]}$; $Q_y = 2\pi \frac{m_2 a_{1x} - m_1 a_{2x}}{\left[\vec{a}_1, \vec{a}_2 \right]}$; $Q_z = k_{zF} - k_{z_i} + k_{Fz}$, $k_{zF} = \sqrt{2m_e E_{zF}} / \hbar$, а числа m_1, m_2 должны одновременно удовлетворять условиям (18), (20) и (21).

Считая, что на каждый рассеивающий центр приходится площадь их слоя, равная $\left| \left[\vec{a}_1, \vec{a}_2 \right] \right|$, т. е. $L_x L_y = N \left| \left[\vec{a}_1, \vec{a}_2 \right] \right|$, найдем $d\tilde{\sigma}_{2\omega, \omega_F, \vec{e}_F}$, приходящееся на единицу площади поверхности слоя рассеивающих центров (в атомных единицах)

$$d\tilde{\sigma}_{2\omega, \omega_F, \vec{e}_F} = \frac{4\alpha^3 Z^2 \chi_z}{k_{zF} \chi} \frac{1}{\left[\vec{a}_1, \vec{a}_2 \right]^2} \times \sum_{m_2 m_1} \frac{(\vec{e}_F^*, \vec{Q})(\vec{e}_F, \vec{Q})}{k_{zF} Q^4} \frac{d\omega}{\omega} dO. \quad (24)$$

Очевидно, наблюдаться может только сечение

$$d\tilde{\sigma}_{\omega, \omega_F, \vec{e}_F} = d\tilde{\sigma}_{1\omega, \omega_F, \vec{e}_F} + d\tilde{\sigma}_{2\omega, \omega_F, \vec{e}_F}. \quad (25)$$

Обсуждение результатов

Анализ аналитических выражений (16), (24), (25) проведем численным методом, строя поверхности $T_1(\varphi_e, \omega) = d\tilde{\sigma}_{\omega, \omega_F, \vec{e}_F} / \alpha^3 d\omega dO_F$, $T_2(\varphi_e, \omega) = d\tilde{\sigma}_{2\omega, \omega_F, \vec{e}_F} / \alpha^3 d\omega dO_F$ и $T_3(\varphi_e, \omega) = T_1(\varphi_e, \omega) - T_2(\varphi_e, \omega)$ при различных значениях углов (выраженных в радианах) $\theta, \varphi, \theta_F, \varphi_F$, являющихся сферическими координатами векторов \vec{k}_i, \vec{k}_F ; напряженности ε и $k_i = 30$; $L_1 = 1000$; $L_1 + L_2 = 10000$. Будем также считать, что вектор \vec{a}_1 направлен вдоль оси x ($\vec{\chi}$ лежит в плоскости xz), а \vec{a}_2 — вдоль оси y . Рис. 1, 2 и 3 иллюстрируют эффект интерференции тормозного излучения двух движений, происходящих через слой электронов: в однородном электрическом поле и Кулоновском поле рассеивающих центров. Из этих рисунков видно, что если поток электронов движется почти параллельно оси z ($\theta = 0,06$), и волновой вектор \vec{k}_F лежит в бесконечно малом элементе телесного угла в окрестности оси z , то “плотность” полного сечения T_1 близка к T_2 и осциллирует при изменении частоты (см. рис. 1). При увеличении углов между \vec{k}_i и осью z и одновременно между \vec{k}_i и \vec{k}_F вклад в сечение движения электронов в однородном поле существенно возрастает (см. рис. 3, 4). И, наоборот, если \vec{k}_i параллельно оси z (антипараллельно \vec{e}), то основной вклад в сечение дает движение в Кулоновом поле (см. рис. 1), причем, как уже было отмечено, разность между T_1 и T_2 : $T_1 - T_2$ принимает при некоторых частотах отрицательное значение.

Рис. 3 иллюстрирует осцилляционную структуру сечения при увеличении частоты излучаемого фотона и уменьшение периода этих осцилляций по шкале частоты (выраженной в атомных единицах $e^2/\hbar a$).

Наконец, на рис. 5 показано, как изменяются поверхности, изображенные на рис. 1 при уменьшении ε до значения $5 \cdot 10^{-12} e/a^2$, т. е. имеет место предельный переход — при уменьшении ε величина T_3 стремится к нулю.

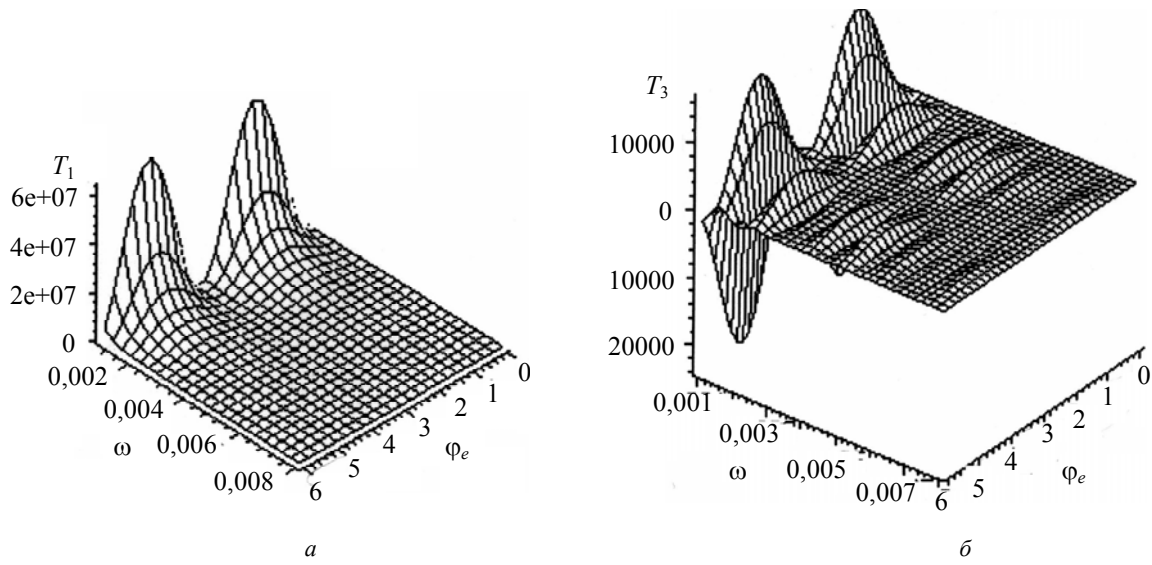


Рис. 2. Поверхности T_1 (а) и T_3 (б) при $\theta = 0$; $\varphi = 0$; $\theta_F = 0$; $\varphi_F = \pi$

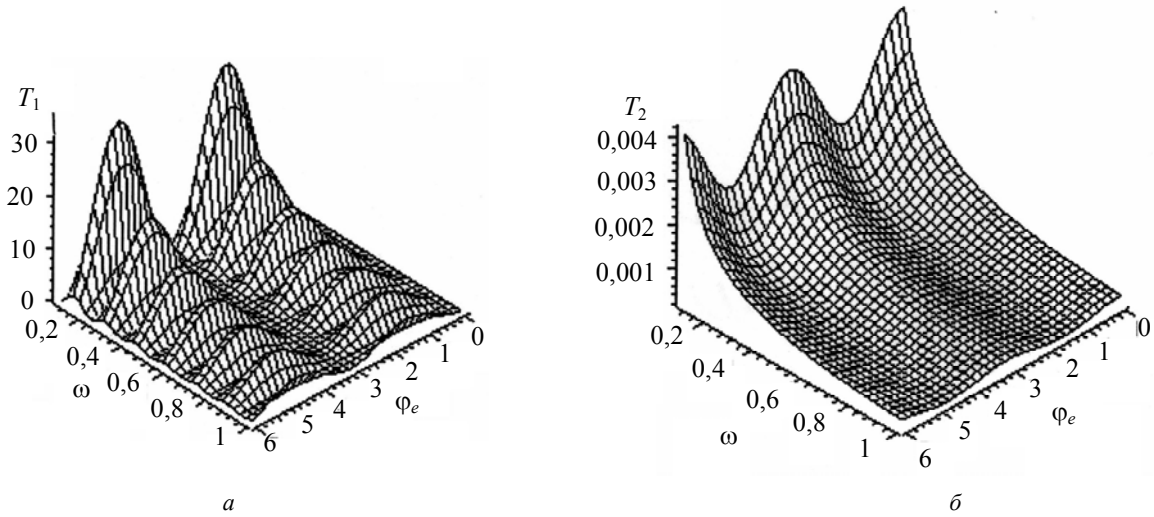


Рис. 3. Поверхности T_1 (а) и T_2 (б) при $\theta = 1$; $\varphi = 0$; $\theta_F = 0$; $\varphi_F = \pi$; $\varepsilon = 0,001$; $\omega \in (0, 1; 1)$

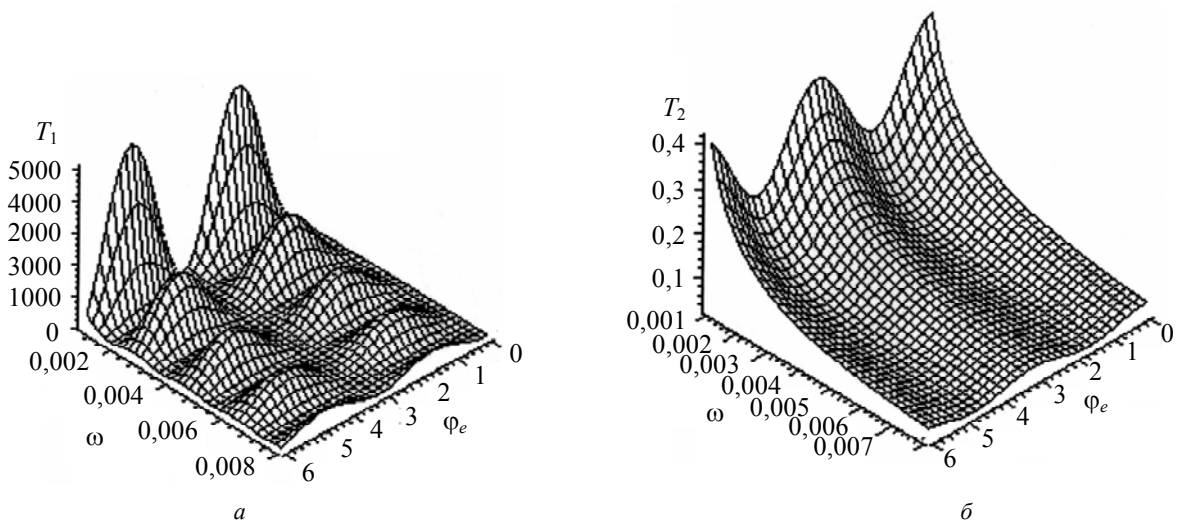


Рис. 4. Поверхности T_1 (а) и T_2 (б) при $\theta = 1$; $\varphi = 0$; $\theta_F = 0$; $\varphi_F = \pi$; $\varepsilon = 0,001$

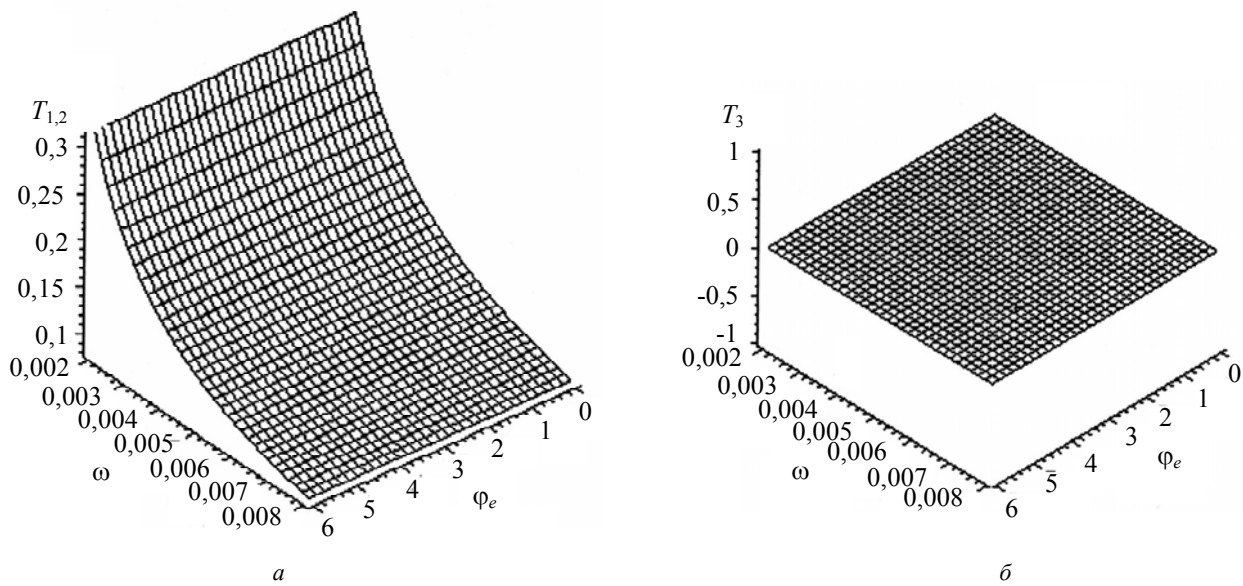


Рис. 5. Поверхности $T_{1,2}$ (а) и T_3 (б) при $\theta=0,06$; $\varphi=0$; $\theta_F=0$; $\varphi_F=\pi$; $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-12} e / a^2$; $\omega \in (0,002; 0,008)$

Заклучение

Из полученных результатов следует, что при прохождении достаточно быстрых, но нерелятивистских электронов через плоский слой рассеивающих центров, находящихся в однородном электрическом поле, значительно меньшем атомного, сечение тормозного излучения может заметно отличаться от подобного сечения при $\vec{\varepsilon} = 0$, в том числе и появлением осцилляционной структуры.

Причем эти результаты получены при значениях энергий продольного движения рассеивающихся электронов, когда нет их отражения от потенциального барьера внешнего однородного поля.

Можно ожидать, что при определении сечения для области параметров задачи, при которых происходит указанное отражение, сечение будет еще сильнее отличаться от случая $\vec{\varepsilon} = 0$.

Автор выражает глубокую благодарность А. А. Рухадзе за внимание к работе и обсуждение результатов.

Л и т е р а т у р а

1. Крылов В. И. Тормозное излучение, возникающее при столкновении частиц во внешнем электрическом поле/ В. И. Крылов// Известия вузов. Физика. 1994. № 7. С. 46—50.
2. Крылов В. И. Анализ дифференциального сечения тормозного излучения, возникающего при столкновении двух заряженных частиц в однородном электрическом поле/ В. И. Крылов, В. В. Пивкин// Физика плазмы. 2000. Т. 26. № 8. С. 737—746.
3. Крылов В. И. К вопросу о сечениях тормозного излучения и упругих столкновений бесструктурных заряженных частиц во внешнем электрическом поле/ В. И. Крылов// Прикладная физика. 2004. Вып. 4. С. 23—33.
4. Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика/ В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. — М.: Наука, 1989. — 723 с.
5. Ландау Л. Д. Квантовая механика/ Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М.: Наука, 1974. — 752 с.
6. Давыдов А. С. Квантовая механика/ А. С. Давыдов. — М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1963. — 748 с.

Статья поступила в редакцию 25 июля 2006 г.

The bremsstrahlung of the charged particles, which take

**place through a stratum of the scattering centres
placed
in an external electric field**

V. I. Krylov

The Pacific State University, Khabarovsk, Russia

In this work the differential cross section for bremsstrahlung of the electrons in a homogeneous electrical field and a field of the N scattering centers has been found. The analysis of the found cross sections has shown that they can noticeably differ from the cross sections which had been calculated in the published articles in which the bremsstrahlung during the movement of an electron in a homogeneous electrical field was not taken into account in comparison with a radiation of photon in the near scattering centers. It means that in this case it was considered that the electrons are only accelerated by an external electric field but its do not radiate. The found cross sections transform to the well-known to mathematical expressions if the homogeneous field is equal to zero.

УДК 537.53

**Обнаружение "странного" излучения и изотопного
искажения титана при испытаниях промышленного
электротехнического оборудования**

A. С. Агапов, А. В. Малышев
ОАО "НИЦ ВВА", Москва

В. А. Каленский, Ч. Б. Кайтуков, Л. И. Уруцкоев, Д. В. Филиппов
ГНУП РЭКОМ, РНЦ "Курчатовский институт", Москва

Р. В. Рябова
ИОЯФ, РНЦ "Курчатовский институт", Москва

А. В. Стеблевский
Институт общей и неорганической химии РАН, Москва

Представлены результаты по регистрации излучения, возникающего при испытании высоковольтного промышленного оборудования, и измерений изотопного состава химических элементов, входящих в состав сплавов, из которых изготовлены варисторы. Обнаружено, что при высоковольтных испытаниях на фотопленках и ядерных фотопластинках регистрируются следы, аналогичные следам, полученным в лабораторных исследованиях по электровзрыву проводников в жидкости. В варисторах, участвовавших в промышленных испытаниях, обнаружены искажения изотопного состава титана.

В последнее время появилось заметное число публикаций, в которых сообщается о наблюдении низкоэнергетических ядерных реакций, инициируемых прохождением электрического тока [1—5]. Упомянутые работы достаточно сильно отличаются друг от друга постановкой эксперимента, условиями протекания электрического тока, а также степенью достоверности полученных результатов. Но всех их объединяет одно: при прохождении электрического тока через среду (газовый разряд, электролиз, электровзрыв) наблюдаются

Следует отметить, что низкоэнергетические ядерные реакции под действием мощного электрического разряда, по-видимому, наблюдали еще в 30-х годах прошлого столетия. Например, в работе [6] Смитс и Карсон подвергли тщательно очищенный жидкий свинец, нагретый до 800 °С в атмосфере азота, действию сильноточных электрических разрядов в течение нескольких часов. Спектральные измерения показали, что исходный спектр, соответствующий первоначально чистому свинцу, постепенно обогащается линиями ртути, так

низкоэнергетические ядерные превращения.

© Агапов А. С., Малышев А. В., Каленский В. А., Кайтуков Ч. Б., Уруцкоев Л. И., Филиппов Д. В., Рябова Р. В., Стеблевский А. В. что линия $\lambda = 2536 \text{ \AA}$ становится более интенсивной,