УДК 536.21

Моделирование процессов теплопроводности в ортогонально армированных гибридных композитах с дисперсным упрочнением связующего

Ю. В. Немировский, А. П. Янковский
Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск, Россия

Предложены модели теплопроводности ортогонально армированной волокнистой среды с дисперсным упрочнением связующего без учета и с учетом времени релаксации материалов фаз композиции. Проведено сравнение расчетных значений эффективных коэффициентов теплопроводности однонаправленно и перекрестно армированных композитов с экспериментальными данными. Показано удовлетворительное согласование расчетных и экспериментальных значений этих величин.

Введение

В силу постулата Онзагера [1], тензор коэффициентов теплопроводности Λ_{ij} любого реального материала симметричен ($\Lambda_{ij} = \Lambda_{ji}$, i, j = 1, 2, 3), поэтому в каждой точке $\boldsymbol{x}$ можно определить такую локальную ортогональную систему координат $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}\ \ \boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{x} = \ x_1, x_2, x_3\ $, $\boldsymbol{x}' = \ x'_1, x'_2, x'_3\ $) с единичными ортами $\boldsymbol{n}^{(i)} = \ n_1^{(i)}, n_2^{(i)}, n_3^{(i)}\ $, в которой тензор Λ'_{ij} имеет диагональный вид ($\Lambda'_{ij} = \Lambda'_{ji} = 0$, $j \neq i$), причем $\Lambda'_{ii} \equiv \Lambda'_i > 0$ ($i, j = 1, 2, 3$).

Если армировать гибридный композит по ортогональным направлениям $\boldsymbol{n}^{(i)}\ \ \boldsymbol{x}$, то при соответствующем подборе материалов фаз композиции и плотностей армирования можно получить материал с наперед заданными теплофизическими свойствами, например с заданным распределением функций $\Lambda_{ij}\ \ \boldsymbol{x}$, $C\ \ \boldsymbol{x}$, $R\ \ \boldsymbol{x}$, где C, R — эффективная удельная теплоемкость материала и его объемная плотность, соответственно.

Актуальной является проблема моделирования процессов теплопроводности в ортогонально армированных гибридных композитах, материал связующего которых в общем случае может быть дисперсно упрочнен. Изучению этого вопроса посвящено настоящее исследование.

Теплофизическая модель ортогонально армированной волокнистой среды с дисперсным упрочнением связующего

Выделим из тела в произвольной точке $\boldsymbol{x}$ малый представительный элемент объема $dx'_1 \times dx'_2 \times dx'_3$, ребра которого параллельны направлениям армирования $\boldsymbol{n}^{(i)}$ (i = 1, 2, 3). Так как установить фактическое распределение тепловых потоков и температурного поля в пространственно армированном материале весьма затруднительно, то при нахождении практически пригодных зависимостей для определения трех независимых теплофизических характеристик в виде компонент линейной теплопроводности *необходимо сделать некоторые допущения, аналогичные тем, что были использованы в работе [2] для вывода формул, определяющих эффективные коэффициенты теплопроводности однонаправленно армированной среды.*

1. Ортогонально армированный и дисперсно-упрочненный материал в пределах представительного элемента представляет собой сплошное квазиоднородное ортотропное тело.

2. В пределах представительного элемента материалы всех фаз композиции однородны, причем основной материал (связующее) и дисперсные включения теплофизически ортотропны, и главные оси анизотропии в этих фазах композиции совпадают с направлениями x'_i локальной системы координат, в которой рассматривается представительный элемент; материалы армирующих волокон монотропны (трансверсально-изотропны), причем главные оси анизотропии совпадают с продольными осями волокон, уложенных в направлениях x'_i (i = 1, 2, 3).

3. Связь между вектором теплового потока и градиентом температуры во всех фазах композиции подчиняется линейному закону теплопроводности Фурье.

4. На границах между связующим и всеми армирующими элементами реализуются условия идеального теплового контакта.

5. Приращение усредненной температуры T вдоль произвольно ориентированного отрезка элементарной длины dl равно сумме приращений температур в фазах композиции, которые этот отрезок пересекают.

6. Усредненный тепловой поток через произвольно ориентированную элементарную площадку подсчитывается по правилу простой смеси тепловых потоков в фазах композиции.

Дальнейший ход рассуждений такой же, как в работе [2], поэтому ради экономии места ограничимся кратким изложением.

Введем следующие обозначения:

K_0 — количество семейств дисперсных включений;

K_i — количество семейств волокон, уложенных по направлениям $\boldsymbol{n}^{(i)}$;

λ_i^m, $\lambda_{i,k}^0$ — коэффициенты теплопроводности связующей матрицы и k-го (k = 1, 2,..., K_0) семейства дисперсных включений в направлениях x'_i, соответственно;

$\lambda_{i,k}$, $\lambda_{i,k}^*$ — продольные и поперечные коэффициенты теплопроводности монотропных волокон k-го (k = 1, 2, ... K_j) семейства, уложенных в направлении x'_i (i = 1, 2, 3);

$\omega_{0,k}$, $\omega_{i,n}$ — удельное объемное содержание дисперсных включений k-го семейства и волокон n-го семейства, уложенных в направлении x'_i, соответственно ($1 \le k \le K_0$, $1 \le n \le K_j$, i = 1, 2, 3);

a — удельное объемное содержание связующего в представительном элементе.

Вначале выполняется условие нормировки, т. е.

$$a + \sum_{i=0}^{3} \sum_{k=1}^{K_i} \omega_{i,k} = 1. \qquad (1)$$

Согласно допущению 6 для компонент q_i усредненного вектора теплового потока имеем

$$q_i = a q_i^m + \sum_{j=0}^{3} \sum_{k=1}^{K_j} \omega_{j,k} q_i^{(j,k)}, \quad i = 1, 2, 3, \qquad (2)$$

где q_i^m, $q_i^{(0,k)}$ — компоненты вектора теплового потока в связующей матрице и дисперсных включениях k-го ($1 \le k \le K_0$) семейства в направлениях x'_i (i = 1, 2, 3) , соответственно;

$q_i^{(j,k)}$ — компоненты вектора теплового потока в волокнах k-го ($1 \le k \le K_j$) семейства, уложенных в направлении x'_j ($1 \le k \le K_j$, j = 1, 2, 3).

Из допущения 5 по аналогии с [2] вытекает равенство

$$\partial_i T = a \partial_i T_m + \sum_{j=0}^{3} \sum_{k=1}^{K_j} \omega_{j,k} \partial_i T_{j,k}, \quad i = 1, 2, 3, \qquad (3)$$

где T — усредненная температура композиции;

T_m, $T_{0,k}$ — температура в связующей матрице и в дисперсных включениях k-го ($1 \le k \le K_0$) семейства, соответственно;

$T_{j,k}$ — температура в волокнах k-го ($1 \le k \le K_j$) семейства, уложенных в направлении x'_j ($1 \le k \le K_j$, j = 1, 2, 3);

∂_i — оператор частного дифференцирования по направлению x'_i.

Согласно гипотезе 4 в пределах представительного элемента имеют место равенства, вытекающие из условий сопряжения

$$\partial_i T_{i,k} = \partial_i T_m \quad (1 \le k \le K_i, \ i = 1, 2, 3); \qquad (4)$$

$$q_i^{(0,k)} = q_i^m \quad (1 \le k \le K_0, \ i = 1, 2, 3); \qquad (5)$$

$$q_i^{(j,k)} = q_i^m \quad (1 \le k \le K_j, \ j \ne i, \ i, j = 1, 2, 3). \qquad (6)$$

Подставив равенства (5), (6) в уравнения (2), получим

$$q_i = \left(a + \sum_{j=\overline{0,3}}^{j \ne i} \sum_{k=1}^{K_j} \omega_{j,k} \right) q_i^m + \sum_{k=1}^{K_i} \omega_{i,k} q_i^{(i,k)}, \qquad (7)$$
$$i = 1, 2, 3.$$

В силу допущений 2 и 3 имеют место соотношения

$$q_i^m = -\lambda_i^m \partial_i T_m \quad (i = 1, 2, 3); \qquad (8)$$

$$q_i^{(0,k)} = -\lambda_{i,k}^0 \partial_i T_{0,k} \quad (1 \le k \le K_0, \ i = 1, 2, 3); \qquad (9)$$

$$q_i^{(i,k)} = -\lambda_{i,k} \partial_i T_{i,k} \quad (1 \le k \le K_i, \ i = 1, 2, 3),$$
$$q_i^{(j,k)} = -\lambda_{j,k}^* \partial_i T_{j,k} \quad (1 \le k \le K_j, \ j \ne i, \qquad (10)$$
$$i, j = 1, 2, 3).$$

Подставим в уравнение (7) соотношение (8) и первое равенство (10), с учетом (1) и (4) после элементарных преобразований получим

$$q_i = -\left(a_i \lambda_i^m + \sum_{k=1}^{K_i} \omega_{i,k} \lambda_{i,k} \right) \partial_i T_m, \quad i = 1, 2, 3, \qquad (11)$$

где

$$a_i = 1 - \sum_{k=1}^{K_i} \omega_{i,k}, \quad i = 1, 2, 3. \qquad (12)$$

Подставим в условия сопряжения (5), (6) соотношения (8)—(10), будем иметь равенства:

$$\partial_i T_{0,k} = \frac{\lambda_i^m}{\lambda_{i,k}^0} \partial_i T_m \ (1 \le k \le K_0, \ i = 1, 2, 3);$$

$$\partial_i T_{j,k} = \frac{\lambda_i^m}{\lambda_{j,k}^*} \partial_i T_m \ (1 \le k \le K_j; \qquad (13)$$
$$j \ne i, \ i, j = 1, 2, 3).$$

Уравнение (3) после подстановки в него соотношений (4) и (13) примет вид

$$\partial_i T = \\ = \left(a + \sum_{k=1}^{K_0} \omega_{0,k} \frac{\lambda_i^m}{\lambda_{i,k}^0} + \sum_{k=1}^{K_i} \omega_{i,k} + \sum_{j=1,\,3}^{j\neq i} \sum_{k=1}^{K_j} \omega_{j,k} \frac{\lambda_i^m}{\lambda_{j,k}^*} \right) \times \\ \times \partial_i T_m, \quad i = 1,\,2,\,3. \tag{14}$$

Выразив из (14) производные $\partial_i T_m$ и подставив в равенство (11), получим

$$q_i = -\frac{a_i + \sum\limits_{k=1}^{K_i} \omega_{i,k} \dfrac{\lambda_{i,k}}{\lambda_i^m}}{\dfrac{a}{\lambda_i^m} + \sum\limits_{k=1}^{K_0} \dfrac{\omega_{0,k}}{\lambda_{i,k}^0} + \sum\limits_{k=1}^{K_i} \dfrac{\omega_{i,k}}{\lambda_i^m} + \sum\limits_{j=1,\,3}^{j\neq i} \sum\limits_{k=1}^{K_j} \dfrac{\omega_{j,k}}{\lambda_{j,k}^*}} \partial_i T, \tag{15}$$
$$i = 1,\,2,\,3.$$

Согласно допущению 1 закон Фурье для ортотропной среды имеет вид

$$q_i = -\Lambda_i' \partial_i T, \quad i = 1,\,2,\,3. \tag{16}$$

Из сравнения равенств (15), (16) следует, что эффективные коэффициенты теплопроводности рассматриваемого гибридного композита в главных осях анизотропии определяются следующей формулой:

$$\Lambda_i' = \frac{a_i + \sum\limits_{k=1}^{K_i} \omega_{i,k} \dfrac{\lambda_{i,k}}{\lambda_i^m}}{\dfrac{a}{\lambda_i^m} + \sum\limits_{k=1}^{K_0} \dfrac{\omega_{0,k}}{\lambda_{i,k}^0} + \sum\limits_{k=1}^{K_i} \dfrac{\omega_{i,k}}{\lambda_i^m} + \sum\limits_{j=1,\,3}^{j\neq i} \sum\limits_{k=1}^{K_j} \dfrac{\omega_{j,k}}{\lambda_{j,k}^*}}, \tag{17}$$
$$i = 1,\,2,\,3,$$

где следует учесть (12).

З а м е ч а н и е 1. Важная особенность построенной модели — возможность определения по градиенту усредненной температуры $\partial_i T$ тепловых потоков и градиентов температур $\partial_i T_m$, $\partial_i T_{j,k}$ во всех фазах композиции.

- Действительно, если из решения задачи теплопроводности для композитной среды известны производные усредненной температуры $\partial_i T$, то из (14) можно определить производные от температуры в связующем $\partial_i T_m$, а затем из (4), (13) — градиенты температуры в армирующих элементах $\partial_i T_{j,k}$ $(1 \le k \le K_j,\ 0 \le j \le 3,\ i = 1,\,2,\,3)$, после чего, используя закон Фурье (8)—(10), определим тепловые потоки в фазах композиции.

- Если композитный материал является лишь дисперсно-упрочненным (т. е. $\omega_{j,k} = 0$, $1 \le k \le K_j$, $j = 1,\,2,\,3$; $\omega_{0,k} > 0$, $1 \le k \le K_0$), то из (17) с учетом (12) получаем

$$\frac{1}{\Lambda_i'} = \frac{a}{\lambda_i^m} + \sum_{k=1}^{K_0} \frac{\omega_{0,k}}{\lambda_{i,k}^0}, \\ i = 1,\,2,\,3 \quad \left(a = 1 - \sum_{k=1}^{K_0} \omega_{0,k} \right). \tag{18}$$

- В случае изотропных материалов связующей матрицы и всех дисперсных включений ($\lambda_i^m = \lambda^m$, $\lambda_{i,k}^0 = \lambda_k^0$, $1 \le k \le K_0$, $i = 1,\,2,\,3$) из (18) следует теплофизическая изотропность композитного материала ($\Lambda_1' = \Lambda_2' = \Lambda_3'$).

- Если гибридный композит армирован лишь в одном направлении x'_i и не упрочнен дисперсно (т. е. $\omega_{j,k} = 0$, $1 \le k \le K_j$, $j \ne i$, $j = 0,\,1,\,2,\,3$; $\omega_{i,k} > 0$, $1 \le k \le K_j$), то из (17) с учетом (12) следует:

$$\Lambda_i' = a_i \lambda_i^m + \sum_{k=1}^{K_i} \omega_{i,k} \lambda_{i,k}, \quad \frac{1}{\Lambda_j'} = \frac{a}{\lambda_j^m} + \sum_{k=1}^{K_i} \frac{\omega_{i,k}}{\lambda_{i,k}^*}, \\ j \ne i, \quad j = 1,\,2,\,3 \quad \left(a_i = a = 1 - \sum_{k=1}^{K_i} \omega_{i,k} \right). \tag{19}$$

- В случае армирования одним семейством волокон ($K_j = 1$) соотношения (19) при соответствующих переобозначениях совпадают с формулой (1.20) в работе [2].

- Если гибридный композит армирован лишь в направлениях x'_1, x'_2 и не упрочнен дисперсно (т. е. $\omega_{j,k} = 0$, $1 \le k \le K_j$, $j = 0,\,3$; $\omega_{i,k} > 0$, $1 \le k \le K_i$, $i = 1,\,2$), то из (17) имеем

$$\Lambda_i' = \frac{a_i + \sum\limits_{k=1}^{K_i} \omega_{i,k} \dfrac{\lambda_{i,k}}{\lambda_i^m}}{\dfrac{a_j}{\lambda_i^m} + \sum\limits_{k=1}^{K_j} \dfrac{\omega_{j,k}}{\lambda_{j,k}^*}} \quad (j = 3 - i,\ \ i = 1,\,2), \\ \frac{1}{\Lambda_3'} = \frac{a}{\lambda_3^m} + \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{K_i} \frac{\omega_{i,k}}{\lambda_{i,k}^*}, \quad a = 1 - \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{K_i} \omega_{i,k}. \tag{20}$$

Выражение для Λ'_3 в (20) при соответствующих преобразованиях совпадает с полученной ранее в [2] формулой (2.23) для Λ_{33}. Выражения для Λ'_i в (20) не совпадают с полученными в работе [2] формулами (2.23) для Λ_{ii} ($i = 1,\,2$) при ортогональном армировании, так как в работе [2] использовались другие допущения для определения эффективных теплофизических характеристик перекрестно армированного композита (а именно, там осреднение проводилось по монотропным регулярно чередующимся слоям).

Помимо эффективных коэффициентов теплопроводности Λ'_i ($i = 1,\,2,\,3$), важной интегральной теплофизической характеристикой композита является удельная теплоемкость, которая для армированного материала, как и приведенная объемная плотность R, определяется по правилу простой смеси [3]

$$C = a\rho_m c_m + \sum_{i=0}^{3}\sum_{k=1}^{K_i} \omega_{i,k}\rho_{i,k}c_{i,k},$$
$$R = a\rho_m + \sum_{i=0}^{3}\sum_{k=1}^{K_i} \omega_{i,k}\rho_{i,k}, \qquad (21)$$

где ρ_m, $\rho_{0,k}$ — объемные плотности материалов связующей матрицы и k-го семейства дисперсных включений;

c_m, $c_{0,k}$ — удельные теплоемкости материалов связующего и k-го ($1 \le k \le K_0$) семейства дисперсных включений, соответственно;

$\rho_{j,k}$, $c_{j,k}$ — объемная плотность и удельная теплоемкость материала волокон k-го ($1 \le k \le K_j$) семейства, уложенных в направлении x'_j (j = 1, 2, 3), соответственно.

Сравнение расчетных и экспериментальных значений эффективных характеристик теплопроводности волокнистых материалов

Для сравнения расчетных значений эффективных коэффициентов теплопроводности (19) с экспериментальными данными рассмотрим однонаправленно армированную композицию (K_1 = 1, $K_0 = K_2 = K_3 = 0$, $\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{x}'$) с изотропным связующим ($\lambda_i^m \equiv \lambda^m$). Согласно формуле (19) эффективный коэффициент продольной теплопроводности определяется по закону простой смеси

$$\Lambda_{11} = \Lambda'_1 = \lambda_m (1-\omega_{1,1}) + \lambda_{1,1}\omega_{1,1}, \qquad (22)$$

а коэффициенты поперечной теплопроводности композиции характеризуются значениями

$$\Lambda_{22} \equiv \Lambda'_2 = \Lambda_{33} \equiv \Lambda'_3 = \left[(1-\omega_{1,1})/\lambda_m + \omega_{1,1}/\lambda_{1,1}^* \right]^{-1}. \qquad (23)$$

Известно [3—5], что эффективный коэффициент продольной теплопроводности, вычисленный по формуле (22), с достаточной степенью точности согласуется с экспериментом. Определение же эффективного коэффициента поперечной теплопроводности представляет собой весьма сложную задачу, требующую привлечения специального математического аппарата. Так, в [3] коэффициент поперечной теплопроводности композиции предлагается рассчитывать по отличной от (23) и более громоздкой формуле

$$\Lambda_{22} = \Lambda_{33} \approx \lambda_m \left[1+\omega_{1,1} + (1-\omega_{1,1})\lambda_m/\lambda_{1,1}^*\right] \Big/ \left[(1-\omega_{1,1}) + (1+\omega_{1,1})\lambda_m/\lambda_{1,1}^*\right], \qquad (24)$$

а в работе [5] для полимерных композитов рекомендуется использовать приближенную формулу

$$\Lambda_{22} = \Lambda_{33} \approx \lambda_m (1+2,54\omega_{1,1}) \Big/ \left[1-1,27\omega_{1,1} + 2,5/(\lambda_{1,1}^*/\lambda_m - 1)\right]. \qquad (25)$$

В случае двоякопериодического расположения волокон в плоскости, ортогональной направлению армирования, в [4] предлагается использовать в первом приближении формулу (24), а во втором — коэффициент поперечной теплопроводности определять как:

$$\Lambda_{22} = \Lambda_{33} \approx \Lambda_{22}^0 \times$$
$$\times \left\{ 1 + n^2 (n-1) \frac{\Lambda_{22}^0}{\lambda_m} \left(\frac{1-\lambda_{1,1}^*/\lambda_m}{(1-\omega_{1,1}) + (1+\omega_{1,1})\lambda_{1,1}^*/\lambda_m} \right)^2 \times \right.$$
$$\left. \times \frac{\sin^2\varphi_n}{\pi^n} \left[\omega_{1,1}^2 - \omega_{1,1}^{2n} \left(\frac{1-\lambda_{1,1}^*/\lambda_m}{1+\lambda_{1,1}^*/\lambda_m} \right)^2 \right] \right\}, \qquad (26)$$
$$\varphi_n = 2\pi/n,$$

где n = 4 при тетрагональной упаковке, n = 6 — при гексагональной упаковке; Λ_{22}^0 определяется из соотношения (24).

Проведем сравнение расчетных значений Λ_{11}, Λ_{22}, полученных по формулам (22)—(26), с экспериментальными данными. Сопоставление проведем для однонаправленного "микропластика" на основе волокон кевлар-49 и эпоксисвязующего DER 332/Джеффамин T-403 (табл. 1).

Таблица 1

Коэффициенты теплопроводности фазовых материалов "микропластика"

Направление теплопроводности	Значение λ_m (Вт/(м·К)) для эпоксисвязующего DER 332 / Джеффамин T-403 ([6], с. 106)	Значения $\lambda_{1,1}$, $\lambda^*_{1,1}$ (Вт/(м·К)) для волокон кевлар-49 ([6], с. 352)
Вдоль волокон	0,133	4,816 ($\lambda_{1,1}$)
Поперек волокон	0,133	4,110 ($\lambda^*_{1,1}$)

Экспериментальные и расчетные значения Λ_{11}, Λ_{22} для указанной композиции при плотности армирования $\omega_{1,1}$ = 0,6 приведены в табл. 2, из которой следует, что рассчитанное по формуле (22) значение коэффициента продольной теплопроводности композиции меньше экспериментального значения на 8,6 %, а рассчитанное по формуле (23) — значение коэффициента поперечной теплопроводности меньше экспериментального на 9,4 %. Значения же Λ_{22}, вычисленные по формулам (24)—(26), в 1,36; 2,18; 1,65 и 1,45 раза, соответственно, больше экспериментального.

Таблица 2

Значения эффективных коэффициентов теплопроводности однонаправленного "микропластика" на основе кевлара-49 и эпоксисвязующего DER 332 / Джеффамин Т-403

Источник	Λ_{11}, Вт/(м·К)	Λ_{22}, Вт/(м·К)
Экспериментальные значения ([6], с. 368)	3,22	0,35
Формулы (22), (23)	2,943	0,317
Формулы (22), (24)	2,943	0,475
Формулы (22), (25)	2,943	0,763
Формулы (22), (26) при $n = 4$	2,943	0,579
Формулы (22), (26) при $n = 6$	2,943	0,506

На практике, как правило, армирование тонкостенных конструкций осуществляется не в одном направлении, а перекрестно несколькими семействами волокон или арматуры. В табл. 3 приведены экспериментальные и расчетные значения эффективных коэффициентов теплопроводности ортогонально армированного ($K_1 = K_2 = 1$, $K_0 = K_3 = 0$, $\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{x}'$) органопластика на основе эпоксисвязующего и волокон кевлар-49.

Таблица 3

Коэффициенты теплопроводности перекрестно армированного композита на основе ткани кевлар-49 и эпоксидной системы DER 332 / Джеффамин Т-403 с объемным содержанием волокон 46 % ($\omega_{1,1} + \omega_{2,1} = 0{,}46$)

Характеристика	Эксперимент [6]	Расчет по формуле (20)	Отклонение от эксперимента, %
Λ_{33}, Вт/(м·К) (поперек слоев ткани)	0,22	0,240	8,9
Λ_{11}, Вт/(м·К) (вдоль волокон)	0,91	0,784	13,8

Из формулы (20) следует, что в случае перекрестной укладки волокон из одного и того же материала ($\lambda^*_{2,1} = \lambda^*_{1,1}$) коэффициент поперечной теплопроводности $\Lambda_{33} \equiv \Lambda'_3$ композиции не зависит от количественного распределения волокон в разных направлениях армирования, а зависит лишь от удельной суммарной интенсивности армирования ($\Omega = \omega_{1,1} + \omega_{2,1}$). Как видно из табл. 3, эта особенность модели (20) хорошо согласуется с экспериментом. Напротив, при определении эффективных коэффициентов теплопроводности композиции в плоскости армирования существенное влияние на расчетные значения $\Lambda_{ii} = \Lambda'_i$ в (20) оказывает удельное объемное содержание волокон $\omega_{i,1}$ в каждом направлении армирования x'_i ($i = 1, 2$). К сожалению, в работе [6] (см. там табл. 12.30) не указано, для какого типа ткани кевлар-49 проводились эксперименты, а приведено лишь объемное содержание волокон в композите ($\Omega = 0{,}46$). Однако согласно табл. 12.5 из [6] существуют разные типы тканей из пряжи кевлар-49, содержащие в разных пропорциях волокна в направлениях основы и утка, поэтому выбор типа ткани кевлар-49 оказывает влияние на расчетное значение Λ_{11}. В табл. 3 приведено расчетное значение Λ_{11} для ткани типа 143 ($\omega_{1,1} = 0{,}383$, $\omega_{2,1} = 0{,}077$), для которой наблюдается удовлетворительное согласование с экспериментом. Для других типов тканей получается значительное расхождение с экспериментальными данными. Так, например, для тканей типов 120, 181, 281, 285, 328 (см. табл. 12.5 в [6]) с одинаковым удельным содержанием волокон вдоль основы и утка ($\omega_{1,1} = \omega_{2,1} = 0{,}23$) расчетное значение $\Lambda_{11} = 1{,}56$ Вт/(м·К), что на 72 % превышает экспериментальную величину.

Таким образом, удовлетворительное согласование расчетных (вычисленных по формулам (19), (20)) и экспериментальных значений Λ'_1, Λ'_2, Λ'_3 (отклонения не превосходят 9–14 %) позволяет доверительно относиться к предложенной выше модели теплопроводности армированного композита.

Теплофизическая модель ортогонально армированной и дисперсно-упрочненной среды с учетом времени релаксации материалов фаз композиции

Рассмотрим прежний композитный материал и используем приведенные выше допущения 1—6, но учтем, что при высокоинтенсивных процессах теплопереноса соотношения обобщенного закона Фурье для всех фаз композиции отличаются от (8)—(10) и имеют следующий вид [7]:

$$q_i^m + \tau_i^m \partial_t q_i^m = -\lambda_i^m \partial_i T_m \quad (i = 1, 2, 3); \qquad (27)$$

$$q_i^{(0,k)} + \tau_{i,k}^0 \partial_t q_i^{(0,k)} = -\lambda_{i,k}^0 \partial_i T_{0,k} \quad (1 \le k \le K_0,\ i = 1, 2, 3); \qquad (28)$$

$$q_i^{(i,k)} + \tau_{i,k} \partial_t q_i^{(i,k)} = -\lambda_{i,k} \partial_i T_{i,k} \quad (1 \le k \le K_i,\ i = 1, 2, 3),$$
$$q_i^{(j,k)} + \tau_{i,k}^* \partial_t q_i^{(j,k)} = -\lambda_{j,k}^* \partial_i T_{j,k} \quad (1 \le k \le K_j,\ j \ne i,\ i, j = 1, 2, 3), \qquad (29)$$

где τ_i^m, $\tau_{i,k}^0$ — время релаксации материалов связующей матрицы и k-го ($1 \le k \le K_0$) семейства дисперсных включений в направлениях x'_i соответственно;

$\tau_{i,k}$, $\tau^*_{i,k}$ — время релаксации материала волокон k-го ($1 \le k \le K_j$) семейства в продольном и поперечном направлениях, соответственно, уложенных в направлении x'_i ($i = 1, 2, 3$);

∂_t — оператор частного дифференцирования по времени t.

Проинтегрируем соотношения (27)—(29) по времени t, тогда будем иметь:

$$q_i^m(\mathbf{x}', t) = \left[q_{i0}^m(\mathbf{x}') - \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\lambda_i^m}{\tau_i^m} \exp\left(\frac{s}{\tau_i^m}\right) \partial_i T_m(\mathbf{x}', s)\, ds \right] \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau_i^m}\right); \qquad (30)$$

$$q_i^{(0,k)}(\mathbf{x}', t) =$$

$$= \left[q_{i0}^{(0,k)}(\mathbf{x}') - \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\lambda_{i,k}^0}{\tau_{i,k}^0} \exp\left(\frac{s}{\tau_{i,k}^0}\right) \partial_i T_{0,k}(\mathbf{x}', s)\, ds \right] \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau_{i,k}^0}\right), \quad 1 \le k \le K_0; \qquad (31)$$

$$q_i^{(i,k)}(\mathbf{x}', t) =$$

$$= \left[q_{i0}^{(i,k)}(\mathbf{x}') - \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\lambda_{i,k}}{\tau_{i,k}} \exp\left(\frac{s}{\tau_{i,k}}\right) \partial_i T_{i,k}(\mathbf{x}', s)\, ds \right] \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau_{i,k}}\right),$$

$$q_i^{(j,n)}(\mathbf{x}', t) = \qquad (32)$$

$$= \left[q_{i0}^{(j,n)}(\mathbf{x}') - \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\lambda_{j,n}^*}{\tau_{j,n}^*} \exp\left(\frac{s}{\tau_{j,n}^*}\right) \partial_i T_{j,n}(\mathbf{x}', s)\, ds \right] \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau_{j,n}^*}\right),$$

$$1 \le k \le K_i, \ 1 \le n \le K_j, \quad j \ne i, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где $q_{i0}^m(\mathbf{x}') = q_i^m(\mathbf{x}', t_0)$, $q_{i0}^{(j,k)}(\mathbf{x}') = q_i^{(j,k)}(\mathbf{x}', t_0)$,

$1 \le k \le K_j$, $j = 0, 1, 2, 3;$ (33)

t_0 — начальный момент времени. (Далее для упрощения записей будем предполагать $t_0 = 0$.)

Согласно допущениям 4—6 остаются справедливыми равенства (3), (4), (7). Из равенства (3) с учетом (4) следует

$$\partial_i T = \left(a + \sum_{k=1}^{K_i} \omega_{i,k} \right) \partial_i T_m + \sum_{\substack{j=0,\,3 \\ j \ne i}} \sum_{k=1}^{K_j} \omega_{j,k} \partial_i T_{j,k}, \qquad (34)$$

$$i = 1, 2, 3,$$

а из условий сопряжения (5), (6) с учетом (30)—(32) имеем:

$$\left[q_{i0}^{(0,k)}(\mathbf{x}') - \int\limits_{0}^{t} \frac{\lambda_{i,k}^0}{\tau_{i,k}^0} \exp\left(\frac{s}{\tau_{i,k}^0}\right) \partial_i T_{0,k}(\mathbf{x}', s)\, ds \right] \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{t}{\tau_{i,k}^0}\right) = \left[q_{i0}^m(\mathbf{x}') - \int\limits_{0}^{t} \frac{\lambda_i^m}{\tau_i^m} \exp\left(\frac{s}{\tau_i^m}\right) \partial_i T_m(\mathbf{x}', s)\, ds \right] \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{t}{\tau_i^m}\right), \quad 1 \le k \le K_0, \qquad (35)$$

$$\left[q_{i0}^{(j,n)}(\mathbf{x}') - \int\limits_{0}^{t} \frac{\lambda_{j,n}^*}{\tau_{j,n}^*} \exp\left(\frac{s}{\tau_{j,n}^*}\right) \partial_i T_{j,n}(\mathbf{x}', s)\, ds \right] \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{t}{\tau_{j,n}^*}\right) = \left[q_{i0}^m(\mathbf{x}') - \int\limits_{0}^{t} \frac{\lambda_i^m}{\tau_i^m} \exp\left(\frac{s}{\tau_i^m}\right) \partial_i T_m(\mathbf{x}', s)\, ds \right] \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{t}{\tau_i^m}\right), \quad 1 \le n \le K_j, \quad j \ne i, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Выразим из (35) производные $\partial_i T_{0,k}$, $\partial_i T_{j,n}$ ($j \ne i$) через $\partial_i T_m$, тогда после элементарных преобразований получим

$$\partial_i T_{0,k}(\mathbf{x}', t) = a_{i,k}^0 \partial_i T_m(\mathbf{x}', t) + b_{i,k}^0(\mathbf{x}') \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{t}{\tau_i^m}\right) - c_{i,k}^0 \int\limits_{0}^{t} \exp\left(\frac{s - t}{\tau_i^m}\right) \partial_i T_{\mathbf{x}'}(\mathbf{x}', s)\, ds,$$

$$1 \le k \le K_0, \qquad (36)$$

$$\partial_i T_{j,n}(\mathbf{x}', t) = a_{ij}^{(n)} \partial_i T_m(\mathbf{x}', t) + b_{ij}^{(n)}(\mathbf{x}') \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{t}{\tau_i^m}\right) - c_{ij}^{(n)} \int\limits_{0}^{t} \exp\left(\frac{s - t}{\tau_i^m}\right) \partial_i T_m(\mathbf{x}', s)\, ds,$$

$$1 \le n \le K_j, \quad j \ne i, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где

$$a_{i,k}^0 = \frac{\tau_{i,k}^0 \lambda_i^m}{\tau_i^m \lambda_{i,k}^0}; \quad b_{i,k}^0(\mathbf{x}') = \frac{\tau_{i,k}^0 - \tau_i^m}{\tau_i^m \lambda_{i,k}^0} q_{i0}^m(\mathbf{x}');$$

$$c_{i,k}^0 = \frac{\tau_{i,k}^0 - \tau_i^m}{(\tau_i^m)^2} \frac{\lambda_i^m}{\lambda_{i,k}^0} \ (1 \le k \le K_0); \quad a_{ij}^{(n)} = \frac{\tau_{j,n}^* \lambda_i^m}{\tau_i^m \lambda_{j,n}^*}; \qquad (37)$$

$$b_{ij}^{(n)}(\boldsymbol{x}') = \frac{\tau^*_{j,n}-\tau_i^m}{\tau_i^m\lambda^*_{j,n}}q_{i0}^m(\boldsymbol{x}'); \quad c_{ij}^{(n)} = \frac{\tau^*_{j,n}-\tau_i^m}{(\tau_i^m)^2}\frac{\lambda_i^m}{\lambda^*_{j,n}};$$

$$1\le n\le K_j,\ \ j\ne i,\ \ i,\ j=1,\ 2,\ 3.$$

Введем для удобства дополнительные обозначения

$$a_{ii}^{(n)}=1,\ \ b_{ii}^{(n)}=c_{ii}^{(n)}=0,\ \ 1\le n\le K_i,\ \ i=1,\ 2,\ 3. \tag{38}$$

Подставим производные (36) в равенство (34), после чего получим

$$\partial_i T(\boldsymbol{x}', t) = A_i\partial_i T_m(\boldsymbol{x}', t) + B_i(\boldsymbol{x}')\exp\left(-\frac{t}{\tau_i^m}\right) - C_i\int_0^t \exp\left(\frac{s-t}{\tau_i^m}\right)\partial_i T_m(\boldsymbol{x}', s)\,ds,\ \ i=1,\ 2,\ 3, \tag{39}$$

где с учетом (37), (38) имеем выражения для коэффициентов

$$A_i = a+\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{K_j}\omega_{j,k}a_{ij}^{(k)};\ \ B_i=\sum_{k=1}^{K_0}\omega_{0,k}b_{i,k}^0 + \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{K_j}\omega_{j,k}b_{ij}^{(k)};\ \ C_i=\sum_{k=1}^{K_0}\omega_{0,k}c_{i,k}^0+\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{K_j}\omega_{j,k}c_{ij}^{(k)},$$
$$i=1,\ 2,\ 3. \tag{40}$$

Определим из уравнения (39) производные

$$\partial_i T_m(\boldsymbol{x}', t) = \partial_i T_{m0}(\boldsymbol{x}') - \frac{\partial_i T_0(\boldsymbol{x}')}{A_i}\exp(-D_i t) + \frac{\partial_i T(\boldsymbol{x}', t)}{A_i} + \frac{C_i}{A_i^2}\int_0^t \exp\left[D_i(s-t)\right]\partial_i T(\boldsymbol{x}', s)\,ds,$$
$$i=1,\ 2,\ 3, \tag{41}$$

где

$$D_i=\frac{1}{\tau_i^m}-\frac{C_i}{A_i};\quad \partial_i T_0(\boldsymbol{x}')=\partial_i T(\boldsymbol{x}', 0);$$
$$\partial_i T_{m0}(\boldsymbol{x}')=\partial_i T_m(\boldsymbol{x}', 0),\ \ i=1,\ 2,\ 3. \tag{42}$$

Из равенства (7) с учетом (30), (32) и (4) имеем

$$q_i(\boldsymbol{x}', t) = a_i\left[q_{i0}^m(\boldsymbol{x}') - \int_0^t\frac{\lambda_i^m}{\tau_i^m}\exp\left(\frac{s}{\tau_i^m}\right)\partial_i T_m(\boldsymbol{x}', s)\,ds\right]\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{t}{\tau_i^m}\right)+\sum_{k=1}^{K_i}\omega_{i,k}\left[q_{i0}^{(i,k)}(\boldsymbol{x}') - \int_0^t\frac{\lambda_{i,k}}{\tau_{i,k}}\exp\left(\frac{s}{\tau_{i,k}}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\partial_i T_m(\boldsymbol{x}', s)\,ds\right]\exp\left(-\frac{t}{\tau_{i,k}}\right),\quad i=1,\ 2,\ 3, \tag{43}$$

где a_i определены в (12).

Подставив в равенства (43) соотношения (41), получим

$$q_i(\boldsymbol{x}', t) = a_i q_{i0}^m(\boldsymbol{x}')\exp\left(-\frac{t}{\tau_i^m}\right)+ \sum_{k=1}^{K_i}\omega_{i,k}q_{i0}^{(i,k)}(\boldsymbol{x}')\exp\left(-\frac{t}{\tau_{i,k}}\right)-$$
$$-\int_0^t\left[\frac{a_i\lambda_i^m}{\tau_i^m}\exp\left(\frac{s-t}{\tau_i^m}\right)+\sum_{k=1}^{K_i}\frac{\omega_{i,k}\lambda_{i,k}}{\tau_{i,k}}\exp\left(\frac{s-t}{\tau_{i,k}}\right)\right]\times \tag{44}$$
$$\times\left\{\partial_i T_{m0}(\boldsymbol{x}') - \frac{\partial_i T_0(\boldsymbol{x}')}{A_i}\exp(-D_i s)+\frac{\partial_i T(\boldsymbol{x}', s)}{A_i} + \frac{C_i}{A_i^2}\int_0^s\exp\left[D_i(r-s)\right]\partial_i T(\boldsymbol{x}', r)\,dr\right\}ds,\ \ i=1,\ 2,\ 3.$$

Соотношения (44) с учетом равенств (12), (33), (37), (38), (40), (42) образуют искомую систему определяющих уравнений теплопроводности ($q_i = f_i(\partial_i T)$) дисперсно-упрочненного гибридного композитного материала, армированного волокнами в трех взаимно ортогональных направлениях x'_i при учете времени релаксации фаз композиции.

Замечание 2. Если до начального момента времени $t = t_0 = 0$ имелось стационарное температурное поле, то, зная $\partial_i T_0(\boldsymbol{x}')$, согласно ***замечанию 1***, можно определить $\partial_i T_{m0}(\boldsymbol{x}')$, а затем и $q_{i0}^m(\boldsymbol{x}')$, $q_{i0}^{(i,k)}(\boldsymbol{x}')$, входящие в равенства (44).

После подстановки соотношений (44) в уравнение теплового баланса [7]

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{q}+C\partial_t T+T\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\beta_{ij}\partial_t\varepsilon_{ij}=W, \tag{45}$$

получим интегродифференциальное уравнение теплопроводности относительно усредненной температуры T-композиции, которое не будем здесь приводить в развернутом виде.

В уравнении (45) приняты обозначения:

$\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, q_3)$;

C — задана соотношением (21);

W — приведенная плотность мощности внутренних источников тепла, которая определяется по правилу простой смеси от аналогичных величин для фаз композиции;

ε_{ij} — компоненты тензора упругих деформаций;

β_{ij} — компоненты тензора эффективных температурных жесткостей композиции.

Последняя группа слагаемых в левой части уравнения (45) учитывается, если рассматривается связанная задача термоупругости.

Для однозначного интегрирования уравнения теплопроводности к нему необходимо присоединить общеизвестные начальные и граничные условия теории теплопроводности твердых тел [7], которые в данной статье не приводятся.

Заключение

Предложенные модели теплопроводности в ортогонально армированных гибридных композитах демонстрируют удовлетворительное согласование расчетных и экспериментальных значений коэффициентов теплопроводности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Президиума СО РАН (постановление № 54 от 09.02.06, номер проекта 2.2).

Литература

1. *Гуров К. П.* Феноменологическая термодинамика необратимых процессов. — М.: Наука, 1978.
2. *Немировский Ю. В., Янковский А. П.*// Теплофизика и аэромеханика. 1998. Т. 5. № 2. С. 215—235.
3. Композиционные материалы: Справочник/ Под ред. Д. М. Карпиноса. — Киев: Наук. думка, 1985.
4. *Ванин Г. А.* Микромеханика композитных материалов. — Киев: Наук. думка, 1985.
5. *Шленский О. Ф.* Тепловые свойства стеклопластиков. — М.: Химия, 1973.
6. Справочник по композитным материалам: В 2-х кн. Кн. 1/ Под ред. Дж. Любина: Пер. с англ. А. Б. Геллера, М. М. Гельмонта/ Под ред. Б. Э. Геллера. — М.: Машиностроение, 1988.
7. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Обобщенная термомеханика. — Киев: Наук. думка, 1976.

Статья поступила в редакцию 7 ноября 2007 г.

Modelling of processes of heat conductivity in the orthogonal reinforced hybrid composites with disperse hardening binding

Yu. V. Nemirovsky, A. P. Yankovsky
Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Science, Novosibirsk, Russia

Models of heat conductivity the orthogonal reinforced fibrous environment with disperse hardening binding without taking into account are offered and in view of time of a relaxation of materials of phases of a composition. Comparison of settlement values of effective factors of heat conductivity is lead is unidirectional and the orthogonal reinforced composites with experimental data. The satisfactory coordination of settlement and experimental values of these sizes is shown.

УДК 532.529: 532.517.4

Математическое описание вращательного движения дисперсной фазы в турбулентном осесимметричном двухфазном потоке с учетом межчастичного взаимодействия

Б. Б. Рохман
Институт угольных энерготехнологий НАН и Минтопэнерго Украины, г. Киев, Украина

Получено замкнутое описание турбулентного и псевдотурбулентного переноса импульса и момента импульса в твердой фазе на основе уравнений для вторых моментов пульсаций линейной и угловой скоростей частиц с учетом сил аэродинамического сопротивления.

Введение

При турбулентном течении концентрированного газодисперсного потока в осесимметричном канале происходит интенсивное взаимодействие частиц между собой и стенкой трубы, которое оказывает существенное влияние на аэродинамическую структуру потока.

В настоящее время накоплен обширный экспериментальный материал по осредненным и пульсационным параметрам турбулентного течения двухфазной смеси в трубе. Однако его теоретическое обобщение еще далеко от завершения, поскольку во многих работах, посвященных моделированию таких течений, не учтены должным образом анизотропия поля энергии хаотического движения твердой фазы и эффекты, связанные с взаимодействием частиц между собой и стенкой канала, их вращением, действием силы Магнуса (М).