УДК 621.384

Асимптотический подход к моделированию динамики частиц в периодических магнитных системах

О. Е. Шишанин
Московский государственный индустриальный университет,
Москва, Россия

Рассмотрено аналитическое описание движения заряженной частицы в переменных магнитных системах ускорителей и накопительных колец. Для этого компоненты магнитного поля раскладываются в ряд Фурье, что приводит к одному уравнению типа Хилла. Разработаны методы решения полученных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Приведены результаты для ускорительной системы FODO и одной линейной машины.

Введение

Необходимость данной работы обусловлена изучением свойств синхротронного излучения, которые, как оказалось, зависят от бетатронных колебаний электронов. Эта задача вначале рассматривалась для кругового аксиально-симметричного магнитного поля, затем для переменных магнитных систем FD (фокусировка-дефокусировка), FODO (О-прямолинейный промежуток), FOFDOD [1—4]. Это потребовало аналитического описания движения частицы, пригодного для всей замкнутой орбиты. Наиболее приемлемым оказался способ разложения градиента или компонент магнитного поля в ряд Фурье. Этот подход имеет физический смысл, поскольку близко определяет средний путь частицы, который она "выбирает" в дискретных магнитных полях.

Следующий шаг заключался в разработке методов решения полученных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Здесь теорию усреднения [5] необходимо было дополнить до третьего и четвертого порядков точности, которые бы гарантировали необходимую точность расчетов по излучению. Кроме того, в рамках теории возмущений [6] была найдена процедура, которая приводила к тем же результатам, что и метод усреднения. Это подтвердило надежность обоих подходов.

Пусть электрон движется в периодическом магнитном поле $H = br^{-n}$ (b — const, n — градиент поля) по замкнутой орбите из N элементов, где один элемент состоит последовательно из фокусирующего участка длиной дуги a и с градиентом поля n_1, затем прямолинейного промежутка длиной l_1, дефокусирующего магнита с градиентом n_2 и снова свободного промежутка длиной l_2. Это один из вариантов модели FODO.

Обозначим радиусы кривизны магнитов как R, тогда $a = \pi R/N$ и длина всей орбиты $S = 2\pi R + Nl_1 + Nl_2 = 2\pi R_0$, где R_0 — так называемый средний радиус. Будем считать отношение длин свободных пробегов и магнитов $k = (l_1 + l_2)/2a$ малым параметром. Тогда с учетом этого обозначения $R_0 = R(1 + k)$, а период системы по азимутальному углу φ определится как $T = 2\pi/N$.

Градиент магнитного поля $n(\varphi)$ можно рассматривать в качестве ступенчатой функции с разрывами первого рода. Раскладывая ее в ряд Фурье, получим

$$n(\tau) = \frac{a(n_1 - n_2)}{L} + \frac{2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu \times (n_1 \cos\nu\tau_1 - n_2\cos\nu\tau_2), \tag{1}$$

где

$$\tau = N\varphi; \quad g_\nu = \sin\pi\nu\frac{a}{L}/\nu; \quad L = 2a + l_1 + l_2;$$

$$\tau_1 = \tau - \frac{\pi a}{L}; \quad \tau_2 = \tau - \pi\frac{3a + 2l_1}{L}.$$

Следует заметить, что в выражении (1) физически более оправданным был бы, возможно, переход от ряда к частичной сумме, поскольку на границе магнита возникают краевые эффекты и переход от значения n_1 к n_2 будет более плавным.

Здесь, например, при $\varphi = 0$ получаем в соответствии с теоремой Дирихле, что $n(\tau) = n_1/2$; при $\varphi = (3a/2 + l_1)/L(2\pi/N)$ (середина второго магнита) будет $n(\tau) = -n_2$ и т. д.

В конечном итоге уравнения малых бетатронных колебаний в линейном приближении примут вид:

$$\frac{d^2\rho}{d\tau^2} + \frac{1}{N^2}(1 - (1+k)^2 n(\tau))\rho = 0; \tag{2}$$

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} + \frac{(1+k)^2}{N^2} n(\tau) z = 0, \tag{3}$$

где $\rho = r - R_0$.

Что касается основного орбитального движения частицы, то здесь имеются особенности, связанные с переходом от вращения на прямолинейную траекторию и наоборот. Поскольку на свойства излучения в основном влияют только вертикальные колебания, то внесем ряд упрощений. Усредним ведущее магнитное поле H_0 по всему периоду системы и будем считать, что электрон вращается со средним радиусом R_0.

Угловую скорость после этого можно выразить следующим образом:

$$\dot{\varphi} = \frac{\omega_0}{1+k}[1 - \frac{\rho}{R_0} + \frac{3}{2}\frac{\rho^2}{R_0^2} + \\ + \int n(\varphi)(\frac{z\dot{z}}{R^2} - \frac{\rho\dot{\rho}}{R^2})dt], \quad (4)$$

где угловая частота $\omega_0 = ceH_0/E$.

Метод Боголюбова-Митропольского

Согласно теории усреднения [5], уравнение (3) представим, например, в стандартной форме как

$$\frac{dZ}{d\tau} = \varepsilon GZ, \quad (5)$$

где компоненты вектора Z равны z и $(1/\varepsilon)dz/dt$, а

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g(\tau) & 0 \end{pmatrix}, \quad g(\tau) = (1+k)^2 n(\tau).$$

Малым параметром будем считать $\varepsilon = 1/N$.

С учетом (4) и (5) можно рассмотреть более общее матричное уравнение вида $dZ/d\tau = \varepsilon Y(\tau, Z)$. Для функции $Y(\tau, Z)$ определяется операция усреднения как

$$< Y(\tau, Z) >= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T Y(\tau, Z)d\tau \quad (6)$$

и вводится интегрирующий оператор

$$\tilde{Y}(\tau,\xi) = \int[Y(\tau,\xi) - < Y(\tau,\xi) >]d\tau.$$

Вектор ξ находится из системы

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \varepsilon < Y(\tau,\xi) >,$$

а первое приближение определяется как

$$Z(\tau) = \xi(\tau) + \varepsilon\tilde{Y}(\tau,\xi).$$

Вернемся к общему методу, который ранее был известен до второго приближения. Используя способ итерации, когда последовательно добавляется новая поправка, можно описать любое приближение.

Если взять, например, первые три порядка, то получим, что

$$Z(\tau) = \xi + \sum_{i=1}^{3}\varepsilon^i Y_i, \quad (7)$$

где

$$Y_1 = \tilde{Y}; \qquad Y_2 = \frac{\partial Y}{\partial\xi}Y_1 - \int\frac{\partial Y_1}{\partial\xi}d\tau < Y >;$$

$$Y_3 = \frac{\partial Y}{\partial\xi}Y_2 - \int\frac{\partial Y_1}{\xi}d\tau < \frac{\partial Y}{\xi}Y_1 > - \int\frac{\partial Y_2}{\partial\xi}d\tau < Y >.$$

Согласно [5], погрешность данного приближения будет ε^4.

Положим теперь $Y(\tau, Z) = GZ$, тогда из (7) найдем, что

$$Z(\tau) = (1 + \sum_{i=1}^{3}\varepsilon^i G_i)\xi, \quad (8)$$

где

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \varepsilon < G(1 + \sum_{i=1}^{3}\varepsilon^i G_i) > \xi. \quad (9)$$

Матрицы G_i примут вид:

$$G_1 = \tilde{G}; \qquad G_2 = \tilde{G}G_1 - \tilde{G}_1 < G >;$$

$$G_3 = \tilde{G}G_2 - \tilde{G}_1 < GG_1 > - \tilde{G}_2 < G >.$$

Через функцию $g(\tau)$ они выразятся следующим образом:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\tilde{g} & 0 \end{pmatrix}; \qquad G_2 = \begin{pmatrix} -\tilde{\tilde{g}} & 0 \\ 0 & \tilde{\tilde{g}} \end{pmatrix};$$

$$G_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2\tilde{\tilde{g}} \\ g\tilde{\tilde{g}} + \gamma_{z1}^2\tilde{\tilde{g}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\gamma_{z1}^2 = (n_1 - n_2)(1+k)/2$, причем

$$g(\tau) = \gamma_{z1}^2 + \frac{2(1+k)^2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu(n_1\cos\nu\tau_1 - n_2\cos\nu\tau_2),$$

$$< g(\tau) > = \gamma_{z1}^2,$$

$$\tilde{g}(\tau) = \frac{2(1+k)^2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{g_\nu}{\nu}(n_1\sin\nu\tau_1 - n_2\sin\nu\tau_2) \text{ и т. д.}$$

Из (9) получим, что

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = -\frac{1}{N^2}(\gamma_{z1}^2 - \frac{1}{N^2} < g\,\tilde{\tilde{g}} >)\cdot\xi.$$

Обозначим в последнем выражении круглую скобку через ν_z^2, тогда

$$\xi = b\cos(\frac{\nu_z}{N}\tau + \psi),$$

где B и ψ — произвольные константы.

Квадрат частоты

$$\nu_z^2 = \frac{n_1 - n_2}{2}(1+k) + \frac{\pi^2}{N^2}\frac{N_1}{48}, \qquad (10)$$

где

$$N_1 = (n_1^2 + n_2^2)(1+2k)^2 +$$
$$+2n_1 n_2(1 + 4k + 4k_1 k_2 - k_1^2 - k_2^2);$$

$$k_1 = l_1 / a; \qquad k_2 = l_2 / a.$$

Подставляя G_i в матричное равенство (8), найдем решение исходного уравнения (3) в виде

$$z = \left[1 - \frac{1}{N^2}\tilde{\tilde{g}}\right]\xi + \frac{2}{N^3}\tilde{\tilde{\tilde{g}}}\frac{d\xi}{d\varphi}.$$

Окончательно асимптотика запишется с точностью $1/N^3$ как

$$z = B\cos(\frac{\nu_z}{N}\tau + \psi)(1 + S_1 + \gamma_{z1}^2 S_2) +$$
$$+B\sin(\frac{\nu_z}{N}\tau + \psi)\gamma_{z1}S_3, \qquad (11)$$

где

$$S_1 = \frac{2(1+k)^2}{\pi N^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{g_\nu}{\nu^2}(n_1\cos\nu\tau_1 - n_2\cos\nu\tau_2);$$

$$S_2 = \frac{8(1+k)^2}{\pi N^4}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{g_\nu}{\nu^4}(n_1\cos\nu\tau_1 - n_2\cos\nu\tau_2);$$

$$S_3 = \frac{4(1+k)^2}{\pi N^3}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{g_\nu}{\nu^3}(n_1\sin\nu\tau_1 - n_2\sin\nu\tau_2).$$

Слагаемое с S_2 в (11) иллюстрирует следующее приближение.

Перейдем к уравнению (2). Здесь будут свои особенности, в частности, $\gamma_{\rho 1} = 1 - \gamma_{z1}^2$,

$$\nu_\rho^2 = 1 - \frac{n_1 - n_2}{2}(1+k) + \frac{\pi^2}{N^2}\frac{N_1}{48}. \qquad (12)$$

Само решение имеет вид:

$$\rho = A\cos(\frac{\nu_\rho}{N}\tau + \chi)(1 - S_1 - \gamma_{\rho 1}^2 S_2) -$$
$$-A\sin(\frac{\nu_\rho}{N}\tau + \chi)\gamma_{\rho 1}S_3. \qquad (13)$$

Если в асимптотических выражениях (11), (13) провести усреднение по быстрым осцилляциям, то останутся только первые слагаемые. Следовательно, A и B можно трактовать как амплитуды основных колебаний, а χ и ψ — как их начальные фазы. В целом поперечные движения представляют собой суперпозицию синусоидальных и косинусоидальных колебаний с модулированными амплитудами. Это первый итог работы. В формулах (11), (13) отсутствуют расходящиеся гиперболические функции, что находится в соответствии с принципом сильной фокусировки об устойчивости движения в целом. Имеющиеся здесь ряды или выражаются через многочлены Бернулли $B_i(x)$, или являются настолько быстросходящимися, что могут быть найдены численно. В других моделях могут появиться многочлены Эйлера.

Таким образом, вопрос о сходимости отдельных слагаемых в асимптотиках не вызывает сомнений. Изучение этого вопроса в целом также приводит к положительному результату.

Техника теории возмущений

Попытаемся теперь найти, например, выражение (11) другим способом. Будем искать решение уравнения (3) в виде $z = \exp(i\gamma_z\tau)\cdot\varphi_z(\tau)$, где $\varphi_z(\tau)$ — периодическая функция. Поскольку нас интересует движение только внутри стабильной области, называемой "галстуком" устойчивости, то будем считать, что $\mathrm{Im}\,\gamma_z = 0$. Аналогичное условие нужно добавить и для γ_ρ. Рассматриваемый подход близок к методам Уиттекера и растянутых параметров для уравнения Матье [6].

После подстановки для функции $\varphi_z(\tau)$ получим новое дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\varphi_z}{d\tau^2} + 2i\gamma_z\frac{d\varphi_z}{d\tau} + \left[\frac{(1+k)^2 n(\tau)}{N^2} - \gamma_z^2\right]\varphi_z = 0,$$

решение которого определим в виде следующих асимптотических рядов:

$$\varphi_z(\tau) = \varphi_0(\tau) + \sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(\tau)/N^i, \qquad \gamma_z = \sum_{i=1}^{\infty}\gamma_{zi}/N^i.$$

Роль малого параметра по-прежнему играет величина $1/N$.

Приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях параметра, приходим к следующей цепочке уравнений:

$$\ddot{\varphi}_0 = 0, \qquad \ddot{\varphi}_1 + 2i\gamma_{z1}\dot{\varphi}_0 = 0,$$

$$\ddot{\varphi}_2 + 2i(\gamma_{z1}\dot{\varphi}_1 + \gamma_{z2}\dot{\varphi}_0) + ((1+k)^2 n(\tau) - \gamma_{z1}^2)\varphi_0 = 0,$$

$$\ddot{\varphi}_3 + 2i(\gamma_{z1}\dot{\varphi}_2 + \gamma_{z2}\dot{\varphi}_1 + \gamma_{z3}\dot{\varphi}_0) +$$
$$+((1+k)^2 n(\tau) - \gamma_{z1}^2)\varphi_1 - 2\gamma_{z1}\gamma_{z2}\varphi_0 = 0 \quad \text{и т. д.}$$

Согласно [5, 6], в решениях этих уравнений нужно исключать секулярные члены. В теории усреднения это соответствует тому, что предел справа в (6) существует.

Тогда из первых двух уравнений получим, что $\varphi_0 = b,\ \varphi_1 = b_1$, где b, b_1 — const. Из третьего выражения вытекает равенство $\gamma_{z1}^2 = (n_1 - n_2)\times$ $\times(1+k)/2.$ Само решение запишется как

$$\varphi_2 = b\frac{2(1+k)^2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{g_\nu}{\nu^2}(n_1\cos\nu\tau_1 - n_2\cos\nu\tau_2).$$

Затем последовательно найдем

$$\gamma_{z2} = 0,$$

$$\varphi_3 = -i\gamma_{z1}b\frac{4(1+k)^2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{g_\nu}{\nu^3}\times$$
$$\times(n_1\sin\nu\tau_1 - n_2\sin\nu\tau_2) + \frac{b_1}{b}\varphi_2,$$

$$\gamma_{z3} = \frac{\pi^2 N_1}{96\gamma_{z1}}, \quad \varphi_4 = \gamma_{z1}^2 bN^2 S_2 - i\gamma_{z1}b_1 N^3 S_4 + bN^4 S_3,$$

$$\gamma_{z4} = 0 \quad \text{и т. д.}$$

Квадрат частоты $\nu_z = N\gamma_z$ определится как $\nu_z^2 = \gamma_{z1}^2 + 2\gamma_{z1}\gamma_{z3}/N^2$. Подставляя сюда γ_{z1} и γ_{z3}, получим формулу (10) с точностью до $1/N^2$. Общее решение можно построить в виде: $z = C\exp(i\gamma_z\tau)\varphi_z(\tau) + C^*\cdot\exp(-i\gamma_z\tau)\varphi_z^*(\tau)$. Переобозначив произвольные постоянные как $C(b + b_1/N) = (B/2)\exp(i\psi)$, снова придем к выражению (11). Частоту (12) и асимптотику (13) можно получить аналогичным образом, если решение уравнения (2) искать в виде: $\rho = \exp(i\gamma_\rho\tau)\varphi_\rho(\tau)$. Оказывается, малым параметром разложения в формулах (11), (13) является n/N^2.

Если квадрат полной скорости усреднить по периоду, то получим

$$<V^2> = R_0^2\left(\frac{\omega_0}{1+k}\right)^2\left(1 + \nu_\rho^2\frac{A^2}{R_0^2} + \nu_z^2\frac{B^2}{R_0^2}\right).$$

Здесь угловая частота обращения ω_0 становится меньше в $1+k$ раз из-за влияния прямолинейных промежутков.

Другие модели

Используя рассмотренные выше методы, можно изучить колебания и в таких системах, как FOFDOD и слабая фокусировка [7]. Однако наибольший интерес, несомненно, представляют накопительные кольца. Роль квадрупольных линз при фокусировке заряженных частиц описана, в частности, в [8]. Имеются три основные периодические ячейки, используемые в накопительных кольцах [9]. Это FODO (название как в ускорителях, но смысл другой), ячейка Чесмена-Грина и триплет. Они описывают так называемые линейные машины.

В ячейке FODO символы F и D уже означают фокусирующие и дефокусирующие квадруполи, О-поворотный магнит и, кроме того, между всеми частями имеются свободные промежутки. Обозначим магнитное поле поворотного магнита по вертикали как $B_z = B$, а составляющие квадрупольного магнитного поля как $H_z^f = -gx$, $H_z^\partial = gx$, $H_x^f = -gz$, $H_x^\partial = gz$, где g — постоянная линзы.

Пусть вся замкнутая магнитная система имеет N периодов, где одна ячейка состоит из фокусирующего квадруполя длиной a, поворотного магнита протяженностью d, дефокусирующего квадруполя, поворотного магнита и промежутков между ними длиной l. Тогда вся длина периода $L = 2a + 2d + 4l$, а протяженность замкнутой орбиты $S = 2\pi R +$ $+(2a + 4l)N$, где R — радиус поворотного магнита. Если обозначить $k = (a + 2l)/d$, то средний радиус $R_0 = R(1+k)$. Если ведущее магнитное поле разложить в ряд Фурье и как раньше усреднить, то получим, что

$$\bar{H}_z = 2dB/L - gxf_1(\tau),$$

где

$$f_1(\tau) = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin((2\nu+1)\pi a/L)}{2\nu+1}\cos(2\nu+1)\left(\tau - \frac{\pi a}{L}\right).$$

Другая составляющая магнитного поля будет $H_r = -gzf_1(\tau)$.

Уравнение, например, для вертикальных колебаний примет следующий вид:

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} + \lambda^2\sum_{\nu=0}^{\infty}f_1(\tau)z = 0. \qquad (14)$$

Здесь обозначили $\lambda^2 = C / N^2$, где $C = gR_0(1+k)/B$. При существующих на практике значениях g и B параметр $\lambda >> 1$. Следовательно, (14) представляет собой уравнение Хилла с малым параметром при старшей производной. Это второй основной результат. При моделировании здесь можно менять параметры установки и получать численные решения.

Заключение

В приведенных задачах был сделан анализ для одного магнитного периода, однако при переходе в другую ячейку условия повторяются и можно сделать обобщение на всю замкнутую траекторию.

Литература

1. *Жуковский В. Ч., Шишанин О. Е.* Влияние бетатронных колебаний электрона на свойства синхротронного излучения// ЖЭТФ. 1971. Т. 61. Вып. 4. С. 1371—1378.
2. *Шишанин О. Е.* Синхротронное излучение электрона в сильнофокусирующем магнитном поле// Там же. 1993. Т. 103. Вып. 4. С. 1117—1126.
3. *Шишанин О. Е.* Свойства синхротронного излучения в системе FODO// ЖТФ. 1994. Т. 64. Вып. 2. С. 196—200.
4. *Шишанин О. Е.* Изучение особенностей синхротронного света в системе FOFDOD// Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20. Вып. 20. С. 4—9.
5. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974.
6. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. — М.: Мир, 1984.
7. *Шишанин О. Е.* Синхротронное излучение электронов в периодических слабофокусирующих магнитных полях// ЖЭТФ. 2000. Т. 117. Вып. 5. С. 835—843.
8. *Мешков И. Н.* Транспортировка пучков заряженных частиц. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1991. — 221 с.
9. *Wiedemann H.* Design of low emittance storage rings// Nucl. Inst. and Meth. 1986. A 246. №. 1—3. P. 4—11.

Статья поступила в редакцию 14 ноября 2007 г.

Asymptotic method for simulation of particle dynamics in periodic magnetic systems

O. E. Shishanin
Moscow State Industrial University, Moscow, Russia

An analytical description of charge particle motion in the alternating magnetic system of acceleration and storage rings is considered. For this purpose, in particular, the projections of magnetic field are expanded in a Fourier series, resulting in a single equation of Hill's type. A technique of solution for derived differential equations with the periodic coefficients is developed. The results for the FODO system and the example for a linear machine are exhibited.

УДК 539.1

Электростатический энергофильтр с двойной фокусировкой

Л. П. Овсянникова, Т. Я. Фишкова
Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе РАН, С.-Петербург, Россия

Предложено и теоретически исследовано устройство, фильтрующее по энергии пучки заряженных частиц. Оно состоит из цилиндрического полезадающего электрода, в меридиональной плоскости которого расположен плоский заземленный электрод, а по торцам — заземленные диафрагмы, через которые осуществляются впуск и вывод пучка. В широком диапазоне изменения геометрии системы рассчитаны ее параметры для двух случаев: с двойной фокусировкой пучка на плоский электрод и в режиме параллельного переноса пучка.

Введение

В работе [1] исследована ионно-оптическая система, формирующая пучок на вход монопольного масс-анализатора, в которой для предотвращения попадания в пучок рассеянных электронов используется отклоняющая система нетрадиционной конструкции. Система обеспечивает умень-