УДК 537.213.537.811

О РАСЧЕТАХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

В. П. Ильин

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирск, Россия, e-mail: ilin@comcen.nsk.su

Рассмотрены эффективные численные методы для решения уравнения

$$-\frac{1}{x^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x}\lambda x^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\lambda\frac{\partial u}{\partial y}=f(x,y),$$

где λ, f — кусочно-гладкие функции, случаи $\alpha = 0,1$ соответствуют уравнению Пуассона в декартовых и цилиндрических координатах, а при $\alpha = -1$ — вышеприведенное уравнение описывает осесимметрическое магнитное поле. Описываются компактные схемы повышенной точности на равномерных прямоугольных сетках, а также их обобщения на неравномерные сетки, основанные на конечно-объемных балансных аппроксимациях. Дан обзор современных быстрых итерационных методов неполной факторизации для решения систем линейных алгебраических уравнений с разреженными матрицами очень большого порядка. Высокая скорость сходимости явных и неявных алгоритмов обеспечивается применением обобщенного принципа компенсации, адаптивной упорядоченности узлов сетки и ускорением с помощью метода сопряженных градиентов. Приведены результаты численных экспериментов, иллюстрирующие четвертый порядок точности компактных аппроксимаций, а также высокую скорость сходимости предлагаемых итерационных алгоритмов.

Цель данной работы — рассмотрение современных эффективных численных методов решения краевых задач, главным образом, для дифференциальных эллиптических уравнений вида

$$Lu = L_x u + L_y u = -\frac{1}{x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\lambda x^\alpha \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\lambda\frac{\partial u}{\partial y} = f(x,y)\,, \tag{1}$$

где случаи $\alpha = 1{,}0$ соответствуют уравнению Пуассона в цилиндрической и декартовой системах координат, а для $\alpha = -1$ уравнение (1) описывает распределение азимутальной компоненты магнитного поля [1]. Здесь λ и f — некоторые кусочно-непрерывные функции, определяющие материальные свойства сред, а решение u в дальнейшем предполагается обладающим той гладкостью, которая нам необходима.

Остановимся на двух вычислительных проблемах, определяющих конечную эффективность математического моделирования: методы аппроксимации повышенной точности и быстрые итерационные алгоритмы полученных алгебраических систем с разреженными матрицами высокого порядка.

В разделе 1 описываются методы конечных объемов (МКО), являющиеся предметом активных исследований и публикаций [2, 3] и подтверждающие известную истину о том, что новое – это хорошо забытое старое: по своей сути под новым названием развиваются балансные, или консервативные, разностные схемы. К настоящему времени наибольшее распространение в мировой практике для решения многомерных краевых задач получили методы конечных элементов (МКЭ), имеющие уникальную теорию и вычислительную технологию, обеспечивающие применение алгоритмов самого разного порядка точности к решению практически любого типа задач на произвольного вида сетках. Достоинствами МКО являются точное выполнение дискретных аналогов законов сохранения, а также возможность их построения на нерегулярных сетках, что позволяет рассматривать их как промежуточный "мостик" между МКЭ и традиционными разностными методами. Главные трудности МКО заключаются в построении схем повышенной точности. Некоторые результаты в данном направлении получены в работах [2, 3], где на основе линейной комбинации балансов на "больших" и "малых" элементарных ячейках для дву- и трехмерных уравнений Пуассона в декартовых системах координат получены семейства схем, из которых следуют, в частности, схемы Микеладзе четвертого порядка для равномерных сеток и постоянных коэффициентов. В данной работе эти результаты распространяются на дифференциальные уравнения в цилиндрической системе координат с учетом имеющихся особенностей вблизи оси симметрии.

В разделе 2 дается обзор современных результатов по быстрым итерационным методам неполной факторизации, которые к настоящему времени являются наиболее распространенными при решении практических задач и интенсивно развиваемыми в теоретическом плане [4, 5]. Их высокая эффективность основывается на использовании так называемых предобуславливающих матриц из принципа согласования строчных сумм, или компенсации, и ускорения итераций сопряженными градиентами. Ниже приводится сравнительный анализ экономичности и оценки скорости сходимости итераций для различных вариантов явных и неявных алгоритмов в зависимости от свойств исходной задачи и выбираемой упорядоченности узлов в двумерных или трехмерных задачах.

В разделе 3 приводятся результаты численных экспериментов для характерных методических примеров, иллюстрирующих как высокий порядок аппроксимации, так и количества итераций, необходимые для обеспечения требуемой точности решения.

1. Методы повышенной точности на прямоугольных сетках

Пусть $u_{i,j}$ означают значения функции в узлах регулярной прямоугольной сетки с координатами

$$x_i = x_{i-1} + h_i^x, \ i = 1,\ldots,I+1; \ y_i = y_{j-1} + h_j^y, \ j = 1,\ldots,J+1.$$

Компактные разностные схемы на равномерных сетках

Рассмотрим сначала девятиточечные конечно-разностные аппроксимации уравнения (1) на сеточном шаблоне типа "ящик" с узлами $i \pm l$, $j \pm m$; $l,m = 0,1$, которые на равномерной сетке с шагами $h_i^x = h_x$, $h_j^y = h_y$ имеют погрешность $O(h^4)$. Такие разностные схемы [6] позже в работах зарубежных авторов стали называться компактными. Наиболее общая идея их построения, предложенная А. А. Самарским [7] (и не получившая освещения, к сожалению, в его последующих монографиях), может быть проиллюстрирована на уравнении диффузии с переменными коэффициентами

$$-\frac{\partial}{\partial x} p \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} q \frac{\partial u}{\partial y} = f(x,y), \quad p > 0, \ q > 0. \tag{2}$$

Если для одномерных операторов L_x, L_y в (2) построить трехточечные аппроксимации L_x^h, L_y^h со свойствами вида

$$L_x^h u = L_x u - \frac{h_x^2}{12} L_x \frac{1}{p} L_x u + O(h^4), \tag{3}$$

то с их помощью конструируется следующая компактная (девятиточечная) схема для уравнения (2) с погрешностью четвертого порядка:

$$L^h u = L_x^h u + L_y^h u - \frac{h_x^2}{12} L_x^h \frac{1}{p} L_x^h u - \frac{h_y^2}{12} L_y^h \frac{1}{q} L_x^h u =$$

$$= f - \frac{h_x^2}{12} L_x^h \frac{f}{p} - \frac{h_y^2}{12} L_y^h \frac{f}{q} + O\left(h^4\right). \tag{4}$$

Отметим, что данный подход в работе [8] перенесен на системы дифференциальных уравнений.

Применяя эту методологию для уравнения Пуассона в цилиндрической системе координат ($\alpha = 1$ в (1) при естественном краевом условии $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$), рассмотрим для $r > 0$ одномерный "радиальный" оператор на равномерной сетке

$$\left(L_{1,x}^h u\right)_i \equiv \frac{1}{h_x^2 x_i}\left[x_{i+1/2}^{(1)}\left(u_i - u_{i+1}\right) + x_{i-1/2}^{(1)}\left(u_i - u_{i-1}\right)\right], \tag{5}$$

где $x_{i\pm1/2}^{(1)} = x_{i\pm1/2} - \dfrac{h_x^2}{12x_{i+1/2}}$.

С помощью непосредственного применения ряда Тейлора легко показать справедливость соотношения

$$L_{1,x}^h u = L_x u - \frac{h_x^2}{12} L_x^2 + O\left(h^4\right), \tag{6}$$

где в данном случае

$$L_x^2 u = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x} x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x} x \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{1}{x}\left(2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right). \tag{7}$$

Отсюда следует схема четвертого порядка

$$L_1^h u_h \equiv \left(L_{1,x}^h + L_y^h - \frac{h_x^2 + h_y^2}{12} L_{1,x}^h L_y^h\right) u_h = f - \frac{h_x^2}{12} L_{1,x}^h f - \frac{h_y^2}{12} L_y^h f, \tag{8}$$

где L_y^h – "стандартный" трехточечный разностный оператор. Если уравнение (8) записать в покомпонентной форме

$$\begin{gathered} p0_{i,j} u_{i,j} - p1_{i,j} u_{i-1,j} - p2_{i,j} u_{i,j-1} - p3_{i,j} u_{i+1,j} - p4_{i,j} u_{i,j-1} - \\ - p5_{i,j} u_{i-1,j+1} - p6_{i,j} u_{i-1,j-1} - p7_{i,j} u_{i+1,j-1} - p8_{i,j} u_{i+1,j+1} = f_{i,j}, \end{gathered} \tag{9}$$

то разностные коэффициенты имеют следующий вид (индексы i, j для краткости опускаем):

$$p1=\left(\frac{x_{i-1/2}}{h_x^2}-\frac{1}{12x_{i-1/2}}\right)\left(1-\frac{h_x^2+h_y^2}{6h_y^2}\right);$$

$$p3=\left(\frac{x_{i+1/2}}{h_x^2}-\frac{1}{12x_{i+1/2}}\right)\left(1-\frac{h_x^2+h_y^2}{6h_y^2}\right);$$

$$p2=p4=\left[1-\frac{h_x^2+h_y^2}{12h_y^2}\left(2-\frac{h_x^2}{6x_{i+1/2}x_{i-1/2}}\right)\right]\frac{x}{h_y^2};\tag{10}$$

$$p5=p6=\frac{h_x^2+h_y^2}{12h_y^2}\left(\frac{x_{i-1/2}}{h_x^2}-\frac{1}{12x_{i-1/2}}\right);$$

$$p7=p8=\frac{h_x^2+h_y^2}{12h_y^2}\left(\frac{x_{i+1/2}}{h_x^2}-\frac{1}{12x_{i+1/2}}\right),$$

$$p0=\sum_{k=1}^{8}pk.$$

Рассмотренный подход неприменим для построения разностных уравнений на оси симметрии, и при $x_i = 0$ необходимо использовать специальные представления. В частности, из (1) следует, что при $x \to 0$ уравнение Пуассона принимает форму

$$L_{x,0}u-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(0,z),\quad L_{x,0}=-2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.\tag{11}$$

Принимая во внимание свойство симметрии рассматриваемой задачи, мы определяем на оси разностный оператор

$$\left(L_{x,0}^h u\right)_{0,j}\equiv 4\frac{u_{0,j}-u_{1,j}}{h_x^2}=\left(L_{x,0}u\right)_{0,j}-\frac{h_x^2}{16}\left(L_{x,0}^2 u\right)_{0,j}+O\left(h^4\right),\tag{12}$$

в котором используется свойство

$$L_{x\,0}^2 u=\lim_{r\to 0}\left(L_x^2 u\right)=\frac{8}{3}\left.\frac{\partial^4 u}{3\partial x^4}\right|_{x=0}.$$

Отсюда разностная аппроксимация четвертого порядка на оси определяется в виде

$$\left(L^h u\right)_{0,j}\equiv\left(L_{x,0}^h u+L_y^h u-\frac{3h_x^2+4h_y^2}{48}L_{x,0}^h u L_y^h u\right)_{0,j}=\tag{13}$$

$$=\left(f+\frac{h_x^2}{16}L_{x,0}^h f+\frac{h_y^2}{12}L_y^h f\right)_{0,j}+O\left(h^4\right).$$

В покомпонентном представлении этого уравнения величины $p1$, $p5$, $p6$ равны нулю, а остальные коэффициенты выражаются формулами

$$p2 = p4 = \frac{1}{h_y^2}\left(1 - \frac{3h_x^2 + 4h_y^2}{24h_x^2}\right), \qquad p3 = \frac{4}{h_x^2}\left(1 - \frac{3h_x^2 + 4h_y^2}{12h_y^2}\right), \tag{14}$$

$$p7 = p8 = \frac{3h_x^2 + 4h_y^2}{24h_x^2h_y^2}, \qquad p0 = \sum_{k=1}^{8} pk\,.$$

Сравнение величин $p1$, $p5$, $p6$ из (10) для $i = 1$ со значениями $p3$, $p7$, $p8$ из (14) соответственно показывает, что алгебраическая система, получаемая из (10), (13), является не только симметричной, но и несимметризуемой.

Из формул (10), (14) видно, что выполнение неравенств

$$\frac{1}{5} < \frac{h_x^2}{h_y^2} < \frac{8}{3} \tag{15}$$

обеспечивает положительность коэффициентов $pk_{i,j}$.

Если для замыкания системы уравнений (9) добавить краевые условия Дирихле в узлах на границе, то получаемая алгебраическая система при условии (11) будет монотонной, т. е. ее обратная матрица существует и имеет неотрицательные элементы [4].

Отметим, что аппроксимация порядка $O\left(h^4\right)$ для уравнения Пуассона в цилиндрических координатах рассматривалась еще давно [9], однако слишком сложные полученные формулы практически исключают их анализ и применение.

Перейдем теперь к уравнению (1) при $\alpha = -1$ и граничном условии $u\big|_{x=0} = 0$, являющимся типичным для магнитостатики. Введя новый дифференциальный оператор $\tilde{L}_x u = \dfrac{1}{x} L_x u = -\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}$, мы можем определить соответствующий разностный оператор

$$\left(\tilde{L}_x^h u\right)_{i,j} \equiv \frac{1}{h_x^2}\left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{x_{i-1/2}} + \frac{u_{i,j} - u_{i+1,j}}{x_{i+1/2}}\right) = \left(\tilde{L}_x u - \frac{h_x^2}{12}\tilde{L}_x x \tilde{L}_x u\right)_{i,j} + O\left(h^4\right), \tag{16}$$

с помощью которого выписывается в соответствии с (4) следующая аппроксимация порядка $O\left(h^4\right)$:

$$x\tilde{L}_x^h + L_y^h u - \frac{x}{12}\left(h_x^2 \tilde{L}_x^h L_y^h u + h_y^2 L_y^h \tilde{L}_x^h u\right) = f - \frac{1}{12}\left(x h_x^2 \tilde{L}_x^h f + h_y^2 L_y^h f\right) + O\left(h^4\right). \tag{17}$$

При покомпонентной записи этой системы в форме (9) (после деления на x, что делает ее симметричной) разностные коэффициенты принимают следующий вид:

$$p3_{i,j} = \frac{1}{6h_x^2 x_{i+1/2}}\left(5 - \frac{h_x^2}{h_y^2}\right) = p1_{i+1,j},$$

$$p4_{i,j} = p2_{i,j} = \frac{1}{6x_i h_x^2\left(1 - \frac{h_x^2}{4x_i^2}\right)}\left(5 - \frac{h_y^2}{h_x^2} - \frac{3h_x^2}{2x_i^2}\right), \qquad (18)$$

$$p8_{i,j} = p7_{i,j} = p5_{i+1,j} = p6_{i+1,j} = \frac{1}{12x_{i+1/2}}\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right).$$

Очевидно, что для положительности всех коэффициентов необходимо выполнение неравенств

$$\frac{h_x^2}{h_y^2} < 5, \quad \frac{h_y^2}{h_x^2} < 3{,}5. \qquad (19)$$

Методы конечных объемов (интегробалансные аппроксимации)

Как следует из теоретических оценок, на равномерных сетках компактные схемы с погрешностью аппроксимации высокого порядка имеют значительное преимущество перед традиционными пятиточечными уравнениями с ошибкой приближенного решения $O(h^2)$ (этот факт убедительно подтверждается численными экспериментами).

Важно отметить, что актуальность компактных схем проявляется не только при необходимости проведения особо точных расчетов. При любой заданной точности вычисление приближенного решения (даже грубого, но только если оно достаточно гладкое) по схеме порядка $O(h^4)$ может быть сделано на сетке с гораздо меньшим числом узлов (и, следовательно, значительно экономичнее), чем по схеме второго порядка.

Ситуация существенно меняется, если решаемая краевая задача содержит особенности, обусловленные наличием или сильно разномасштабных геометрических фрагментов границы (в том числе криволинейной), или резким изменением коэффициентов дифференциального уравнения, или сменой характера краевых условий. В таких случаях неизбежно применение неравномерных и нерегулярных сеток с локальными сгущениями, когда построение разностных аппроксимаций повышенной точности сопряжено со значительными трудностями. При этом представляется перспективным построение таких интегробалансных аппроксимаций, которые в общем случае обеспечивали бы первый или второй порядок, а в подобластях с равномерной прямоугольной сеткой совпадали бы с компактными схемами повышенной точности.

С этой целью, следуя работе [2], введем в окрестности (i, j)-го узла неравномерной прямоугольной сетки "малый" и "большой" элементарные объемы

$$V_{i,j} = \left\{x_{i-1/2} < x < x_{i+1/2},\, y_{j-1/2} < y < y_{j+1/2}\right\}, \quad x_{i\pm 1/2} = \frac{1}{2}\left(x_i + x_{i\pm 1}\right),$$

$$\overline{V}_{i,j} = \left\{x_{i-1} < x < x_{i+12},\, y_{j-12} < y < y_{j+12}\right\},$$

границы которых обозначим соответственно через $S_{i,j}$ и $\overline{S}_{i,j}$.

Построение балансных схем будем проводить, исходя из аппроксимации линейной комбинации (с параметром $0 \le \omega \le 1$) законов сохранения, получаемых в результате интегрирования уравнения (1) (с предварительным умножением его на x^{α}) по элементарным объемам $V_{i,j}$ и $\overline{V}_{i,j}$:

$$I_{i,j} \equiv \omega \int\limits_{S_{i,j}} J^n ds + (1-\omega) \int\limits_{\overline{S}_{i,j}} J^n ds = \omega \int\limits_{V_{i,j}} f x^{\alpha} dx dy + (1-\omega) \int\limits_{\overline{V}_{i,j}} f x^{\alpha} dx dy, \tag{20}$$

где J^n — проекция на внешнюю нормаль вектора плотности потока субстанции $J = \left(J_x = -\lambda x^{\alpha} \dfrac{\partial u}{\partial x},\, J_y = -\lambda x^{\alpha} \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$. При этом мы предполагаем, что возможные линии разрыва функций λ, f параллельны координатным осям и проходят через узлы сетки.

Для аппроксимации соотношения (20) введем субэлементы $V_{i,j}^k$, $\overline{V}_{i,j}^k$, $k = 1, 2, 3, 4$, получаемые разбиением соответствующих элементарных объемов координатными линиями, и определим соответствующие потоки $I_{i,j}^{(k)}$ по субэлементам, $I_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{4} I_{i,j}^{(k)}$.

Выпишем необходимые выражения для $k = 3$, что соответствует правым верхним субэлементам ($x > x_i$, $y > y_i$, причем считаем, что здесь функция λ равна постоянной $\lambda^{(3)}$):

$$I_{i,j}^{(3)} = \lambda^{(3)} \left\{ \omega \left[\int\limits_{y_i}^{y_{j+1/2}} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i+1/2} x^{\alpha} dy + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1/2}} \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{j+1/2} x^{\alpha} dx \right] + \right.$$

$$\left. +(1-\omega) \left[\int\limits_{y_i}^{y_{j+1/2}} \left| \left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i+1} \right) \right| x^{\alpha} dy + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1/2}} \left| \left(\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_j + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{j+1} \right) \right| x^{\alpha} dx \right] \right\} = \tag{21}$$

$$= \omega \int\limits_{x_i}^{x_{i+1/2}} \int\limits_{y_i}^{y_{j+1/2}} f x^{\alpha} dx dy + (1-\omega) \int\limits_{x_i}^{x_{i+12}} \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} f x^{\alpha} dx dy.$$

Как видно, здесь искусственно добавлены члены с интегралами по "внутренним границам" между соседними субэлементами от производных $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i$, $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_j$ для улучшения последующих их приближений. В аппроксимацию общего потока $I_{i,j}$ этот прием никакого искажения не вносит, так как при суммировании $I_{i,j}^{(k)}$ по индексу k введенные члены взаимно сокращаются вследствие условий сопряжения на границах различных сред

$$\left.u\right|_{\Gamma_+} = \left.u\right|_{\Gamma_-}, \quad \lambda^+ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_+} = \lambda^- \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_-}.$$

Здесь знаки "+", "−" относятся к различным сторонам поверхности Г.

Применяя далее для аппроксимации производных формулы центральных прямоугольников и трапеций:

$$u_{i+1} - u_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'\,dx = h_i u'\big|_{i+1/2} + \frac{h^3}{24}u''' = \frac{1}{2}h_i\left(u'\big|_i + u'\big|_{i+1}\right) = \frac{h^3}{12}u''',$$

а также линейную интерполяцию подынтегральных членов, мы можем выразить поток $I_{i,j}^{(3)}$ через значения решения в узлах, для которых выбираем локальную нумерацию в соответствии с обозначениями разностных коэффициентов в (9). Подчеркнем, что такое соотношение является линейной формой и может быть записано в виде

$$I_{i,j}^{(3)} = p00_{i,j}u_0 + p03_{i,j}u_3 + p04_{i,j}u_4 + p08_{i,j}u_8. \tag{22}$$

Для нахождения коэффициентов $pk_{i,j}$ применим так называемый поэлементный принцип, заключающийся в проведении всех необходимых вычислений, связанных с одним субэлементом, и в разнесении соответствующих вкладов в разностные коэффициенты по узлам сетки, являющихся вершинами данного субэлемента.

Обозначим через $\overline{u}^{(k)} = \left(u_0, u_3, u_4, u_8\right)$ вектор 4-го порядка, компоненты которого являются значениями сеточного решения в вершинах субэлемента с номером k. Введем также "локальный вектор потоков" $I^{(k)} = \left(I_0^{(k)}, I_3^{(k)}, I_4^{(k)}, I_8^{(k)}\right)$, компоненты которого определяются по аналогичной (21) формуле, причем каждая из них связана с соответствующим узлом и выражается через одну и ту же четверку u_0, u_3, u_4, u_8. Тогда эта связь может быть записана в алгебраической форме

$$I^{(k)} = A^{(k)}\overline{u}^{(k)}, \quad A^{(k)} = \begin{bmatrix} p00_{i,j} & p03_{i,j} & p04_{i,j} & p08_{i,j} \\ p30_{i,j} & p33_{i,j} & p34_{i,j} & p38_{i,j} \\ p40_{i,j} & p43_{i,j} & p44_{i,j} & p48_{i,j} \\ p80_{i,j} & p83_{i,j} & p84_{i,j} & p88_{i,j} \end{bmatrix}, \tag{23}$$

где матрица $A^{(k)}$ называется локальной матрицей баланса, а индексы i, j предполагаются соответствующими левой нижней вершине k-го субэлемента.

Очевидно, что коэффициенты $pk_{i,j}$ "глобальной" матрицы A системы сеточных уравнений

$$Au = f\,, \quad u = \left\{u_{i,j}\right\}, \tag{24}$$

легко выражаются через элементы локальных матриц (мы предполагаем ниже их симметричность):

$$\begin{gathered} p0_{i,j} = p00_{i,j} + p33_{i-1,j} + p44_{i,j-1} + p88_{i-1,j-1}\,; \\ p3_{i,j} = p03_{i,j} + p03_{i,j-1}\,; \quad p4_{i,j} = p04_{i,j} + p04_{i,j-1}\,; \\ p8_{i,j} = p08_{i,j}\,. \end{gathered} \tag{25}$$

В поэлементном подходе фактически вместо этих формул реализуется (после вычисления всех элементов локальной матрицы для рассматриваемого субэлемента) следующий псевдокод:

$$\begin{array}{ll} p0_{i,j} := p0_{i,j} + p00_{i,j}\,, & p0_{i+1,j} := p0_{i+1,j} + p33_{i,j}\,, \\ p0_{i,j+1} := p0_{i,j+1} + p44_{i,j}\,, & p0_{i+1,j} := p0_{i+1,j+1} + p88_{i,j}\,, \\ p3_{i,j} := p3_{i,j} + p03_{i,j}\,, & p4_{i,j} := p4_{i,j} + p04_{i,j}\,, \\ p8_{i,j} := p08_{i,j}\,, & p4_{i+1,j} := p4_{i+1,j} + p38_{i,j}\,, \\ p3_{i,j+1} := p3_{i,j+1} + p48_{i,j}\,. & \end{array} \tag{26}$$

При аппроксимации интегралов в (21) возможно применение различных квадратных формул, и вопрос их оптимального выбора на неравномерных сетках является открытым. Мы приведем формулы, которые обеспечивают в общем случае, по крайней мере, первый порядок погрешности итогового решения, но в случае постоянных шагов и коэффициентов λ приводят при $\omega = \dfrac{16}{15}$ к приведенным выше компактным схемам четвертого порядка (с точностью до нормирующего множителя).

Для $\alpha = -1$, $\lambda = 1$ (магнитостатика) элементы локальной матрицы баланса имеют вид

$$\begin{gathered} p03_{i,j} = \frac{1}{x_{i+1/2}}\left[\frac{b_j^y}{b_i^x}\left(1-\frac{5}{8}\omega\right) - \frac{b_i^x}{b_j^y}\frac{\omega}{16}\right] - \frac{\ln\dfrac{x_{i+1}}{x_i}}{b_j^y}\left(1-\frac{15}{16}\omega\right); \\ p04_{i,j} = \frac{b_i^x}{x_{i+1/2}b_j^y}\frac{23\omega}{16} - \frac{\ln\dfrac{x_{i+1}}{x_i}}{b_j^y}\left(\frac{23\omega}{16}-1\right) - \frac{b_j^b}{x_{i+1/2}b_i^x}\left(1-\frac{7}{8}p\right); \end{gathered} \tag{27}$$

$$p08_{i,j} = \frac{1}{x_{i+1/2}}\left[\frac{h_j^y}{h_i^x}\left(1-\frac{7}{8}\omega\right)+\frac{h_i^x}{h_j^y}\frac{\omega}{16}\right]+\frac{\ln\frac{x_{i+1}}{x_i}}{h_j^y}\left(1-\frac{15}{16}\omega\right);$$

$$p00_{i,j} = p03_{i,j} + p04_{i,j} + p08_{i,j}. \tag{27}$$

Для уравнения Пуассона в цилиндрической системе координат ($\alpha = \lambda = 1$) вместо (23) имеем следующие формулы:

$$p03_{i,j} = x^{(1)}_{i+1/2}\left[\frac{h_j^y}{h_i^x}\left(1-\frac{5}{8}\omega\right)-\frac{h_i^x}{h_j^y}\left(1-\frac{7}{8}\omega\right)\right];$$

$$p04_{i,j} = x_{i+1/2}\frac{h_i^x}{h_j^y}\left(2-\frac{3}{2}\omega\right)-x^{(1)}_{i+1/2}\left(\frac{h_i^x}{h_j^y}+\frac{h_j^y}{h_i^x}\right)\left(1-\frac{7}{8}\omega\right); \tag{28}$$

$$p08_{i,j} = x^{(1)}_{i+1/2}\left(\frac{h_i^x}{h_j^b}+\frac{h_j^y}{h_i^x}\right)\left(1-\frac{7}{8}\omega\right); \quad x^{(1)}_{i+1/2} = x_{i+1/2}-\frac{\left(h_i^x\right)^2}{12x_{i+1/2}}p08_{i,j}.$$

В заключение данного пункта отметим, что перенос данных результатов на трехмерное обобщение уравнения (1) (при $\alpha = 0$) не встречает принципиальных трудностей как в плане построения балансных аппроксимаций на повышенной точности при постоянстве шагов и коэффициентов [3, 7, 8].

2. Методы неполной факторизации с компенсацией

Итерационные методы сопряженных градиентов для решения симметричной системы уравнений вида (24) с использованием предобуславливающей матрицы B (симметричной и положительно определенной) описываются формулами

$$\begin{aligned} &r^0 = f - Au^0, && p^0 = B^{-1}r^0,\\ &u^n = u^{n-1}+\alpha_n p^{n-1}, && \alpha_n = \frac{\left(r^{n-1},\ v^{n-1}\right)}{\left(Ap^{n-1},\ p^{n-1}\right)},\\ &r^n = r^{n-1}-\alpha_n Ap^{n-1}, && v^n = B^{-1}r^n,\\ &p^n = v^n+\beta_n p^{n-1}, && \beta_n = \frac{\left(r^n,\ v^n\right)}{\left(r^{n-1},\ v^{n-1}\right)}. \end{aligned} \tag{29}$$

Предобуславливающая матрица B записывается для широкого класса методов неполной факторизации в следующей факторизованной форме (предполагается, что матрица исходной системы имеет вид $A = D - L - U$, $L = U'$, где D — диагональная или блочно-диагональная матрица, L — нижняя треугольная, а штрих означает транспонирование):

$$B = (G - L)G^{-1}(G - U)\,, \tag{30}$$

$$G = D - \overline{LG^{-1}U} - \theta C\,,$$

где $\overline{LG^{-1}U}$ — некоторая "ленточная" аппроксимация соответствующей матрицы $LG^{-1}U$, причем ненулевые элементы $\overline{LG^{-1}U}$ равны соответствующим элементам $LG^{-1}U$, $0 \le \theta \le 1$ — итерационный параметр, а C — ленточная матрица, определяемая из обобщенного принципа согласования строчных сумм, или компенсации, с помощью какого-либо набора пробных векторов $y^{(q)}$, см [5]:

$$C_y{}^{(q)} = \left(LG^{-1}U - \overline{LG^{-1}U}\right)y^{(q)}\,, \quad q = 1, 2, \ldots, p. \tag{31}$$

Число итераций $n(\varepsilon)$, необходимое для уменьшения начальной ошибки в ε^{-1} раз, оценивается при этом неравенством

$$n(\varepsilon) \le \frac{1}{2}|\ln\varepsilon|\chi^{1/2} + 1\,, \tag{32}$$

где χ — спектральное число обусловленности матричного произведения $B^{-1}A$, а другими словами, матрицы A, предобусловленной с помощью B.

Отсюда оптимизация итерационных алгоритмов заключается, главным образом, в нахождении легко обратимой предобуславливающей матрицы B, обеспечивающей минимальное значение χ. Основные результаты в данном направлении получены для систем с матрицами A стилтьесовского типа (симметричные M-матрицы, имеющие неположительные внедиагональные элементы и неотрицательную обратную матрицу $A^{-1} \le 0$ [4]), получаемых из конечно-разностных или конечно-элементных аппроксимаций невырожденных краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа. При этом асимптотически, т. е. при достаточно малых характерных шагах сетки $h << 1$, число обусловленности исходной матрицы A имеет порядок $O(h^{-2})$, величина χ после предобуславливания — $O(h^{-1})$, а число итераций $n(\varepsilon)$ равно $O(h^{-1/2})$.

Такие чисто алгебраические подходы уступают по результатам асимптотически оптимальным по порядку методам, имеющим суммарный объем вычислений, пропорциональный числу неизвестных, и основанных на иерархических многосеточных алгоритмах или принципах декомпозиции. Однако в практических применениях, с числом узлов в одном измерении до тысячи, рассматриваемые методы вида (2) – (4) имеют наиболее высокую эффективность, подтверждаемую большим количеством экспериментальных результатов, опубликованных, например, в [4, 5] и цитируемых там работах. При этом для сравнительного анализа экономичности различных алгоритмов имеет значение не только порядок теоретической оценки величины χ или $n(\varepsilon)$, но и значения участвующих здесь констант.

За счет подбора количества и характера пробных векторов $y^{(q)}$, вида "компенсирующей" матрицы C, значений итерационного параметра θ и упорядоченности неизвестных, т. е. узлов сетки, определяющей последовательность вычислений на каждой итерации, описанные выше в общем виде итерационные схемы дают широкие возможности для оптимизации алгоритмов и их адаптации в зависимости от свойств решаемого класса задач.

С другой стороны, наличие хорошо теоретически исследованных и практически апробированных конкретных вариантов неполной факторизации позволяет реализовывать надежные и экономичные ("робастные") программы, не содержащие никаких неопределенных параметров и не требующие специальной подготовки пользователя. В частности, достаточно эффективными являются алгоритмы с одним пробным вектором $y = e$ из единичных компонент, с диагональной матрицей C и компенсирующим параметром $\theta = 1$.

При решении сеточных систем уравнений в методах неполной факторизации выделяются два главных класса алгоритмов: явные и неявные, определяемые блочной упорядоченностью узлов сетки, в соответствии с которой вектор неизвестных представляется в виде совокупности подвекторов $u = \left\{u_k,\ k = 1,\ldots, m\right\}$, а алгебраическая система принимает, например, блочно-трехдиагональный вид

$$-L_k u_{k-1} + D_k u_k - U_k u_{k+1} = f_k\,, \tag{33}$$
$$k = 1,\ldots, m\,;\quad L_1 - U_m = 0\,.$$

Если вектор $u_k = u_i = \left\{u_{i,j},\ j = 1,\ldots, J\right\}$ (или $u_k = u_j = \left\{u_{i,j},\ i = 1,\ldots, I\right\}$) представляет совокупность значений функции на i-й (или j-й) координатной линии, то матрицы D_k являются трехдиагональными, а соответствующий метод называется неявным, так как его реализация связана с решением трехдиагональных подсистем методом прогонки по линиям. При этом оптимальное разбиение векторов такое, у которого меньше блочный порядок системы, а число обусловленности χ из (28) оценивается с помощью неравенства

$$\chi \le \min\left\{\frac{I+3}{4},\ \frac{I+3}{4}\right\}. \tag{34}$$

Такой алгоритм реализуется в процедуре IMIF93 из библиотеки итерационных алгоритмов FACTOR [4, 10].

Наиболее простыми методами неполной факторизации, с точки зрения реализации одной итерации, являются явные алгоритмы, в которых матрица D

определяется диагональной. Такой подход обладает еще и универсальностью, что позволяет описать итерационный процесс в единообразной форме для произвольной размерности задачи, типа сетки и сеточных шаблонов, а также для различных упорядоченностей узлов. Такими качествами обладает процедура EXIFA [10], использующая так называемый разреженный строчный формат хранения элементов матрицы A, что позволяет ее эффективное использование практически в любом пакете прикладных программ за счет написания несложной процедуры преобразования алгебраической структуры данных. Отметим еще два достоинства процедуры EXIFA. Первое преимущество заключается в использовании так называемой модификации Айзенштадта [4], что позволяет экономить объем вычислений на каждой итерации примерно на 30–50 %. Второе преимущество заключается в том, что при частном значении дополнительного итерационного параметра алгоритм переходит в известный метод симметричной последовательной верхней релаксации, эффективно применяемый к широкому классу положительно определенных матриц (без требования ее стилтьесовости, т. е. положительности элементов и свойства диагонального преобладания).

3. Примеры численных экспериментов

Приведем результаты решения характерных методических краевых задач, демонстрирующих, с одной стороны, точность получаемых разностных решений, а с другой стороны — количество необходимых итераций. Отметим, что аналогичные результаты для двумерных и трехмерных уравнений Пуассона в декартовых системах координат описаны (в том числе с кусочно-постоянными коэффициентами λ) в работах [3, 4 и 11], мы же остановимся только на осесимметричных задачах.

В качестве первого примера рассмотрим уравнение (1) при $f = 0$, $\alpha = 1$ в единичном квадрате $0 < r,\ \ z < 1$ с однородным условием Неймана на оси $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$ и с заданными значениями точного решения

$$u(x,\, y) = J_0(\lambda_x x)\exp(\lambda_y y) \tag{35}$$

на остальной части границы, где J_0 — функция Бесселя первого рода. Ниже приведены значения максимальной ошибки разностного решения $O(h^4)$ по компактной схеме (8), (10) при разных значениях параметров λ_x, λ_y на квадратных сетках с шагами $h_x = h_y = h = \dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{16}$. Здесь, как и везде далее, все вычисления проводились с двойной точностью, что практически является обязательным в рассматриваемых задачах:

	$\lambda_x = 2,\ \lambda_y = 0$	$\lambda_x = \lambda_y = 2$	$\lambda_x = 0,\ \lambda_y = 2$
$b = \frac{1}{8}$	$4{,}16 \cdot 10^{-6}$	$3{,}66 \cdot 10^{-7}$	$1{,}70 \cdot 10^{-5}$
$b = \frac{1}{16}$	$2{,}67 \cdot 10^{-7}$	$2{,}65 \cdot 10^{-8}$	$1{,}08 \cdot 10^{-6}$

Ошибки разностного решения для примера 1

Для этого же примера ($\lambda_x = 2$, $\lambda_y = 0$) ниже приведены значения невязок $r = f - Au$ разностных уравнений на точном решении (35) при различных расстояниях от оси $x = 0;\ 0{,}125;\ 0{,}25,\ \ldots$

x	0	0,125	0,25	0,375
$b = \frac{1}{8}$	$3{,}38 \cdot 10^{-5}$	$6{,}21 \cdot 10^{-5}$	$5{,}92 \cdot 10^{-5}$	$5{,}44 \cdot 10^{-5}$
$b = \frac{1}{8}$	$2{,}12 \cdot 10^{-6}$	$3{,}89 \cdot 10^{-6}$	$3{,}71 \cdot 10^{-6}$	$3{,}41 \cdot 10^{-6}$

Как видно из приведенных результатов, 4-й порядок выполняется с хорошей точностью как для ошибки, так и величин невязки (последняя примерно одинакова для разных расстояний от оси симметрии).

Перейдем теперь к уравнению (1) при $\alpha = -1$, $\lambda = 1$, описывающему осесимметричное магнитное поле. Отметим, что для одномерных модельных решений вида $u = x^n$ (с соответствующими правыми частями $f = n(n-2)x^{n-2}$) компактная схема (17) дает до $n \le 6$ нулевую ошибку аппроксимации на любой сетке.

Рассмотрим далее практическую задачу о расчете магнитного поля катушки прямоугольного сечения $r_1 < x < r_2$, $z_1 < y < z_2$ с постоянной плотностью тока j. В этом случае правая часть уравнения (1) равна jx в сечении катушки и нулю — в остальной области, а точное значение осевой компоненты вектора магнитной индукции в точке оси напротив центра катушки равно

$$B_z^{(a)} = \ln \frac{r_2 + \sqrt{r_2^2 + b^2}}{r_1 + \sqrt{r_1^2 + b^2}}, \quad b = \frac{z_2 - z_1}{b}.$$

Приближенное значение B_z вычислялось из разностной аппроксимации расчетного сеточного решения по формуле:

$$B_z^{(n)} = \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_0 \approx \frac{2u(x_1, 0)}{h^2}.$$

Данная задача решалась с постановкой краевых условий u — 0 на границе $x = L$, $y = \pm L$ (при $j = 1$, $z_2 = -z_1 = 0,5$, $r_1 = 0,5$, $r_2 = 1$) с конечными значениями $L = 3$, 6, 12. Понятно, что в этом примере погрешность численного решения зависит как от шага сетки (которая здесь бралась квадратная), так и от величины L (конкретнее, она стремится к нулю при $h \to 0$, $L \to \infty$).

Каждая клетка содержит расчетное значение $B_z^{(n)}$ (точная величина равна $B_z^{(a)} = 0,28113$) на сетках с числом узлов 30×60, 60×120, ..., для разных L, *а также соответствующие количества итераций* (с помощью метода IMIF93), обеспечивающие уменьшение начальной невязки уравнения в $\varepsilon = 10^{-7}$ и $\varepsilon = 10^{-11}$ раз (при этом увеличение итерационной точности ε с 10^{-7} до 10^{-11} не приводит к изменению приведенных расчетных значений).

Результаты экспериментов для катушки с током

	30×60	60×120	120×240	240×480
$L = 3$	0,27798 12, 18	0,27702 18, 25	0,27677 26, 37	0,27671 37, 53
$L = 6$		0,28093 16, 23	0,28067 23, 33	0,28060 33, 48
$L = 12$			0,28117 21, 30	0,28109 30, 44

Данные результаты позволяют сделать следующие выводы. Во-первых, итерационный алгоритм является высокоэффективным: число итераций достаточно мало при большом числе узлов сетки и высокой точности, при сгущении сетки величина $n(\varepsilon)$ растет пропорционально $n^{-1/2}$, что соответствует теоретическим оценкам. Общие вычислительные затраты можно оценить с помощью того факта, что количество арифметических действий для выполнения одной итерации равно 4710.

Абсолютные ошибки вычисления величины $B_z(0,0)$ равны 0,00415 на сетке 30×60 при $L = 3$; 0,0020 на сетке 60×120 при $L = 6$ и 0,00004 — на сетке 120×240 при $L = 12$, что соответствует относительным погрешностям 1,5; 0,075; 0,015 %.

Отметим, что при фиксированном L с уменьшением шага сетки ошибка несколько растет. Этот удивительный на первый взгляд факт объясняется тем, что погрешности дискретизации и искусственного ограничения расчетной области имеют разные знаки. В целом же получаемая точность заведомо достаточна для решения практических задач.

Литература

1. Ильин В. П. Численные методы решения задач электрофизики. — М.: Наука, 1985.
2. Ильин В. П. Балансные аппроксимации повышенной точности для уравнения Пуассона // Сиб. Мат. журн., 1996. Т. 37. № 1. С. 151–169.
3. Gurieva Ya. L., Il'in V. P. On second order finite volume approximation for 3D mixed boundary value problems // Rus. J. Num. Anal. Math., 1997. V. 12. № 6. С. 481–500.
4. Ильин В. П. Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. — М.: Наука, 1985.
5. Il'in V. P., Laevsky R. Yu.. Generalized compensation principle in incomplete factorization methods// Rus. J. Num. Anal. Math. 1997. Model. V. 12. № 5. P. 399–420.
6. Микеладзе Ш. Е. О численном интегрировании дифференциальных уравнений с частными производными// Изв. АН СССР. Сер. Физ.-мат., 1934. № 6. С. 819–842.
7. Самарский А. А. Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности// ЖВММФ, 1963. Т. 3. № 5. С. 812–840.
8. Паасонен В. И. Компактные схемы для систем уравнений второго порядка с конвективными членами / Новосибирск // Вычислительные технологии, 1998. Т. 3. № 1. С. 55–66.
9. Давиденко Д. Ф. Об одном методе построения разностных уравнений при решении методом сеток осесимметричной задачи Дирихле для уравнений Лапласа и Пуассона// В сб.: Численные методы решения задач математической физики. — М.: Наука, 1966. С. 18–54.
10. Гололобова С. П., Ильин И. П., Ицкович Е. А. // ФАКТОР: библиотека программ для решения сеточных уравнений. — Новосибирск, ВЦ СОРАН. Препринт № 1079, 1996.
11. Gurieva Ya. L., Il'in V. P. Finite volume approaches for 2–D BVPs: algorithms data structures, software and experiments/ University of Nijmegen (The Netherlands), 1997, report № 9715.

Работа является частью исследовательского проекта РФФИ № 96-01-01770 и получила поддержку в рамках гранта РФФИ-ИНТАС № 95-98.

ON THE COMPUTATION OF AXISYMMETRIC ELECTROMAGNETIC FIELDS

V. P. Il'in

Institute of numerical mathematics and mathematical geophisics, SD RAS,
Novosibirsk, e-mail:ilin@comcen.nsk.su

On advanced numerical methods for the solution of equation

$$-\frac{1}{x^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x}\lambda x^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\lambda\frac{\partial u}{\partial y}=f(x,y),$$

are considered. Here λ, f are piece-wise smooth functions, $\alpha = 0,1$ are corresponded to Poisson equation in Cartesian and cylindrical coordinates, and case $\alpha = -1$ describes axisymmetric magnetostatic field. High order compact finite difference nine-point schemes at the uniform rectangular grid are proposed. Its generalization for nonuniform grids are investigated on the base of finite volume (balanced) approximations. The modern fast iterative incomplete factorization methods for the solution of linear algebraic systems with very large sparse matrices are observed. An efficient convergence rate for set of explicit and implicit, algoritms is provided by generalized compensation approach, adapted meshordering and preconditioned conjugate gradient acceleration. The results of numerical experiments demonstrate the fourth order accuracy of compact approximations as well as the robustness of proposed iterative procedures.