УДК 537.533

Уравнения для исследования времяпролетных характеристик движения заряженных частиц

А. Т. Ибраев

Казахстанская академия информации и бизнеса, г. Алматы, Республика Казахстан

Рассмотрены общие вопросы, связанные с исследованием как времяпролетных, так и пространственных характеристик фокусировки заряженных частиц.

Известно, что исследование времяпролетных характеристик движения заряженных частиц имеет важное значение для решения задач проектирования широкого класса аналитических приборов в электронно-оптической хронографии, времяпролетной масс-спектрометрии и т. п. [1, 2].

Настоящая работа относится к числу работ, являющихся продолжением работы [3]*.

Ввиду того, что времяпролетные характеристики движения заряженных частиц неразрывно связаны с пространственными параметрами их движения, начнем исследование с уравнений движения в параметрической форме.

Перепишем из [3] уравнения (37)—(39)

$$m\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2\left(p_2''-\frac{2p_1'}{\rho}-\frac{p_3}{\tau}+\frac{p_2}{\rho^2}-\frac{p_3'}{\tau}-\frac{p_2}{\tau^2}\right)+$$

$$+\left\{\frac{m}{2}\left[\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2\right]'+\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2 m'\right\}\left(p_2'+\frac{p_1}{\rho}-\frac{p_3}{\tau}\right)=$$

$$=-e\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{x=y=0}\right]-\frac{e}{c}\frac{ds_0}{dt}\times \tag{1}$$

$$\times\left[\left(p_2'+\frac{p_1}{\rho}-\frac{p_3}{\tau}\right)\frac{\partial\omega}{\partial s_0}-\left(1+p_1'-\frac{p_2}{\rho}\right)\frac{\partial\omega}{\partial y}-\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)_{x=y=0}\right];$$

$$m\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2\left(p_3''+\frac{2p_2'}{\tau}+\frac{p_1}{\rho\tau}-\frac{p_3}{\tau^2}\right)+$$

$$+\left\{\frac{m}{2}\left[\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2\right]'+\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2 m'\right\}\left(p_3'+\frac{p_2}{\tau}\right)=$$

$$=-e\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{x=y=0}\right]-\frac{e}{c}\frac{ds_0}{dt}\times \tag{2}$$

$$\times\left[\left(1+p_1'-\frac{p_2}{\rho}\right)\frac{\partial\omega}{\partial x}-\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)_{x=y=0}-\left(p_3'+\frac{p_2}{\tau}\right)\frac{\partial\omega}{\partial s_0}\right];$$

$$\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2\left[\ 1+p_1'^{\ 2}+p_2'^2+p_3'^2\ \right]=$$

$$=c^2\left\{1-\frac{m_0^2c^4}{\left[m_0c^2-e\ \ \varphi+\varepsilon\ \right]^2}\right\}. \tag{3}$$

Входящие в (1)—(3) $\frac{ds_0}{dt}$ и m определяются из уравнений

$$\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2=c^2\left[1-\frac{m_0{}^2c^4}{(m_0c^2-e\varphi_0)^2}\right]; \tag{4}$$

$$m=m_0-\frac{e(\varphi+\varepsilon)}{c^2}. \tag{5}$$

С учетом (4) и (5) уравнения (1)—(3) принимают вид

$$\varphi_0\,\frac{2m_0c^2-e\varphi_0\ \left[\ m_0c^2-e\ \ \varphi+\varepsilon\ \right]}{m_0c^2-e\varphi_0\ {}^2}\times$$

$$\times\left(p_2''-\frac{2p_1'}{\rho}-\frac{p_3}{\tau}+\frac{p_2}{\rho^2}-\frac{p_3'}{\tau}-\frac{p_2}{\tau^2}\right)+$$

$$+\left\{\varphi'+\frac{m_0{}^2c^4}{(m_0c^2-e\varphi_0)^2}\left[\frac{m_0c^2-e\ \ \varphi+\varepsilon}{m_0c^2-e\varphi_0}\varphi_0'-\varphi'\right]\right\}\times \tag{6}$$

$$\times\left(p_2'+\frac{p_1}{\rho}-\frac{p_3}{\tau}\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{x=y=0}+\sigma\sqrt{1-\frac{m_0^2c^4}{m_0c^2-e\varphi_0\ {}^2}}\times$$

$$\times\left[\left(p_2'+\frac{p_1}{\rho}-\frac{p_3}{\tau}\right)\frac{\partial\omega}{\partial s_0}-\left(1+p_1'-\frac{p_2}{\rho}\right)\frac{\partial\omega}{\partial y}-\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)_{x=y=0}\right];$$

$$\varphi_0\,\frac{2m_0c^2-e\varphi_0\ \left[\ m_0c^2-e\ \ \varphi+\varepsilon\ \right]}{m_0c^2-e\varphi_0\ {}^2}\times$$

$$\times\left(p_3''-\frac{2p_2'}{\rho}+\frac{p_1}{\rho\tau}-\frac{p_3}{\tau^2}\right)+ \tag{7}$$

$$+\left\{\varphi'+\frac{m_0{}^2c^4}{(m_0c^2-e\varphi_0)^2}\left[\frac{m_0c^2-e\ \ \varphi+\varepsilon}{m_0c^2-e\varphi_0}\varphi_0'-\varphi'\right]\right\}\times$$

---

* Здесь сохранены все принятые в [3] обозначения и при выводе новых соотношений использованы полученные в работе [3] результаты. Ранее введенные в [3] понятия и обозначения повторно не поясняются и не комментируются. Пояснения в работе будут даны только по вновь вводимым обозначениям.

$$\times\left(p_3' + \frac{p_2}{\tau}\right) = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{x=y=0} + \sigma\sqrt{1 - \frac{m_0^2c^4}{\left(m_0c^2 - e\varphi_0\right)^2}} \times$$

$$\times\left[\left(1 + p_1' - \frac{p_2}{\rho}\right)\frac{\partial\omega}{\partial x} - \left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)_{x=y=0} - \left(p_3' + \frac{p_2}{\tau}\right)\frac{\partial\omega}{\partial s_0}\right]; \quad (7)$$

$$\varphi_0 \frac{2m_0c^2 - e\varphi_0}{\left(m_0c^2 - e\varphi_0\right)^2}\left[\left(1 + p_1'\right)^2 + p_2'^2 + p_3'^2\right] =$$

$$= (\varphi + \varepsilon)\frac{2m_0c^2 - e(\varphi + \varepsilon)}{\left[m_0c^2 - e(\varphi + \varepsilon)\right]^2}. \quad (8)$$

Следующие выражения, входящие в левые части уравнений (6)—(8), приведем к виду

$$\varphi_0 \frac{(2m_0c^2 - e\varphi_0)[m_0c^2 - e(\varphi + \varepsilon)]}{(m_0c^2 - e\varphi_0)^2} =$$

$$= \frac{2m_0c^2 - e\varphi_0}{m_0c^2 - e\varphi_0}\varphi_0\left[1 - \frac{e(\varphi - \varphi_0 + \varepsilon)}{m_0c^2 - e\varphi_0}\right]; \quad (9)$$

$$\frac{m_0c^2 - e(\varphi + \varepsilon)}{m_0c^2 - e\varphi_0}\varphi_0' - \varphi' =$$

$$= -(\varphi' - \varphi_0') - \frac{(\varphi - \varphi_0) + \varepsilon}{m_0c^2 - e\varphi_0}e\varphi_0'. \quad (10)$$

Несложно видеть, что значение второй составляющей правой части (9) и значение правой части (10) могут рассматриваться как малые величины.

С учетом (9) и (10) уравнения (6) и (7) могут быть представлены в виде

$$\varphi_0 \frac{2m_0c^2 - e\varphi_0}{m_0c^2 - e\varphi_0}\left(p_2'' - \frac{2p_1'}{\rho} - \frac{p_3}{\tau} + \frac{p_2}{\rho} - \frac{p_3'}{\tau} - \frac{p_2}{\tau^2}\right) +$$

$$+ \varphi_0'\left(p_2' + \frac{p_1}{\rho} - \frac{p_3}{\tau}\right) + \psi_2 p_2 = f_2; \quad (11)$$

$$\varphi_0 \frac{2m_0c^2 - e\varphi_0}{m_0c^2 - e\varphi_0}\left(p_3'' + \frac{2p_2'}{\tau} + \frac{p_1}{\rho\tau} - \frac{p_3}{\tau^2}\right) +$$

$$+ \varphi_0'\left(p_3' + \frac{p_2}{\tau}\right) + \psi_3 p_3 = f_3, \quad (12)$$

где

$$\psi_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)p_2 + \sigma\sqrt{1 - \frac{m_0^2c^4}{(m_0c^2 - e\varphi_0)^2}}\left[\left(p_2' + \frac{p_1}{\rho} -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{p_3}{\tau}\right)\left(\frac{\partial\omega}{\partial s_0}\right)_{x=y=0} - \left(p_1' - \frac{p_2}{\rho}\right)\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)_{x=y=0}\right]; \quad (13)$$

$$\psi_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)p_3 + \sigma\sqrt{1 - \frac{m_0^2c^4}{(m_0c^2 - e\varphi_0)^2}} \times \quad (14)$$

$$\times\left[\left(p_1' - \frac{p_2}{\rho}\right)\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)_{x=y=0} - \left(p_3' + \frac{p_2}{\tau}\right)\left(\frac{\partial\omega}{\partial s_0}\right)_{x=y=0}\right];$$

$$f_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \left(\frac{\partial y}{dx}\right)_{x=y=0} + \psi_2 p_2 - \sigma\sqrt{1 - \frac{m_0^2c^4}{\left(m_0c^2 - e\varphi_0\right)^2}} \times$$

$$\times\left[\left(p_2' + \frac{p_1}{\rho} - \frac{p_3}{\tau}\right)\frac{\partial\omega}{\partial s_0} - \left(1 + p_1' - \frac{p_2}{\rho}\right)\frac{\partial\omega}{\partial y} - \left(\frac{\partial\omega}{\sigma y}\right)_{x=y=0}\right] +$$

$$+ \frac{2m_0c^2 - e\varphi_0}{m_0c^2 - e\varphi_0}\varphi_0\frac{e(\varphi - \varphi_0 + \varepsilon)}{m_0c^2 - e\varphi_0}\left(p_2'' - \frac{2p_1}{\rho} - \right. \quad (15)$$

$$\left. - \frac{p_3}{\tau} + \frac{p_2}{\rho^2} - \frac{p_3'}{\tau} - \frac{p_2}{\tau^2}\right) + \frac{m_0^2c^4}{\left(m_0c^2 - e\varphi_0\right)^2}\left[(\varphi' - \varphi_0') + \right.$$

$$\left. + \frac{(\varphi - \varphi_0) + \varepsilon}{m_0c^2 - e\varphi_0}e\varphi_0'\right]\left(p_2' + \frac{p_1}{\rho} - \frac{p_3}{\tau}\right);$$

$$f_3 = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{x=y=0} + \psi_3 p_3 + \sigma\sqrt{1 - \frac{m_0^2c^4}{\left(m_0c^2 - e\varphi_0\right)^2}} \times$$

$$\times\left[\left(1 + p_1' - \frac{p_2}{\rho}\right)\frac{\partial\omega}{\partial x} - \left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)_{x=y=0} - \left(p_3' + \frac{p_2}{\tau}\right)\frac{\partial\omega}{\partial s_0}\right] +$$

$$+ e\varphi_0\frac{2m_0c^2 - e\varphi_0}{\left(m_0c^2 - e\varphi_0\right)^2}(\varphi - \varphi_0 + \varepsilon)\left(p_3'' + \frac{2p_2}{\tau} + \right. \quad (16)$$

$$\left. + \frac{p_1}{\rho\tau} - \frac{p_3}{\tau^2}\right) + \frac{m_0^2c^4}{\left(m_0c^2 - e\varphi_0\right)^2} \times$$

$$\times\left[(\varphi' - \varphi_0') - e\varphi_0\frac{(\varphi - \varphi_0) + \varepsilon}{m_0c^2 - e\varphi_0}\right]\left(p_3' + \frac{p_2}{\tau}\right).$$

Используем в уравнениях (11) и (12) понятие эффективного потенциала $\varphi_{\theta 0}$, который связан со значением потенциала φ_0 следующим образом:

$$\varphi_{\theta 0} = \varphi_0\left(1 - \frac{e}{2m_0c^2}\varphi_0\right). \quad (17)$$

Тогда (11) и (12) с учетом (13)—(16) принимают вид

$$2\varphi_{\theta 0}\left(p_2'' - \frac{2p_1}{\rho} - \frac{p_3}{\tau} + \frac{p_2}{\rho} - \frac{p_3}{\tau} - \frac{p_2}{\tau^2}\right) + \quad (18)$$

$$+ \varphi_{\theta 0}'\left(p_2' + \frac{p_1}{\rho} - \frac{p_3}{\tau}\right) + k_\theta\psi_2 p_2 = k_\theta f_2;$$

$$2\varphi_{\theta 0}\left(p_3'' + \frac{2p_1'}{\tau} + \frac{p_1}{\rho\tau} - \frac{p_3}{\tau^2}\right) +$$

$$+\varphi_{\theta 0}'\left(p_3' + \frac{p_2}{\tau}\right) + k_\theta \psi_3 p_3 = k_\theta f_3, \tag{19}$$

где

$$k_\theta = 1 - \frac{e}{m_0 c^2}\varphi_0. \tag{20}$$

С учетом (17) и (20) из (8) получим

$$2\varphi_{\theta 0} p_1' - \left(\varphi_{\theta 0}' + \frac{2e}{k_\theta m_0 c^2}\varphi_{\theta 0}\varphi_0'\right) p_1 = f_1, \tag{21}$$

где

$$f_1 = -\varphi_{\theta 0} p_1'^2 - \varphi_{\theta 0} p_2'^2 - \varphi_{\theta 0} p_3'^2 + \left[\frac{m_0 c^2 - e\varphi_0}{m_0 c^2 - e\ \ \varphi + \varepsilon}\right]^2 \times$$

$$\times \varphi_{\theta\varepsilon} - \varphi_{\theta 0} - \left(\varphi_{\theta 0}' + \frac{2e}{k_\theta m_0 c^2}\varphi_{\theta 0}\varphi_0'\right) p_1. \tag{22}$$

В (22) принято обозначение

$$\varphi_{\theta\varepsilon} = \ \ \varphi + \varepsilon\ \left[1 - \frac{e}{2m_0 c^2}\ \ \varphi + \varepsilon\ \right].$$

Перейдем теперь к определению значения времени пролета заряженных частиц. Из уравнения (4) следует, что время пролета основной частицы может быть определено с помощью следующего выражения:

$$t(s_0) = \frac{\sigma}{c}\int\left[1 - \frac{m_0^2 c^4}{(m_0 c^2 - e\varphi_0)^2}\right]^{-1/2} ds_0. \tag{23}$$

Для произвольной частицы, как показано в работе [3], продольная составляющая s определяется уравнением

$$s = s_0 + p_1(s_0). \tag{24}$$

Из уравнения (24) переменная s_0 может быть представлена в виде

$$s_0 = s - p_1\ \ s - p_1(s - p_1(...))\ \ .$$

Ограничившись здесь тремя первыми членами разложения

$$s_0 = s - p_1(s) + p_1'(s) p_1(s) + ... \tag{25}$$

и подставив (25) в левую часть уравнения (23), получим

$$t_N(s) = t\ \ s_0(s)\ \ = t(s - p_1 + p_1' p) = t_0(s) - t_0'(s) p_1(s) +$$

$$+ t_0'(s) p_1'(s) p_1(s) + \frac{t_0''(s)}{2} p_1^2(s) - ... \tag{26}$$

Индекс "N" в (26) обозначает, что время определяется для произвольной частицы, $t_0(s)$ представляет собой время пролета пути s основной частицы; второй, третий и четвертый члены правой части уравнения (26) характеризуют времяпролетные аберрации движения заряженных частиц в исследуемых полях.

Используя полученные выше результаты, определим времяпролетные характеристики для электростатической двоякосимметричной катодной линзы. Функцию распределения потенциала для такой линзы можно представить в виде ряда

$$\varphi\ \ x, y, s\ \ = \varphi_0(s) - \left[\frac{1}{4}\varphi_0''(s) - \varphi_{sq}(s)\right] x^2 -$$

$$-\left[\frac{1}{4}\varphi_0''(s) + \varphi_{sq}(s)\right] y^2 + ..., \tag{27}$$

где φ_{sq} — квадрупольная составляющая электростатического потенциала.

В (27) ограничились членами разложения не выше второго порядка малости. Отметим, использование более высоких порядков разложения потенциала может быть необходимым при анализе аберраций более высоких порядков малости.

Учитывая (27) и полагая $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\tau} = 0$, $x = p_2$ и $y = p_3$, из (18), (19) и (21) имеем

$$2\varphi_{\theta 0} p_2'' + \varphi_{\theta 0}' p_2' + k_\theta\left(\frac{1}{2}\varphi_0'' - 2\varphi_{sq}\right) p_2 = 0; \tag{28}$$

$$2\varphi_{\theta 0} p_3'' + \varphi_{\theta 0}' p_3' + k_\theta\left(\frac{1}{2}\varphi_0'' + 2\varphi_{sq}\right) p_3 = 0; \tag{29}$$

$$2\varphi_{\theta 0} p_1' - \left(\varphi_{\theta 0}' + \frac{2e}{k_\theta m_0 c^2}\varphi_{\theta 0}\varphi_0'\right) p_1 = f_{p1}, \tag{30}$$

где

$$f_{p1} = -\varphi_{\theta 0} p_1'^2 - \varphi_{\theta 0} p_2'^2 - \varphi_{\theta 0} p_3'^2 +$$

$$+\left[\frac{k_\theta}{2}\varphi_0'' + \frac{2e}{k_\theta m_0 c^2}\left(\varphi_0'\varphi_{\theta 0}' + \frac{\varphi_0''}{2}\varphi_{\theta 0}\right) + \right. \tag{31}$$

$$\left. + \frac{3e^2}{k_\theta{}^2 m_0{}^2 c^4}\varphi_0'^2\varphi_{\theta 0}\right] p_1^2 + \left(\frac{k_1}{2}\varphi_{xx} + \frac{e}{kp m_0 c}\varphi_{\theta 0}\varphi_{xx}\right) \times$$

$$\times p_2^2 + \left(\frac{k_p}{2}\varphi_{yy} + \frac{e}{k_y m_0 c^2}\varphi_{\theta 0}\varphi_{yy}\right) p_3^2 + \left(k_\varphi + \frac{2e}{k_\varphi m_0 c^2}\right)\varepsilon.$$

В (31) введены следующие обозначения

$$\varphi_{xx} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \qquad \varphi_{yy} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}.$$

Уравнения (28) и (29) представляют собой параксиальные уравнения траекторий в поле двоякосимметричной электростатической катодной линзы и их решения, согласно теории дифференциальных уравнений, можно записать в виде

$$p_2(s) = a_2 u_2(s) + b_2 v_2(s); \qquad (32)$$

$$p_3(s) = a_3 u_3(s) + b_3 v_3(s), \qquad (33)$$

где u_2, u_3, v_2 и v_3 — частные линейно-независимые решения уравнений (28) и (29);

a_2, a_3, b_2 и b_3 — постоянные, которые должны быть определены исходя из начальных условий.

Указанные в работе [3] начальные условия (6)—(8) для исследуемого случая принимают вид

$$p_2(t)\big|_{t=t_b} = x_b, \quad \frac{dp_2}{dt}\bigg|_{t=t_b} = \sqrt{-\frac{2e}{m}\varepsilon_x}; \qquad (34)$$

$$p_3(t)\big|_{t=t_b} = y_b, \quad \frac{dp_3}{dt}\bigg|_{t=t_b} = \sqrt{-\frac{2e}{m}\varepsilon_y}; \qquad (35)$$

$$p_1(t)\big|_{t=t_b} = s_b, \quad \frac{dp_1}{dt}\bigg|_{t=t_b} = \sqrt{-\frac{2e}{m}\varepsilon_s}, \qquad (36)$$

где ε_x, ε_y и ε_s характеризуют составляющие начальной энергии

$$-e\varepsilon = -e\ \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_s\ .$$

Примем, что координаты центра катода равны $x_k = y_k = s_k = 0$. Индекс "k" здесь указывает на принадлежность величин поверхности катода. Кроме того, потенциал катода при исследовании катодных линз принимается равным нулю

$$\varphi(x_k, y_k, z_k) = 0. \qquad (37)$$

Учитывая (37), одно решение из пары линейно-независимых решений в общих решениях (32) и (33) ищем в виде

$$v_2 = w_2\sqrt{\varphi_{\theta 0}}, \quad v_3 = w_3\sqrt{\varphi_{\theta 0}}, \qquad (38)$$

где w_2 и w_3 — функции, удовлетворяющие уравнениям

$$2\varphi_0 w_2'' + 3\varphi_0' w_2' + \left[\left(1+\frac{k_\theta}{2}\right)\varphi_0'' - 2\varphi_{sq}\right] w_2 = 0; \qquad (39)$$

$$2\varphi_0 w_3'' + 3\varphi_0' w_3' + \left[\left(1+\frac{k_\theta}{2}\right)\varphi_0'' + 2\varphi_{sq}\right] w_3 = 0. \qquad (40)$$

Начальные условия для функций u_2, u_3, w_2, w_3 имеют вид

$$u_2(s)\big|_{s=0} = u_3(s)\big|_{s=0} = w_2(s)\big|_{s=0} = w_3(s)\big|_{s=0} = 1, \qquad (41)$$

$$u_2'(s)\big|_{s=0} = -\frac{\varphi_{0k}' - 4\varphi_{sq.k}}{2\varphi_{0k}'},$$

$$u_3'(s)\big|_{s=0} = -\frac{\varphi_{0k}' + 4\varphi_{sq.k}}{2\varphi_{0k}'},$$

$$w_2'(s)\big|_{s=0} = -\frac{3\varphi_{0k}' - 4\varphi_{sq.k}}{6\varphi_{0k}'},$$

$$w_3'(s)\big|_{s=0} = -\frac{3\varphi_{0k}' + 4\varphi_{sq.k}}{6\varphi_{0k}'}. \qquad (42)$$

Из (32) и (33) с учетом (34), (35), (37), (38) и (41) получим

$$a_2 = x_b, \quad a_3 = y_b. \qquad (43)$$

Продифференцировав (32) и (33) и учитывая (34), (35), (37), (38)—(42), находим

$$b_2 = \frac{2}{\varphi_k'}\sqrt{\varepsilon_x}, \quad b_3 = \frac{2}{\varphi_k'}\sqrt{\varepsilon_y}. \qquad (44)$$

После подстановки значений постоянных из (43) и (44) уравнения (32) и (33) принимают вид

$$p_2(s) = x_k u_2(s) + \frac{2}{\varphi_k'}\sqrt{\varepsilon_x}\, v_2(s); \qquad (45)$$

$$p_3(s) = y_k u_3(s) + \frac{2}{\varphi_k'}\sqrt{\varepsilon_y}\, v_3(s). \qquad (46)$$

Далее перейдем к решению уравнения (30) методом последовательных приближений, приняв в первом приближении $f_{p1} = 0$. Решение полученного таким образом из (30) линейного однородного уравнения имеет вид

$$p_{11}(s) = a_1\sqrt{\varphi_{\theta 0}(s)}\,\frac{1}{k_\theta}, \qquad (47)$$

где a_1 — постоянная, значение которой определяется из начальных условий (36).

Учитывая, что для прикатодной области

$$\frac{dp_{11}}{dt}\bigg|_{t=t_b} = \frac{ds_0}{dt}\, p_{11}'\big|_{t=t_b} = \frac{\varphi_0'}{2}\sqrt{-\frac{2e}{m}}\, a_1\big|_{t=t_b},$$

а также используя (36), получим

$$a_1 = \frac{2}{\varphi_k'}\sqrt{\varepsilon_s}. \qquad (48)$$

Из (47) и (48) следует

$$p_{11}(s) = \frac{2}{\varphi'_k}\sqrt{\varepsilon_s}\sqrt{\varphi_{\theta 0}(s)}\frac{1}{k_\theta}. \qquad (49)$$

Во втором приближении в уравнении (30) учитывается правая часть, которая с учетом (45), (46) и (49) имеет вид

$$f_{p1} = x_k^2\left[-\varphi_{\theta 0}u_2'^2 + \left(\frac{k_\theta}{2} + \frac{e}{k_\theta m_0 c^2}\varphi_{\theta 0}\right)\varphi_{xx}u_2^2\right] +$$
$$+x_k\sqrt{\varepsilon_x}\left[-\varphi_{\theta 0}\frac{4}{\varphi'_{\theta k}}u_2'v_2' + \left(\frac{k_\theta}{2} + \frac{e}{k_\theta m_0 c^2}\varphi_{\theta 0}\right)\varphi_{xx}\frac{4}{\varphi'_{0k}}u_2v_2\right] +$$
$$+\varepsilon_x\left[-\varphi_{\theta 0}\frac{4}{\varphi'^{\,2}_{\theta k}}v_2'^2 + \left(\frac{k_\theta}{2} + \frac{e}{k_\theta m_0 c^2}\varphi_{\theta 0}\right)\varphi_{xx}\frac{4}{\varphi'^{\,2}_{0k}}v_2^2 +\right.$$
$$\left. + k + \frac{2e}{k_\theta m_0 c^2}\right] + y_k^2\left[-\varphi_{\theta 0}u_3'^2 + \left(\frac{k_\theta}{2} + \frac{e}{k_\theta m_0 c^2}\varphi_{\theta 0}\right)\varphi_{yy}u_3^2\right] +$$
$$+y_k\sqrt{\varepsilon_y}\left[-\varphi_{\theta 0}\frac{4}{\varphi'_{\theta k}}u_3'v_3' + \left(\frac{k_\theta}{2} + \frac{e}{k_\theta m_0 c^2}\varphi_{\theta 0}\right)\varphi_{yy}\frac{4}{\varphi'_k}u_3v_3\right] +$$
$$+\varepsilon_y\left[-\varphi_{\theta 0}\frac{4}{\varphi'^{\,2}_{\theta k}}v_3'^2 + \left(\frac{k_\theta}{2} + \frac{e}{k_\theta m_0 c^2}\varphi_{\theta 0}\right)\varphi_{yy}\frac{4}{\varphi'^{\,2}_{0k}}v_3^2 +\right.$$
$$\left. + k + \frac{2e}{k_\theta m_0 c^2}\right] + \varepsilon_s\left\{-\frac{1}{\varphi'^2_k}\varphi_{\theta 0}\varphi_0'^2\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi_{\theta 0}}} + \frac{e}{m_0 c^2}\frac{1}{k_\theta}\right)^2 +\right.$$
$$+\frac{4\varphi_0}{k_\theta^2\varphi_k'^2}\left[\frac{k_\theta}{2}\varphi_0'' + \frac{2e}{k_\theta m_0 c^2}\left(\varphi_0'\varphi_{\theta 0}' + \frac{\varphi_0''}{2}\varphi_{\theta 0}\right) +\right.$$
$$\left.\left. + \frac{3e^2}{k_\theta^2 m_0^2 c^4}\varphi_0'^2\varphi_{\theta 0}\right] + k_\theta + \frac{2e}{k_\theta m_0 c^2}\right\}.$$

Полученное общее решение уравнения (30) представим в виде

$$p_1 = p_{11} + p_{12} = \frac{2\sqrt{\varphi_{\theta 0}}}{\varphi'_k k_\theta}\sqrt{\varepsilon_s} + B_1x_k^2 + B_2x_k\sqrt{\varepsilon_x} +$$
$$+B_3\varepsilon_x + B_4y_k^2 + B_5y_k\sqrt{\varepsilon_y} + B_6\varepsilon_y + B_7\varepsilon_s. \qquad (50)$$

В этом уравнении первый член правой части описывает продольную аберрацию первого порядка, дальнейшие члены — продольные аберрации второго порядка малости. Аберрационные коэффициенты B_1—B_7 определяются из выражений:

$$B_1 = \frac{\sqrt{\varphi_0}}{2k_\theta}\int\frac{k_\theta}{\varphi_0\sqrt{\varphi_0}} \times$$
$$\times\left[-\varphi_{\theta 0}u_2'^2 + \left(\frac{k_\theta}{2} + \frac{e}{k_\theta m_0 c^2}\varphi_{\theta 0}\right)\varphi_{xx}u_2^2\right]ds_0;$$

$$B_2 = \frac{\sqrt{\varphi_0}}{2k_\theta}\int\frac{k_\theta}{\varphi_0\sqrt{\varphi_0}} \times$$
$$\times\left[-\varphi_{\theta 0}\frac{4}{\varphi'_{\theta k}}u_2'v_2' + \left(\frac{k_\theta}{2} + \frac{e}{k_\theta m_0 c^2}\varphi_{\theta 0}\right)\varphi_{xx}\frac{4}{\varphi'_{0k}}u_2v_2\right]ds_0;$$

$$B_3 = \frac{\sqrt{\varphi_0}}{2k_\theta}\int\frac{k_\theta}{\varphi_0\sqrt{\varphi_0}}\left[-\varphi_{\theta 0}\frac{4}{\varphi'^{\,2}_{\theta k}}v_2'^2 +\right.$$
$$\left. + \left(\frac{k_\theta}{2} + \frac{e}{k_\theta m_0 c^2}\varphi_{\theta 0}\right)\varphi_{xx}\frac{4}{\varphi'^{\,2}_{0k}}v_2^2 + k + \frac{2e}{k_\theta m_0 c^2}\right]ds_0;$$

$$B_4 = \frac{\sqrt{\varphi_0}}{2k_\theta}\int\frac{k_\theta}{\varphi_0\sqrt{\varphi_0}} \times$$
$$\times\left[-\varphi_{\theta 0}u_3'^2 + \left(\frac{k_\theta}{2} + \frac{e}{k_\theta m_0 c^2}\varphi_{\theta 0}\right)\varphi_{yy}u_3^2\right]ds_0;$$

$$B_5 = \frac{\sqrt{\varphi_0}}{2k_\theta}\int\frac{k_\theta}{\varphi_0\sqrt{\varphi_0}}\left[-\varphi_{\theta 0}\frac{4}{\varphi'_{\theta k}}u_3'v_3' +\right.$$
$$\left. + \left(\frac{k_\theta}{2} + \frac{e}{k_\theta m_0 c^2}\varphi_{\theta 0}\right)\varphi_{yy}\frac{4}{\varphi'_k}u_3v_3\right]ds_0;$$

$$B_6 = \frac{\sqrt{\varphi_0}}{2k_\theta}\int\frac{k_\theta}{\varphi_0\sqrt{\varphi_0}}\left[-\varphi_{\theta 0}\frac{4}{\varphi'^{\,2}_{\theta k}}v_3'^2 + \left(\frac{k_\theta}{2} + \frac{e}{k_\theta m_0 c^2}\varphi_{\theta 0}\right)\times\right.$$
$$\left. \times\varphi_{yy}\frac{4}{\varphi'^{\,2}_{0k}}v_3^2 + k + \frac{2e}{k_\theta m_0 c^2}\right]ds_0;$$

$$B_7 = \frac{\sqrt{\varphi_0}}{2k_\theta}\int\frac{k_\theta}{\varphi_0\sqrt{\varphi_0}}\left[-\frac{1}{\varphi'^2_k}\varphi_{\theta 0}\varphi_0'^2 \times\right.$$
$$\times\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi_{\theta 0}}} + \frac{e}{m_0 c^2}\frac{1}{k_\theta}\right)^2 + \frac{4\varphi_0}{k_\theta^2\varphi_k'^2}\left[\frac{k_\theta}{2}\varphi_0'' +\right.$$
$$\left. + \frac{2e}{k_\theta m_0 c^2}\left(\varphi_0'\varphi_{\theta 0}' + \frac{\varphi_0''}{2}\varphi_{\theta 0}\right) + \frac{3e^2}{k_\theta^2 m_0^2 c^4}\varphi_0'^2\varphi_{\theta 0}\right] +$$
$$\left. + k_\theta + \frac{2e}{k_\theta m_0 c^2}\right]ds_0.$$

Подставив (50) и (23) в (26) и удерживая члены не выше второго порядка малости, получим

$$t_N(s) = t_0(s) + t_1(s) + t_2(s),$$

где $t_0(s)$ — время пролета пути s основной частицей, которая определяется по формуле (23); $t_1(s)$ — времяпролетная аберрация первого порядка и $t_2(s)$ — суммарная времяпролетная аберрация второго порядка, которые определяются следующими выражениями:

$$t_1(s) = -\frac{\sigma}{\varphi_k'}\sqrt{-\frac{m_0}{2e}}\sqrt{\varepsilon_s}\ ;$$

$$t_2(s) = T_1 x_k^2 + T_2 x_k \sqrt{\varepsilon_x} + T_3\varepsilon_x + T_4 y_k^2 + +T_5 y_k \times$$
$$\times\sqrt{\varepsilon_y} + T_6\varepsilon_y + T_7\varepsilon_s,$$

где

$$T_1 = \kappa_T(s)B_1,\quad T_2 = \kappa_T(s)B_2,\quad T_3 = \kappa_T(s)B_3,$$
$$T_4 = \kappa_T(s)B_4,\quad T_5 = \kappa_T(s)B_5,\quad T_6 = \kappa_T(s)B_6,$$
$$T_7 = \kappa_T(s)\left[B_7 - \frac{2}{\varphi_k'^2}\frac{\varphi_0'}{k_\theta}\left(1 + \frac{e}{m_0c^2}\frac{\sqrt{\varphi_{\theta 0}}}{k_\theta}\right)\right] -$$
$$-\frac{\kappa_T'(s)}{\varphi_k'}\frac{\sqrt{\varphi_{\theta 0}}}{k_\theta}.$$

Здесь

$$\kappa_T(s) = -\sigma\sqrt{-\frac{m_0}{2e}}\frac{k_\theta}{\sqrt{\varphi_{\theta 0}}}.$$

Отметим, что в последних выражениях аберрационные коэффициенты T_1 и T_4 характеризуют (полевые) времяпролетные аберрации положения второго порядка, T_2 и T_5 — времяпролетные хроматические аберрации положения второго порядка, T_3, T_6 и T_7 — времяпролетные сферохроматические аберрации второго порядка.

Литература

1. *Мамырин Б. А., Шмик Д. В.*//ЖЭТФ, 1979. № 76. С. 1500.

2. *Ильин В. П., Катешов В. А., Куликов Ю. В., Монастырский М. А.* Численные методы оптимизации эмиссионных электронно-оптических систем. — Новосибирск: Наука, 1987.

3. *Ибраев А. Т.* Общие уравнения теории фокусировки в постоянных электрических и магнитных полях: Тезисы Восьмого Всероссийского семинара "Проблемы теоретической и прикладной электронной и ионной оптики". — М., 2007.

Статья поступила в редакцию 14 ноября 2007 г.

The equations for research of the time-of-flight characteristics for movement of charged particles

A. T. Ibraev
Kazakhstan Academy of Information and Business, Almaty, Republic Kazakhstan

In the given work the general questions, connected with research as the time-of-flight characteristics, and the spatial characteristics of focusing the charged particles, are considered.

УДК 621.3.032.269.1+621.385.6

Метод и программа моделирования электронных пучков в электронно-оптических системах приборов СВЧ О-типа с полевой эмиссией

А. И. Петросян, В. И. Роговин
ФГУП «Научно-производственное предприятие "Алмаз"», г. Саратов, Россия

Представлены метод расчета и программа численного проектирования на ЭВМ электронно-оптических систем приборов СВЧ О-типа с полевой эмиссией. Программа позволяет рассчитывать ЭОС с матричными углеродными автоэмиссионными катодами, катодами типа Спиндта и лезвийными катодами. Правильность работы программы подтверждена в результате решения тестовой задачи, а также путем сопоставления данных расчета с результатами экспериментального исследования электронного пучка.