

Экспоненциально-нормальное распределение и методы его использования в ядерной физике

А. А. Кириллов

Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

И. А. Кириллов

ОАО «Концерн "Энергоатом"», Москва, Россия

Рассмотрены возможности и исследованы свойства распределения $A \cdot \exp((x-c)^2 / (a(x-c) + 2b^2))$. Представлены методы его использования для аппроксимации с учетом полноты и качества исходных данных. Для удобства приведены соответствующие аналитические выражения и таблица. Применение методов иллюстрировано численными примерами. Возможности использования этого распределения определены его родством с экспоненциальным и нормальным распределениями. Предложенные методы иллюстрированы применениями к исследованию каскадов ультравысоких энергий.

PACS: 02.30.Mv; 02.50.Cv; 96.40.Pq

Ключевые слова: аппроксимация, нормальное распределение, экспоненциальное распределение, качество данных.

Введение

При исследовании каскадов гигантских энергий (вблизи $\approx 4 \cdot 10^{19}$ эВ условного порога реликтового

обрезания спектра космических лучей (ГЗК: Грейзен, Зацепин, Кузьмин) [1]) в работах [2, 3] для аппроксимации полного числа частиц $N(t)$ на глубине атмосферы t в индивидуальных каска-

дах использовалась форма $N_m \cdot \exp(-(t-t_m)^2 / (a(t-t_m) + 2b^2))$. Эти каскады образуются в результате большого числа (порядка 10^{10}) взаимодействий (рождения и гибели в результате дробления и потерь энергии) энергичных частиц с атомами атмосферы. Аппроксимирующая форма является промежуточной между экспоненциальным и нормальным распределениями. Параметры этой формы имеют очевидную интуитивную интерпретацию: в данном случае (t_m, N_m) определяет положение максимума каскада, a — асимметрию, b — разброс. Вид формы

$$f_{en}(x) = A \cdot \exp((x-c)^2 / (a(x-c) + 2b^2)),$$

$$a > 0, \quad x > c - 2b^2/a$$

или

$$a < 0, \quad x < c - 2b/a, \quad (1)$$

и интерпретация параметров отражают следующие существенные внутренние свойства явления:

ограниченность характеристик слева началом процесса;

большое число относительно малых факторов, определяющих эти характеристики в центральной стадии развития процесса;

пропорциональность скорости изменения характеристик их величине на завершающей стадии процесса.

В силу этих свойств дальнейшие исследования каскадов ультравысокой энергии (УВЭ $\Leftrightarrow E_0 \geq 10^{18}$ эВ = 1 ЕэВ) заставили не раз обратиться к этой форме.

УВЭ-каскады — редкие явления: одно событие на ≈ 1 км²·ср в год при $E_0 \geq 5 \cdot 10^{18}$ эВ; одно событие — на ≈ 1 км²·ср в столетие при $E_0 \geq 1 \cdot 10^{20}$ эВ.

Каждое событие в силу своих гигантских размеров (порядка 15 км) может наблюдаться только фрагментарно и рассматривается индивидуально. Наиболее продуктивный эксперимент (Pierre Auger Collaboration (PAC) — содружество 17 стран) на 01 апреля 2009 г. зарегистрировал 13207 событий $0,1$ ЕэВ $< E_0 < 41,1$ ЕэВ и только два события $E_0 > 10$ ЕэВ. Такое положение обусловлено не только технической спецификой эксперимента, но и указывает на подавление спектра в соответствии с предсказанием ГЗК.

Эксперимент PAC содержит ≈ 1600 наземных детекторов и четыре комплекса флюоресцентных детекторов на площади $\approx 50 \times 50$ км. Технические трудности позволяют регистрировать только часть потока и снижают качество данных. Статистическая и систематическая погрешности определения энергии составляют ≈ 6 и 22 %, соответственно [4].

Свойства асимметрии и перехода в нормальное распределение позволяют с точностью $1/n$ рассматривать $f_{en}(x)$ как распределение суммы конечного числа n случайных асимметричных слагаемых. Такое рассмотрение позволяет использовать для интерпретации $f_{en}(x)$ варианты распространенной интерпретации нормального распределения как распределения результата измерения при асимметричном элементарном измерении с учетом конечного числа "мешающих" факторов или как аппроксимации суммы конечного числа асимметричных случайных величин.

Форма (1) имеет чисто экспоненциальную асимптотику, параметризация (1) наглядна и кроме интуитивной интерпретации имеет геометрическую интерпретацию.

Практическое применение тонкого аппарата функций распределения требует внимания к качеству исходных данных. Поскольку эта форма очень проста, ее удобно использовать как приближенное распределение при аппроксимации низкокачественных данных (малая статистика, большие погрешности).

Распределение положения максимума каскадов гигантских энергий в атмосфере было исследовано с использованием $f_{en}(x)$ как функции распределения [5, 6]. Описательные возможности $f_{en}(x)$ весьма широки: обобщаются описательные возможности экспоненциального и нормального распределений и, по мнению авторов, $f_{en}(x)$ может иметь широкие приложения.

В настоящей работе рассмотрены методы аппроксимации формой (1) исходных данных с учетом их полноты, качества и вида представления независимо от того, имеют ли эти данные вероятностную интерпретацию.

Аппроксимация формулой, простой и удобной для аналитических и численных методов, — обычная задача, возникающая при моделировании и обработке данных.

Экспериментальные или модельные данные обычно представляются только значениями средних и дисперсий. Однако часто данные, рассматриваемые как случайные значения, имеют асимметричное распределение, поэтому представление данных средним и дисперсией недостаточно.

Следующий шаг, позволяющий учесть асимметрию, — представление дисперсии как суммы левой и правой частей; $f_{en}(x)$ удобна для такого представления.

Выше рассмотрены основные свойства $f_{en}(x)$, в частности, приведены точные формулы для первых моментов и характеристическая функция. Далее строятся методы аппроксимации, учитывающие качество исходных данных (характерное для каскадов гигантских энергий). Использование ме-

тодов иллюстрировано численными примерами. Для удобства приводится таблица, позволяющая получать значения собственно функции распределения аналогично интегралу вероятностей $\Phi(u)$. Методы имеют общий характер и могут быть полезны в других областях.

Свойства

$$f_{en}(x) = [a(2b/a)^2 \exp((2b/a)^2) \times K_1((2b/a)^2)]^{-1} \exp(-(x-c)^2 / (a(x-c) + 2b^2))$$

Для стандартной области определения $x \in (0, \infty)$ эта форма имеет вид

$$B(s, q) \exp(- (sx + q/x) / 2), \quad s \geq 0, \quad q \geq 0. \quad (2)$$

Связь (1) \Leftrightarrow (2) параметризаций задается соотношениями $a = 2q^{-1}$; $b^2 = q^{-1} \sqrt{s/q}$; $c = \sqrt{s/q}$.

Распределение $f_{en}(x)$ безгранично-делимо [7] и входит в семейство обобщенных инверсных гауссовых распределений (исследованное Б. Джоргенсом [8]).

Плотность вероятности этого семейства будет

$$f_{GiG}(x) = \frac{(s/q)^{p/2}}{2K_p(\sqrt{sq})} x^{p-1} e^{-(sx+q/x)/2},$$

где $x > 0$, K_p — модифицированная бесселева функция третьего рода порядка $p < \pm\infty$ и $s > 0$, $q > 0$.

Распределение $f_{en}(x)$ является особым случаем [9] гиперболических распределений: гипербола с вертикальной асимптотой. Этот случай как смешивающая функция генерирует все семейство гиперболических распределений (введенное и исследованное О. Е. Барндорф-Нильсеном [7, 9, 10]). Плотность вероятности этого семейства:

$$f_H(x) = \frac{\sqrt{s/q}}{2\sqrt{\beta^2 + sK_1(qs)}} e^{-\sqrt{((x-\mu)^2 + q)(\beta^2 + s)} + (x-\mu)\beta},$$

где $x \in (-\infty, +\infty)$;

K_1 — модифицированная бесселева функция третьего рода, порядка 1;

$\mu, \beta, s > 0$ и $q > 0$ — параметры.

Это семейство образуется как нормальная дисперсионно-средняя смесь $Y = \mu + \beta V + \sigma \sqrt{V} X$ при $\sigma = 1$ и свободных параметрах μ и β . Здесь случайные переменные X и V — независимы, X — нормально распределена с нулевым средним и единичной дисперсией, V — имеет плотность распределения $f_{en}(x)$ на стандартной области $x \in (0, \infty)$.

Свойства $f_{en}(x)$, общие с экспоненциальным и нормальным распределениями, исследованы в ра-

боте [11]. Эти свойства иллюстрирует рис. 1, показывает описательные возможности $f_{en}(x)$ и динамику перехода в экспоненциальное и нормальное распределения.

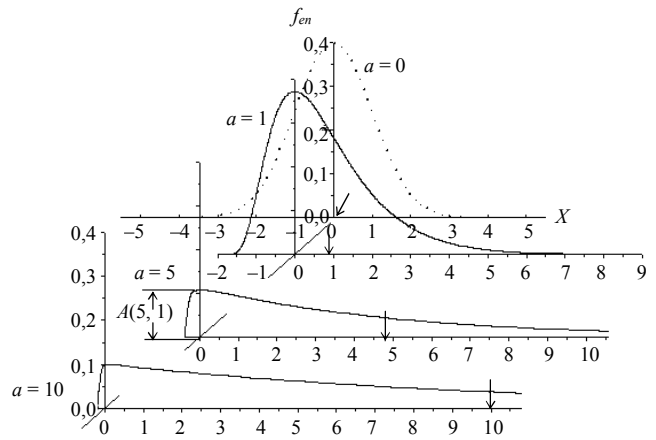


Рис. 1. Приведенные формы распределения $f_{en}(x)$. Стрелками показаны средние значения

Распределение $f_{en}(x)$ изображено одновершинной, колоколообразной, правоасимметричной ($a > 0$) кривой. Показаны распределения при $c = 0$, $b = 1$ и значениях $a > 0$, 1, 5, 10.

Для этих значений параметра a $f_{en}(x)$ изменяется от нормального к экспоненциальному распределению. Точечная кривая — легко узнаваемое стандартное нормальное распределение, соответствующее значению $a = 0$.

Видно, что при $a \neq 0$ распределения определены на полупрямых в соответствии с условием (1). Максимум плотности (равный значению нормирующего коэффициента $A(a, b)$) убывает с ростом a . При $a = 5$ значение $A(5, 1)$ выделено. Расстояния между модой c и математическим ожиданием \tilde{X} (средним \tilde{x} , если $c = 0$)

$$\tilde{X} = \tilde{x} + c \quad (3)$$

растут с ростом a , поскольку распределения становятся более крутыми слева и, соответственно, более пологими справа.

Легко представить, как форма кривой изменяется при масштабировании, и убедиться в том, что масштабированием ни одно из этих распределений не может быть получено из другого.

Таким образом, $f_{en}(x)$ определяет однопараметрическое семейство распределений с весьма широкими описательными возможностями.

В [11] также исследована ширина W распределения и ее левая W_l и правая W_r (от моды $c = 0$) составляющие на уровне d (см. также эти величины в примере, данном на рис. 3) как решения уравнения $A(a, b) \exp(-x^2 / (ax + 2b^2)) = A(a, b) / d = A(a, b) \exp(-\ln d)$ (эквивалентно $x^2 - x \cdot a \ln d - 2b^2 \ln d = 0$).

Часто полезны выражения параметров распределения через составляющие ширины на уровне $d = e$:

$$a = W_r - W_l, \tag{4}$$

$$2b^2 = W_l \cdot W_r \quad \text{или} \quad b = \sqrt{W_l \cdot W_r}. \tag{5}$$

Формулы (4), (5) имеют очевидную геометрическую интерпретацию, которая порождает соответствующую физическую интерпретацию в конкретных случаях.

Отметим связь между шириной и параметром z (см. ниже), определяющим форму распределения:

$$\frac{W_l W_r}{(W_r - W_l)^2} 2 \ln d = z \quad \text{на любом уровне } d.$$

Знания ширины на одном уровне недостаточно, чтобы полностью определить $f_{en}(x)$, но добавления отношения частей ширины (разделенной модой или средним) — уже достаточно.

Формулы для характеристик распределения $f_{en}(x)$ (нормировка, моменты, преобразования Лапласа и Фурье) могут быть получены непосредственно из формулы 3.471.9 (Градштейн и Рыжик) [12]:

$$\int_0^{\infty} x^{p-1} \exp(-(sx + q/x)/2) dx = 2(s/q)^{p/2} K_p(\sqrt{sq}), \quad \text{Re}(s) > 0, \quad \text{Re}(q) > 0. \tag{6}$$

В формуле (6) K_p — модифицированная бesselова функция третьего рода порядка p .

В дальнейшем также понадобятся разложения для $K_1(z)$ из [12]:

$$K_1(z) = \frac{1}{z} + \frac{z}{2} \ln \frac{z}{2} + o(z^2), \quad z \rightarrow 0,$$

$$K_1(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left(1 + \frac{3}{8z} - \frac{15}{128z^2} + \dots \right), \quad z \rightarrow \infty. \tag{7}$$

Нормирующий коэффициент

$$A(a, b) = [a \cdot (2b/a)^2 \cdot \exp((2b/a)^2 K_1((2b/a)^2))]^{-1} \tag{8}$$

удобно использовать в виде

$$A(a, b) = [a \cdot z \cdot \exp(z) \cdot K_1(z)]^{-1},$$

где $z = (2 \frac{b}{a})^2$ — (9)

масштабно-инвариантный параметр типа распределения.

Поскольку при масштабировании $x \leftrightarrow x/\alpha$, параметры экспоненциального и нормального распределений преобразуются одинаковым образом: $a' = a \cdot \alpha$, то отношения $a/a' = b/b'$ (и функции, зависящие только от таких отношений) масштаб-

инвариантны и могут использоваться для описания асимметрии $f_{en}(x)$.

При обработке исходных данных удобен также другой масштабно-инвариантный параметр. Определим σ_l^2 и σ_r^2 как левую и правую части дисперсии σ^2 относительно среднего:

$$\tilde{X} = \int_{c-2b^2/a}^{\infty} x f(x) dx,$$

$$\sigma^2 = \int_{c-2b^2/a}^{+\infty} (\tilde{X} - x)^2 f(x) dx = \sigma_l^2 + \sigma_r^2 =$$

$$= \int_{c-2b^2/a}^{\tilde{X}} (\tilde{X} - x)^2 f(x) dx + \int_{\tilde{X}}^{+\infty} (\tilde{X} - x)^2 f(x) dx.$$

Очевидно, что отношение

$$R^2 = \sigma_l^2 / \sigma_r^2 \tag{10}$$

масштабно-инвариантно, поэтому R^2 зависит только от z и может быть мерой асимметрии $f_{en}(x)$. Для экспоненциального распределения R^2 легко вычисляется ($R^2 = e/2 - 1$), и так как R^2 для $f_{en}(x)$ монотонно, получаем:

$$e/2 - 1 = 0,359... \leq R^2 \leq 1$$

для $a > 0$. Данные рис. 2 показывают изменение асимметрии $1 - \sigma_l^2 / \sigma_r^2$ распределения $f_{en}(x)$.

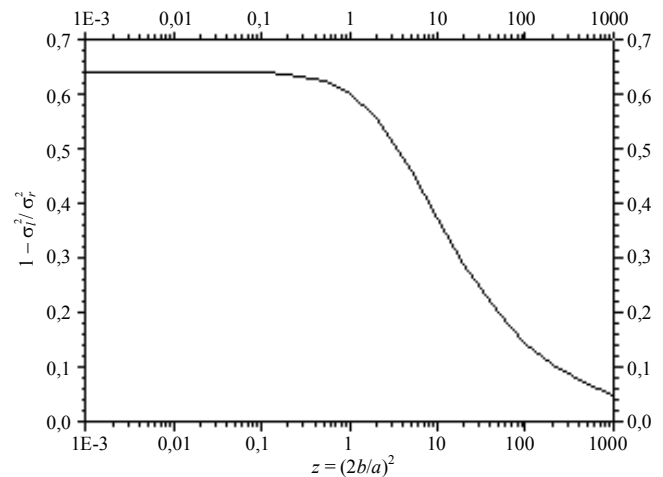


Рис. 2. Зависимость отношения частей дисперсии $(1 - \sigma_l^2 / \sigma_r^2)$ от типа распределения

Как и для нормального распределения часто бывает нужна интегральная форма, т. е. собственное распределение, а не плотность.

Функция

$$F_{en}(X, a, b, c) = \int_{c-2b^2/a}^X \frac{\exp(-(x-c)^2 / (a(x-c) + 2b^2))}{a(2b/a)^2 \exp((2b/a)^2 K_1((2b/a)^2))} dx \tag{11}$$

является интегральной формой однопараметрического распределения $f_{en}(x)$. Поскольку для практического использования удобно иметь выражение (11) вместе с табл. 1, a, b , связывающей значения параметров a, b, c с основными характеристиками распределения (коэффициент нормировки, математическое ожидание, дисперсия и мера асимметрии), приведенную форму $f_{en}(x)$ возьмем в виде

$$F_{en}(y, z) = \int_{-z/2}^y \frac{\exp(-x^2/(x+z/2))}{z \cdot \exp(z) \cdot K_1(z)} dx, \quad (12)$$

соответствующем $a = 1, c = 0$.

Таким образом,

$$F_{en}(X, a, b, c) = F_{en}((X \mp c)/(\pm a), (2b/a)^2) = F_{en}(y, z), \quad (13)$$

где знак параметра c противоположен знаку значения параметра a .

Итак, для однопараметрического распределения $f_{en}(x)$ мы имеем табл. 1, a, b со строками: z ,

$A|a|, \bar{x}/a, \sigma/a^2 - 1, \sigma_l^2/\sigma_r^2, y$, где вектор обозначает строки $F_{en}(y, z)$ (12) для значений y , данных в первой колонке. После расчета $z = (2b/a)^2$ значения нормирующего коэффициента, математического ожидания, дисперсии и отношения компонент дисперсии — могут быть получены из первых пяти строк таблицы и значений параметров (a, b, c). Также и наоборот: значение среднего, дисперсии и отношения компонент дисперсии могут быть использованы для получения значений $A(a, b), a, b, c$ (см. далее в разделе "Методы ..." численный пример и описание метода A). Работа с интегральной формой (функцией распределения) задается выражениями (11), (13), определяющими $F_{en}(X, a, b, c)$ через $F_{en}(y, z)$: нужно найти в табл. 1, a, b значение $F_{en}(y, z)$, где

$$y = (X \mp c)/(\pm a), \quad (14)$$

$$z = (2b/a)^2.$$

Приведем сводку основных свойств $f_{en}(x)$ как простейшего моста между экспоненциальным и нормальным распределениями (табл. 2).

Значения функций для расчета параметров $f_{en}(x)$ и значений $F_{en}(y, z)$

Таблица 1, а

Значения y	Значения функций распределения										
	z	.1E-02	.2E-02	.5E-02	.1E-01	.2E-01	.5E-01	.1E+00	.2E+00	.5E+00	.1E+01
	$A a $.99900	.99802	.99509	.99031	.98109	.95556	.91826	.85714	.73233	.61119
	\bar{x}/a	.99950	.99901	.99757	.99524	.99081	.97891	.96232	.93670	.88952	.84974
	$\sigma^2/a^2 - 1$.00000	.00000	.00001	.00002	.00010	.00061	.00235	.00865	.04304	.12768
σ_l^2/σ_r^2	.35914	.35914	.35914	.35915	.35918	.35938	.36006	.36243	.37406	.39829	
-0.4	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00303	
-0.2	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00602	
0.0	.00050	.00099	.00246	.00485	.00946	.02221	.04087	.07143	.13384	.19441	
0.2	.18168	.18208	.18326	.18517	.18880	.19855	.21229	.23383	.27550	.31417	
0.4	.33001	.33034	.33131	.33287	.33582	.34367	.35449	.37084	.39983	.42329	
0.6	.45146	.45173	.45252	.45379	.45620	.46257	.47125	.48402	.50486	.51850	
0.8	.55089	.55111	.55176	.55280	.55477	.55996	.56696	.57707	.59241	.59981	
1.0	.63230	.63248	.63301	.63386	.63565	.63970	.64538	.65346	.66493	.66841	
1.2	.69896	.69910	.69954	.70023	.70155	.70500	.70961	.71610	.72479	.72586	
1.4	.75353	.75365	.75400	.75457	.75599	.75847	.76222	.76745	.77409	.77372	
1.6	.79820	.79830	.79859	.79906	.79994	.80224	.80530	.80953	.81464	.81346	
1.8	.83478	.83486	.83510	.83548	.83620	.83809	.84058	.84400	.84797	.84637	
2.0	.86473	.86480	.86499	.86531	.86590	.86744	.86946	.87224	.87534	.87357	
2.2	.88925	.88931	.88947	.88972	.89020	.89146	.89312	.89538	.89780	.89602	
2.6	.92576	.92580	.92591	.92608	.92640	.92724	.92835	.92984	.93134	.92978	
3.0	.95024	.95026	.95033	.95045	.95067	.95123	.95197	.95296	.95390	.95264	
3.5	.96982	.96983	.96988	.96995	.97008	.97042	.97086	.97146	.97199	.97110	
4.0	.98169	.98170	.98173	.98177	.98185	.98206	.98232	.98268	.98299	.98239	
5.0	.99327	.99327	.99328	.99329	.99332	.99340	.99349	.99362	.99373	.99347	
10.0	.99995	.99995	.99996	.99995	.99996	.99996	.99995	.99994	.99996	.99996	

Таблица 1, б

Значения у	Значения функций распределения									
	z	.2E+01	.5E+01	.1E+02	.2E+02	.5E+02	.1E+03	.2E+03	.5E+03	.1E+04
	$A a $.48380	.33318	.24345	.17518	.11200	.07949	.05631	.03566	.02522
	\bar{x}/a	.81431	.78149	.76708	.75893	.75368	.75186	.75093	.75037	.75021
	σ^2/a^2-1	.33690	1.0448	2.2749	4.7632	12.255	24.752	49.751	124.75	249.73
σ_l^2/σ_r^2	.44472	.54088	.62683	.70955	.80079	.85357	.89369	.93123	.95083	
-50.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00038
-20.0	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00061	.02806	.09296
-10.0	.00000	.00000	.00000	.00000	.00007	.00968	.05911	.16908	.25125	
-5.0	.00000	.00000	.00000	.00034	.04221	.12401	.21285	.30975	.36337	
-4.0	.00000	.00000	.00000	.00551	.08408	.17493	.25838	.34257	.38757	
-3.0	.00000	.00000	.00043	.03336	.14743	.23595	.30795	.37649	.41218	
-2.5	.00000	.00000	.00514	.06431	.18727	.26980	.33399	.39378	.42460	
-2.0	.00000	.00000	.02503	.10990	.23207	.30554	.36072	.41124	.43708	
-1.6	.00000	.00218	.06054	.15706	.27102	.33526	.38251	.42532	.44710	
-1.2	.00000	.02578	.11696	.21278	.31222	.36579	.40459	.43947	.45715	
-1.0	.00000	.05387	.15263	.24335	.33352	.38130	.41572	.44656	.46218	
-0.8	.00060	.09397	.19256	.27539	.35517	.39693	.42689	.45367	.46722	
-0.6	.02040	.14462	.23597	.30861	.37712	.41267	.43810	.46079	.47226	
-0.4	.07842	.20330	.28199	.34272	.39929	.42849	.44933	.46791	.47730	
-0.2	.16284	.26715	.32972	.37742	.42161	.44436	.46058	.47504	.48234	
0.0	.25810	.33341	.37828	.41241	.44400	.46025	.47184	.48217	.48739	
0.2	.35375	.39971	.42684	.44740	.46639	.47615	.48310	.48930	.49243	
0.4	.44392	.46418	.47468	.48212	.48871	.49202	.49436	.49643	.49748	
0.6	.52579	.52545	.52119	.51632	.51088	.50784	.50559	.50356	.50252	
0.8	.59832	.58261	.56585	.54978	.53286	.52358	.51680	.51067	.50756	
1.0	.66152	.63511	.60828	.58230	.55457	.53923	.52797	.51778	.51259	
1.2	.71594	.68272	.64820	.61371	.57595	.55475	.53910	.52488	.51763	
1.4	.76239	.72544	.68543	.64388	.59696	.57013	.55018	.53196	.52265	
1.6	.80176	.76342	.71988	.67268	.621753	.58535	.56119	.53903	.52768	
1.8	.83498	.79692	.75151	.70005	.63763	.60038	.57214	.54608	.53269	
2.0	.86288	.82627	.78037	.72591	.65722	.61521	.58301	.55311	.53770	
2.2	.88623	.85184	.80653	.75025	.67625	.62982	.59379	.56011	.54270	
2.6	.92198	.89309	.85130	.79429	.71255	.65830	.61508	.57405	.55267	
3.0	.94670	.92356	.88699	.83228	.74634	.68571	.63595	.58788	.56261	
3.5	.96704	.95026	.92094	.87179	.78487	.71830	.66137	.60498	.57495	
4.0	.97968	.96794	.94543	.90333	.81921	.74889	.68595	.62184	.58722	
5.0	.99234	.98697	.97488	.94706	.87566	.80370	.73233	.65476	.61144	
10.0	.99994	.99988	.99966	.99848	.98797	.95804	.89949	.79746	.72397	
20.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.99998	.99949	.99401	.95324	.88665	
50.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.99997	.99858	

Таблица 2

Основные свойства $f_{en}(x)$

Свойства распределений	Распределения		
	$\frac{\exp(-(x-c)/a)}{a}$	$\frac{\exp(-(x-c)^2/(a(x-c)+2b^2))}{a(2b/a)^2 \exp((2b/a)^2) K_1((2b/a)^2)}$	$\frac{\exp(-(x-c)^2/(2\sigma^2))}{\sqrt{2\pi}\sigma}$
Область определения	$c \leq x < \infty$	$c - 2b^2 \leq x < \infty$	$-\infty \leq x < +\infty$
Симметрия	-	-	+
Интерпретация параметров	+	+	+
Масштабирование параметров	+	+, +	+
Масштабно-инвариантный параметр	-	$b/a [z = (2b/a)^2]$	-
Мода	c	c	c
Характеристическая функция	$\frac{e^{itc}}{1-ita}$	$\frac{e^{it(c-\frac{2b^2}{a})}}{\sqrt{1-ita}} \frac{K_1(z\sqrt{1-ita})}{K_1(z)}$	$e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}+itc}$
Математическое ожидание X	$c + a$	$c + \frac{2b^2}{a} (K_2(z)/K_1(z) - 1)$	c

Свойства распределений	Распределения		
	$\frac{\exp(-(x-c)/a)}{a}$	$\frac{\exp(-(x-c)^2/(a(x-c)+2b^2))}{a(2b/a)^2 \exp((2b/a)^2) K_1((2b/a)^2)}$	$\frac{\exp(-(x-c)^2/(2\sigma^2))}{\sqrt{2\pi}\sigma}$
Дисперсия	$a^2 = (\bar{X}-c)^2$	$4b^2 \left[\left(\frac{K_2(z)}{K_1(z)} \right)^2 \left(-\frac{z}{4} + \frac{K_2(z)}{K_1(z)} + \frac{z}{4} \right) \right]$	$\sigma^2 = b^2$
Третий центральный момент μ_3	$2a^3$	$a4b^2 \left[\left(\frac{K_3(z)}{K_1(z)} \right)^3 \left(\frac{z^2}{4} \right) + \left(\frac{K_2(z)}{K_1(z)} \right)^2 \left(-\frac{3}{2}z \right) + \frac{K_2(z)}{K_1(z)} \left(-\frac{z^2}{4} + 3 \right) + \frac{3}{4}z^2 \right]$	0
Отношение σ_l^2/σ_r^2 ($a > 0$)	$e/2 - 1$	$e/2 - 1 \leq \sigma_l^2/\sigma_r^2 \leq 1$	1
Ширина W на уровне e^{-1}	a	$\sqrt{a^2 + 8b^2} \quad [W_{l,r} = W/2 \mp a/2]$	$2\sqrt{2}\sigma$

Можно видеть, как для рассматриваемого промежуточного случая свойства экспоненциального (при $b \rightarrow 0$) и нормального (при $a \rightarrow 0$) распределений обобщаются и преобразуются в соответствующие соотношения.

Отметим еще одно свойство $f_{en}(x)$, связанное с тем, что при $a \rightarrow 0$ и $c \rightarrow 0$ распределение $f_{en}(x)$ переходит в стандартное нормальное распределение.

Поскольку при слабых ограничениях сумма n симметричных случайных переменных аппроксимируется нормальным распределением с точностью $\sim 1/n$, но сумма несимметричных слагаемых с точностью $\sim 1/\sqrt{n}$, то можно найти асимметричное распределение, аппроксимирующее эту сумму с точностью $\sim 1/n$. Одним из таких распределений является $f_{en}(x)$.

Действительно, пусть $f(x)_\Sigma$ — плотность вероятности $\chi = \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i - m}{\sigma\sqrt{n}}$, где ξ_i — одинаково распределенные асимметричные случайные величины с общим средним m и стандартным отклонением σ .

Возьмем разложение Эджворта [13], включая член $R_{4n} = O(n^{-1})$:

$$f(x)_\Sigma = \varphi(x) - n^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{3!} \gamma_1 \varphi^{(3)}(x) + \left(\frac{1}{4!} \gamma_2 \varphi^4(x) + \frac{10}{6!} \gamma_1^2 \varphi^{(6)}(x) \right) (n^{-1}) - \dots, \tag{15}$$

где $\varphi^{(k)}(x)$ — k -я производная $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$;

$\gamma_1 = \mu_3/\sigma^3$ и $\gamma_2 = \mu_4/\sigma^4 - 3$ — коэффициенты асимметрии и эксцесса распределения ξ_i , соответственно.

Напомним, что $\varphi^{(k)}(x) = (-1)^k H_k(x) \varphi(x)$ и $H_k(x)$ — полином Эрмита порядка k .

Вычтем из обеих частей (15) $f_{en}(x)$:

$$\Delta = \varphi(x) - n^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{3!} \gamma_1 \varphi^{(3)}(x) - A(a,b) \times \exp(-(x-c)^2/(a(x-c)+2b^2)) + O(n^{-1}). \tag{16}$$

Выберем такие значения параметров a, b, c , чтобы член $n^{-1/2}$ поглощался функцией $f_{en}(x)$.

Разлагая $A(a, b)$, уравнение (8) с использованием (7) (имея в виду, что $a \rightarrow 0$, более точно см. ниже (18)), получаем $A(a,b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}b} + O(a^2)$.

Делим (16) на $\varphi(x)$ и, разлагая полученную экспоненту вблизи нуля, сохраняем линейный член, так как он имеет порядок $O(c)$.

Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned} (\Delta - O(n^{-1}))/\varphi(x) &= 1 + n^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{3} \gamma_1 (x^3 - 3x) - \\ &- \frac{1}{b} \left(1 - \frac{(x-c)^2}{a(x-c)+2b^2} + \frac{x^2}{2} \right) + O(a^2) + O(c^2) = \\ &= n^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{3!} \gamma_1 (x^3 - 3x) - \frac{1}{b} + \\ &+ \frac{2x^2 - 4xc + 2c^2 - x^2 a(x-c) - x^2 2b^2}{2b(a(x-c) + 2b^2)} + \\ &+ O(a^2) + O(c^2) = n^{-\frac{1}{2}} \frac{2}{3!} \gamma_1 (x^3 - 3x) - \\ &- \frac{ax^3}{2b(a(x-c) + 2b^2)} - \frac{4cx}{2b(a(x-c) + 2b^2)} - \\ &- \frac{(2b^2 - 2 - ac)x^2}{2b(a(x-c) + 2b^2)} + \frac{2c^2}{2b(a(x-c) + 2b^2)} - \\ &- \frac{1}{b} + 1 + O(a^2) + O(c^2). \end{aligned} \tag{17}$$

Последнее равенство показывает, какими должны быть выбраны параметры a, b, c :

$$\begin{aligned} a &= \frac{2}{3}\gamma_1 n^{-\frac{1}{2}} + O(n^{-1}); & b &= (1 + O(n^{-1}))^{\frac{1}{2}}; \\ c &= -\frac{1}{2}\gamma_1 n^{-\frac{1}{2}} + O(n^{-1}). \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя эти значения в (17), убеждаемся, что $\Delta/\varphi(x) = O(n^{-1})$, т. е.

$$\begin{aligned} f(x)_\Sigma &= f_{en}(x) + \Delta + R_{4n} = \\ &= f_{en}(x) + \varphi(x)O(n^{-1}) + R_{4n} = f_{en}(x) + O(n^{-1}). \end{aligned}$$

Так как параметры a, b, c зависят от $n^{-1/2}\gamma_1$, то область определения $f_{en}(x)$ (1) зависит от $n^{-1/2}\gamma_1$: $x \geq c - 2b^2/a = -3n^{-1/2}\gamma_1^{-1} - n^{-1/2}\gamma_1/2$.

Поскольку вне этой области $0 < f(x)_\Sigma < O(n^{-1})$, то здесь полагаем $f_{en}(x) = 0$, и необходимости в коррекции нашей аппроксимации из-за отрицательных значений $H_3(x)$ [10, 13] не возникает.

Таким образом, при $-\infty \leq x \leq +\infty$ $f_{en}(x)$ равномерно аппроксимирует $f(x)_\Sigma$ с точностью n^{-1} .

Если ξ_i не имеют общего распределения [9, 14], значения γ_1 и γ_2 нужно заменить на

$$\begin{aligned} \gamma'_1 &= \sum_{i=1}^n \mu_{3_i} / (\sum_{i=1}^n \sigma_i^2)^{3/2} \\ \text{и } \gamma'_2 &= (\sum_{i=1}^n \mu_{4_i} - 3 \sum_{i=1}^n \sigma_i^4) / (n^{-1} (\sum_{i=1}^n \sigma_i^2)^2), \end{aligned}$$

где μ_{3_i} и μ_{4_i} — третий и четвертый центральные моменты ξ_i .

Это свойство имеет некоторые следствия, полезные для практического применения.

Видно, что формулы (18) допускают различные уточнения.

Например, можно потребовать, чтобы первые три момента аппроксимации $f_{en}(x)$ совпадали с моментами $f(x)_\Sigma$: 0, 1, $n^{-1/2}\gamma_1$.

Используя (5) и (3), можно получить моменты $f_{en}(x)$ в виде:

$$\begin{aligned} m(f_{en}(x)) &= c + \frac{3}{4}a + \frac{3}{2^6} \frac{a^3}{b^2} - \frac{3}{2^8} \frac{a^5}{b^4} + \dots; \\ \mu_2(f_{en}(x)) &= b^2 + \frac{3}{4}a^2 + \frac{9}{2^7} \frac{a^4}{b^2} + \frac{51}{2^9} \frac{a^6}{b^4} + \dots; \\ \mu_3(f_{en}(x)) &= \frac{3}{2}ab^2 + \frac{3}{2}a^3 + \frac{111}{2^{10}} \frac{a^5}{b^2} + \dots, \end{aligned}$$

а затем, последовательно учитывая степени $n^{-1/2}\gamma_1$, получим параметры $f_{en}(x)$ в виде:

$$\begin{aligned} a &= \frac{2}{3}\gamma_1 n^{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{3^3}\gamma_1^3 n^{-\frac{3}{2}} + O(\gamma_1^5 n^{-\frac{5}{2}}); \\ b^2 &= 1 - \frac{1}{3}\gamma_1^2 n^{-1} + \frac{15}{2^3 3^2}\gamma_1^4 n^{-2} + O(\gamma_1^6 n^{-3}); \\ c &= -\frac{1}{2}\gamma_1 n^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2^3 3^2}\gamma_1^3 n^{-\frac{3}{2}} + O(\gamma_1^5 n^{-\frac{5}{2}}), \end{aligned}$$

при $n^{-1/2}\gamma_1 < 1$.

Для повышения точности аппроксимации в конкретных практических случаях можно ввести дополнительные параметры a_1, b_1, c_1 :

$$a = \frac{2}{3}\theta + a_1\theta^2; \quad b^2 = 1 + b_1\theta^2; \quad c = -\frac{1}{2}\theta + c_1\theta^2,$$

где $\theta = n^{-1/2}\gamma_1 < 1$, и учесть последний член $\sim O(n^{-1})$ разложения Эджворта (15). В общем случае не удаётся полностью компенсировать член $R_{en}(x) \sim O(n^{-1})$, но линейная функция, входящая в этот член, $(\frac{1}{4}a_1 - \frac{1}{2}b_1 - c_1)x + \frac{1}{2}b_1$ может уменьшить $R_{en}(x)$ в нужной области.

Рассматриваемое свойство (аппроксимация суммы конечного числа асимметричных случайных слагаемых) позволяет интерпретировать $f_{en}(x)$ аналогично распространенной интерпретации нормального распределения как распределения ошибки измерения (и использовать это свойство для аппроксимации таких сумм, т. е. работать при таком нарушении условий центральной предельной теоремы).

Значение ξ может рассматриваться как результат элементарного измерения ($\xi - m$ — как элементарная ошибка). Величина ξ_i может быть распределена асимметрично из-за свойств объекта измерения или прибора. Если в процессе измерения на результат (χ) практически влияет не бесконечное число мелких факторов, а всего несколько (n) существенных, то асимметричность ξ_i не гасится суммированием и $f(x)_\Sigma$ — распределение величины χ получается асимметричным; $f_{en}(x, n, \gamma_1)$ аппроксимирует это асимметричное распределение $(f(x)_\Sigma)$ с точностью $\sim 1/n$, поскольку кроме асимметрии не может учесть многие другие характеристики ξ_i .

Бесконечно большое n гасит суммированием эти характеристики вместе с асимметрией, но при этом "теряется" ($\rightarrow -\infty$) начало процесса. Бывают такие физические процессы, в которых реализуется $n = \infty$ (скажем, 10^{10} взаимодействий), но их начало (скажем, первое взаимодействие) существенно важно; каскады ультравысоких энергий — наглядный пример.

мального распределений сводится к сравнению рассчитанного значения дисперсии с дисперсией приведенной формы (для определения параметра масштаба) и аналогичному сравнению средних (для определения параметра сдвига).

Знание среднего и дисперсии недостаточно для определения параметров $f_{en}(x)$, поскольку приведенная форма этого распределения не единственная, а образует однопараметрическое семейство, зависящее от масштабно-инвариантного параметра типа распределения, являющегося также мерой асимметрии. Поэтому если сначала найти значение этого параметра, то получение значений других параметров $f_{en}(x)$ сведется по существу к известным процедурам с этими родственными распределениями.

Для определения значения параметра типа распределения можно воспользоваться мерой асимметрии, введенной (10), так как значение R^2 может быть найдено непосредственно из исходных данных (для этого она и была введена). Это значение позволяет найти (например, с помощью рис. 2 или табл. 1, a , b значение параметра z , т. е. решить задачу, оставаясь в рамках привычных процедур работы с известными распределениями.

Формула (10) определяет интуитивную оценку R^2 (так называемый метод подстановки). Учитывая непрерывность всех рассматриваемых функций, эта оценка достаточна. Ее свойства полезно изучить более подробно для широкого использования $f_{en}(x)$.

Итак, из начальных данных необходимо рассчитать три числа: среднее, левую и правую части дисперсии: \bar{X} , σ_l^2 , σ_r^2 . Затем значение $R^2 = \sigma_l^2 / \sigma_r^2$ определяет значение параметра z из таблицы. Значение z в свою очередь определяет значения дисперсии σ^2 и математического ожидания \bar{x} приведенной формы $f_{en}(x)$ [$a = 1$, $c = 0$].

Сравнение рассчитанной дисперсии с полученным из табл. 1, a , b значением для приведенной формы определяет параметр

$$a = \sqrt{(\sigma_l^2 + \sigma_r^2) / [\sigma^2 / a^2]}.$$

Аналогично, учитывая сдвиг, получаем:

$$c = \bar{x} - [\bar{x} / a] \sqrt{(\sigma_l^2 + \sigma_r^2) / (\sigma^2 / a^2)}.$$

Завершая процедуру, получим значение параметра b из (9) и нормирующего коэффициента $A(a, b)$ из (8) или из табл. 1, a , b .

Полученное таким образом распределение $f_{en}(x)$ будет иметь среднее, дисперсию и отношение частей дисперсии такими же, как и исходные данные.

Этот метод удобен для различного вида представления исходных данных, например гисто-

грамм (интерпретируемых как плотность распределения или без такой интерпретации, а рассматриваемых как значения функции, заданной в некоторых точках) или как ряд результатов измерений некоторой характеристики, так как этому методу требуется только возможность рассчитать среднее, левую и правую составляющие дисперсии.

При обработке результатов измерений стадия гистограммирования может быть опущена. Этот метод может использоваться при малой статистике (скажем меньше 50), когда трудно получить надежную гистограмму.

Метод Б.

Аппроксимация двумя парами параметров

Рассмотрим способ аппроксимации, основанный на специфическом свойстве формы (1): линейности (по x) знаменателя в экспоненте:

$$a(x - c) + 2b^2 = (x - c)^2 / \ln(a / f(x)). \quad (19)$$

Из этого равенства видно, что аппроксимация $f(x)$ (в частности, гистограммы) при известном положении максимума формы (1), т. е. при известных значениях A и c , сводится к линейной аппроксимации вычисляемой правой части (19).

Пара (A, c) определяет положение кривой (1) на координатной плоскости и ее центральную часть, но форма кривой и масштаб определяются парой (a, b) (9), (4), (5). Исходные данные и их обработка часто отличаются в центральной части и на периферии распределения, потому что там отличаются определяющие процессы. И по физическим, и по статистическим причинам центральная часть обычно меньше подвержена флуктуациям, чем периферия. В случае малых флуктуаций можно получить достаточно точные значения A и c фитированием (подгонкой аппроксимацией) области максимума ($e^{-x^2} = 1 - x^2 + x^4 / 2 - \dots$) параболой, скажем, по пяти точкам. Можно (и часто полезно) исключить некоторые из этих точек при последующем расчете a и b .

Аппроксимация, построенная таким образом, основывается на концепции моды (вместо среднего, как в методе А) как более естественной для $f_{en}(x)$ и робастной характеристике.

Рис. 4 иллюстрирует аппроксимацию методом Б для моделированного индивидуального каскада, генерированного протоном энергии 10^{19} эВ с зенитным углом $\theta = 44^\circ 24'$. Кружками показаны значения $N(t)$, сплошная линия — аппроксимация (1), квадраты — вычисленные значения правой части (19). Область максимума представлена фрагментом более подробно. Парабола, определяющая значения t_m и $N(t_m)$, дана точками. Ось ординат линейной аппроксимации по t

$$a(t - t_m) + 2b^2 = (t - t_m)^2 / \ln(N(t_m) / N(t)),$$

определяющей значения a и b , дана справа в естественном, более подробном масштабе (≈ 4 порядка). Из рис. 4 получаем:

$$\begin{aligned} N_m &= 7,39 \cdot 10^9, \quad t_m = 740; \\ a &\approx (1,43 \cdot 10^5 - 7,8 \cdot 10^4) / 1000 = 65; \\ 2b^2 &\approx 1,43 \cdot 10^5 - (1400 - 740) = 1 \cdot 10^5; \\ N(t) &= 7,39 \cdot 10^9 \exp(-(t - 740)^2 / (65(t - 740) + 1 \cdot 10^5)). \end{aligned}$$

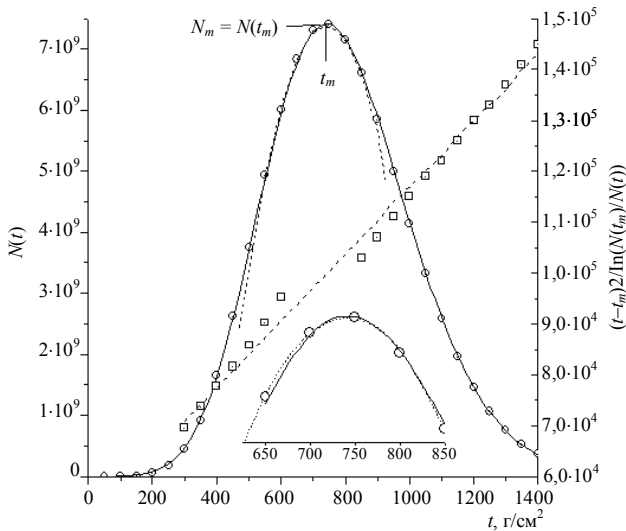


Рис. 4. Аппроксимация индивидуального каскада методом Б:
 o — $N(t)$; □ — $(t - t_m)^2 / \ln(N(t_m) / N(t))$

Этот метод удобен для усеченных данных, т. е. в случаях, когда, например, хвост распределения неизвестен, или неполных данных с "дырами" (например, когда некоторая промежуточная часть всего диапазона недоступна для измерения, или колонка гистограммы просто потеряна при передаче данных), поскольку этот метод требует знания только максимума и возможности линейной аппроксимации.

Из рис. 4 также видно, как удаление некоторых точек повлияет на качество аппроксимации, т. е. можно судить о ее приемлемости.

Метод Б, по существу, фитирующий и основан на робастных характеристиках исходных данных. В случае достаточной статистики этот метод имеет преимущество перед методом А в том, что не требует полноты данных.

Конкретные условия могут требовать построения методов, промежуточных между А и Б. Например, если мода и среднее могут быть определены достаточно надежно, а части дисперсии вызывают сомнения, для построения $f_{en}(x)$ можно воспользоваться основанной на моде мерой асимметрии К. Пирсона: $(\bar{x} - c) / \sigma$ [13].

Результаты этих методов (как и саму форму (1)) можно использовать как начальное приближение для получения более точных приближений.

Некоторые примеры приложений для УВЭ-каскадов

Для нужд методики оценки энергии первичной частицы и первых шагов в понимании изменений массового состава, обусловленных эффектом ГЗК (подавление протонной составляющей, рост доли фотонов и доли тяжелых (Fe) ядер, хотя поток их тоже подавляется), было выполнено моделирование атмосферных ливней, генерированных протонами. Тщательное моделирование в модели кварк-глюонных струн с последующим учетом всех основных электромагнитных процессов (включая эффект Ландау—Померанчука), выполненное Л. Г. Деденко и Г. Ф. Федоровой по методике [17], дало возможность получить описание протонных каскадов в интервале (10^{19} — 10^{21}) эВ.

Каждый индивидуальный каскад, аппроксимированный $f_{en}(x)$ методом Б (пример 123-го каскада дан на рис. 4) с точностью $\approx 15\%$, определяется значениями четырех параметров: t_m, N_m, a, b .

По результатам аппроксимации всего множества промоделированных ливней построены (методом А) функции плотности распределений параметров: $p(t_m), p(N_m), p(a), p(b)$, а индивидуальный каскад рассмотрен как конкретная реализация случайных величин t_m, N_m, a, b .

Анализ этих функций [3, 5, 6] показал, что число частиц в максимуме ливня флуктуирует так, что (наиболее употребительная в то время) методика определения энергии на основе этого параметра может давать десятикратную ошибку. Был выявлен наименее флуктуирующий параметр $s = \sqrt{2\pi} N_m b$ (по существу площадь под каскадной кривой, которая, как известно, пропорциональна полной энергии), но также недостаточный для оценки энергии первичной частицы, и был сделан вывод о необходимости многопараметрической методики.

Особого внимания заслуживает распределение $p(t_m)$ [18]. Положение максимума в направлении развития каскада (t_m, N_m) измеряется экспериментально. Практически все рассматриваемые каскады достигают максимума в атмосфере, причем наиболее вероятно на глубине ≈ 700 г/см² (из-за преобладания низкоэнергетичной части диапазона), т. е. в условиях, благоприятных для регистрации.

Эта характеристика используется для оценки первичной энергии и массового состава первичного космического излучения. Массовый состав в различных энергетических диапазонах изучается

сравнением наблюдаемых значений с результатами моделирования для различных ядер. Изменение (по энергии) наблюдаемого распределения t_m используется для получения оценок изменения массового состава.

При определенной энергии среднее значение \tilde{t}_m первичного излучения с массой A выражается через среднее значение \tilde{t}_m для протонов.

Физической основой для такого способа исследования являются доминирование протонной компоненты ($\approx 80\%$) в потоке космических лучей и известное отличие каскадов, генерированных протонами, от каскадов, генерированных другими ядрами. Из-за большей множественности первых взаимодействий каскады, генерированные ядрами, развиваются быстрее и менее флуктуируют, чем каскады, генерированные протонами. Поэтому (при той же энергии) $p(t_m)$ от ядерных каскадов сдвинута к меньшим глубинам (на ≈ 70 г/см²) и имеет меньшую ширину (как предполагают авторы, асимметрия тоже должна быть меньше). Каскады от первичных фотонов отличаются от протонных в противоположную сторону, т. е. их глубина больше и функция распределения шире. Таким образом, характеристики каскадов, генерированных протонами, являются базовыми для оценок энергии и массового состава.

Глубина максимума каскада определяется двумя физическими процессами: глубиной первого взаимодействия (с известным экспоненциальным распределением) и флуктуациями каскадного процесса (от точки первого взаимодействия), которые в своей центральной части близки к нормальному распределению.

Функция распределения t_m не является сверткой экспоненциального и нормального распределений (но близка к ней). Очевидно, что $p(t_m)$ должна быть определена на полупрямой, в области максимума быть такой же, как нормальное распределение, и иметь экспоненциальное затухание. Поэтому естественно использовать $f_{en}(x)$ для аппроксимации $p(t_m)$ — плотности вероятности глубины максимума каскада [6].

Полное описание функций распределения t_m в энергетическом интервале 10^{19} – 10^{21} эВ, полученное, как описано выше, по результатам моделирования, дано на рис. 5 из [19] в компактном виде: $p(t_m)$, аппроксимированные $f_{en}(x)$, представлены средним значением (диаметры точек — точность среднего) и частями дисперсии (стрелки — ее компоненты); справа (со шкалой глубин в г/см³) — экспериментальные данные от всего первичного потока (смесь от фотонов до тяжелых ядер) в диапазоне (10^{18} – $2,5 \cdot 10^{19}$) эВ (см. рис. 3, фрагмент 2).

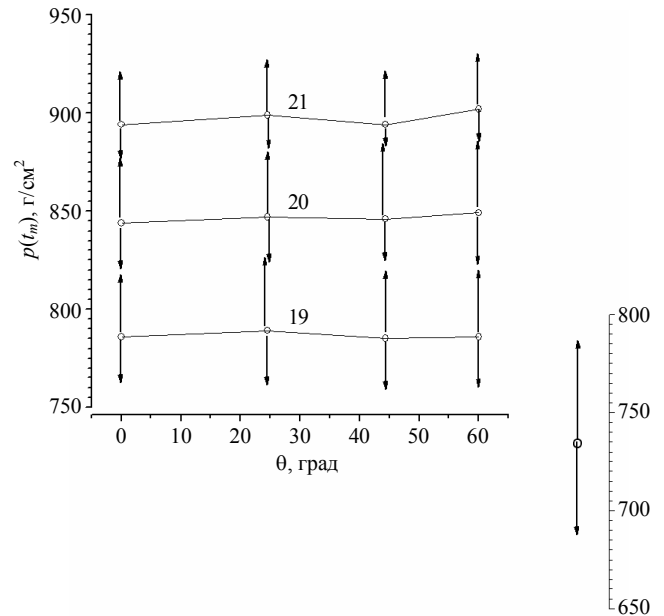


Рис. 5. Функции распределения глубины максимума модельных каскадов от первичных протонов

Значения десятичных логарифмов от энергии в электронвольтах указаны рядом с соответствующими вертикальными линиями.

Экспериментальные результаты лежат ниже, и функция распределения шире. Положение среднего ($732,9$ г/см²) попадает в область, где должны были бы быть протонные каскады энергии 10^{18} эВ.

Напомним, что из-за крутопадающего спектра ($\approx E^{-3}$) в этой смеси в основном присутствуют низкоэнергетичные каскады из левого края диапазона (10^{18} эВ). Большие значения t_m от каскадов большей энергии "уравновешиваются" усреднением с меньшими значениями t_m от каскадов, образованных тяжелой фракцией ($\tilde{t}_m(Fe) - \tilde{t}_m(p) \approx -70$ г/см²). Это приводит к увеличению ширины функции распределения, что видно из рис. 5. В [15] эти результаты не описаны достаточно полно, чтобы можно было бы сделать более определенные, а не только качественные, выводы о непротиворечивости и согласованности результатов в этом диапазоне (возможно, это обстоятельство обусловлено также тем, что малая статистика и неточность данных могут приводить к необоснованным громким поспешным выводам).

Моделирование показывает, что для протонных каскадов среднее значение практически не зависит от угла, и его рост (≈ 55 г/см²) при росте энергии на порядок (elongation rate) совпадает с оценкой работы [20]. Видно также убывание дисперсии с ростом энергии: $\approx 25\%$ для всего энергетического диапазона, что и согласуется с ранее полученными результатами [21] для зенитного угла $\theta = 45^\circ$.

Вместе с убыванием дисперсии можно видеть некоторый рост асимметрии распределений, но

такое заключение нам представляется ненадежным. Учитывая качество данных, можно отметить только масштабное изменение функции распределения (убывание σ^2). Здесь можно также видеть подтверждение ранее полученного результата: ширина полосы (около среднего значения), содержащей 50 % вероятности, составляет ≈ 50 г/см².

Таким образом, для оценки первичной энергии параметр t_m уступает параметру $s = \sqrt{2\pi}N_m b$. Более полное обсуждение можно найти в работе [19].

Дискуссия

Как упоминалось выше, наиболее продвинутый эксперимент РАС, регистрирующий частицы, достигшие поверхности земли SD-детекторами? и ионизационное свечение в объеме атмосферы FD- детекторами, установил (из ≈ 20000 событий) подавление потока в соответствии с предсказанием ГЗК [4]. Следующая проблема — оценка доли γ -компоненты в общем потоке первичного излучения. Из FD-данных (с использованием функции временной развертки показаний SD для калибровки энергетической шкалы) верхняя граница γ -компоненты была оценена как 16 % для $E_0 > 10^{19}$ эВ [20] (2007 г.). Затем [22] (2008 г.) из чувствительности функции временной развертки SD к продольному развитию каскада и кривизне фронта ливня (с использованием FD-показаний для калибровки энергетической шкалы) было получено: 2,0; 5,1 и 31 % как границы при энергиях, соответственно, больших 10^{19} , $2 \cdot 10^{19}$, $4 \cdot 10^{19}$ эВ.

Этот результат значительно перекрыл все предыдущие и установил ограничения на модели происхождения космических лучей.

В данной работе указывается, что использовались только две характеристики функции временной развертки (10 и 50 % квантили — см. рис. 6), говорится, что возможности этой функции будут использованы в дальнейшем. Работа [23] (2009 г.) указывает на перспективы использования совместной информации от SD и FD как описывающих одно явление, обсуждает некоторые свойства функции временной развертки и как первую задачу, указывает на необходимость параметрического описания этой функции.

Здесь же приводится пример этой функции. На рис. 6 воспроизведен этот пример вместе с нашей аппроксимацией:

$$S(t) = 59,4 \cdot \exp(-(t - 51,2)^2 / ((77,0 \cdot (t - 51,2) + 2 \cdot 42,1^2))),$$

показывающей на одну степень свободы $\chi^2 = 1,61$. В настоящее время трудно сказать, на сколько $f_{en}(x)$ может быть полезна в методике РАС.

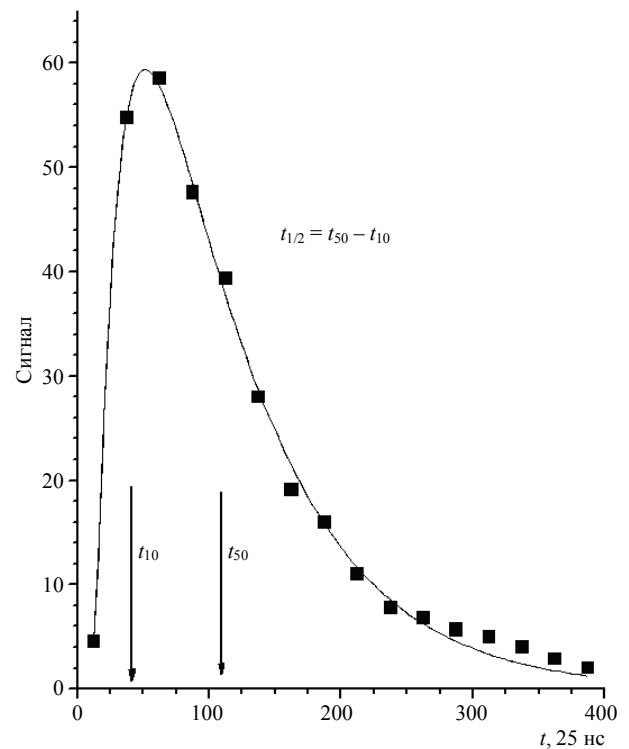


Рис. 6. Функция временной развертки сигнала от SD-детектора и ее аппроксимация функцией $f_{en}(t)$

Авторы благодарны профессорам В. Ю. Королеву и Л. Г. Деденко за поддержку этой работы и Г. Ф. Федоровой за проведение расчетов.

Работа поддержана грантом РФФИ 03-02-16290 и грантом INTAS 03-51-5112.

Литература

1. Greizen K.// Phys. Rev. Lett. 1966. No. 2. P. 748.
2. Зацепин Г. Т., Кузьмин В. А.// Письма в ЖЭТФ. 1966. Т. 4. С. 53.
3. Kirillov A. A., Kirillov I. A.// Astropart. Phys. 2003. No. 19. P. 101.
4. Van V. Elewyc// Modern Phys. Lett. A23. 2008. P. 221.
5. Dedenko L. G., Kirillov A. A. et al.// Proc. 28th. Int. Cosmic Ray Conf. 2003. V. 2. P. 531.
6. Kirillov A. A., Kirillov I. A.// Ibid. P. 535.
7. Barndorff-Nielsen O. E., Ch. Halgreen. Z.// Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete. 1977. No. 38. P. 309.
8. Jorgensen B. Statistical Properties of the Generalized Inverse Gaussian Distribution. Lecture Notes in Statistics. — New York, 1982. No. 9. Springer.
9. Barndorff-Nielsen O. E.// Proc. R. Soc. Lond. A. 1977. No. 353. P. 401.
10. Барндорф-Нильсен О., Кокс Д. Асимптотические методы в математической статистике: Пер. с англ./ В. Е. Бенинг, В. Ю. Королев и В. В. Ульянов/Под ред. Ю. В. Прохорова. — М.: Мир, 1999. — 256 с.
11. Кириллов А. А., Кириллов И. А.// Математическое моделирование. 2004. Т. 16. № 1. С. 75.
12. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Изд-во 4 ГИФ-МЛ, 1962. — 1100 с.

13. Крамер Г. Математические методы статистики: Пер. с англ./ А. С. Мони́на и А. А. Петро́ва/ Под ред. А. Н. Колмогорова. — М.: Мир, 1976. — 648 с.
14. Крамер Г. Случайные величины и распределения вероятностей: Пер. с англ. А. М. Яглома/ Под ред. А. Н. Колмогорова.— М.: ГИИЛ, 1947. — 144 с.
15. Abbasi R. U., Abu-Zayyad T., Archbold G. et al.// Astrophys. Journ. 2005. V. 622. Part. 1. P. 910.
16. Bird D. J., Corbato S. C., Dai H. Y. et al.// Ibid. 1995. V. 441. P. 144.
17. Dedenko L. G.// Can. J. Phys. 1968. V. 46. P. 178.
18. Деденко Л. Г., Кириллов А. А., Кириллов И. А. и др.// Изв. РАН. Сер. Физ. 2005. Т. 69. № 3. С. 359.
19. Бондарцова О. В., Кириллов А. А.// Там же. 2007. Т. 71. № 4. С. 527.
20. Abrahamson J. et al. (Pierre Auger Collaboration)// Astropart. Phys. 2007. No. 27. P. 155.
21. Pryke C. I.//Ibid. 2001. No. 14. P. 319.
22. Abrahamson J. et al. (Pierre Auger Collaboration)// Ibid. 2008. No. 29. P. 243.
23. Bellido J. A. (for Pierre Auger Collaboration)// Arxiv:0901.3389v1 [astro-ph. HE], 2009.

Статья поступила в редакцию 10 июля 2009 г.

Exponential-normal distribution and methods of its use in the nuclear physics

A. A. Kirillov

D. V. Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics M. V. Lomonosov Moscow State University,
Leninsky gory, 119992, Moscow, Russia
E-mail: bvsolod@yandex.ru

I. A. Kirillov

Concern "Energoatom", 25 Ferganskaya str., 109507, Moscow, Russia
E-mail: iakir@rambler.ru

The descriptive ability of distribution $A \cdot \exp((x-c)^2 / (a(x-c) + 2b^2))$ is discussed and properties are investigated. The methods using of it for approximation are presented accounting fullness and quality of data. The formulae and table are presented for convenient. Applications of the methods are illustrated of the numerical examples. Ability of usage of the distribution is defined his relationship with exponential and normal distributions. The methods are illustrated by application to ultra high energy cascade investigation.

PACS: 02.30.Mv; 02.50.Cv; 96.40.Pq

Keywords: approximation, exponential distribution, normal distribution, quality of data.

Кириллов Александр Аркадьевич, старший науч. сотр.
119992, Москва, Ленинские горы, МГУ, НИИ ядерной физики
Тел. (495) 939-24-37, факс (495) 939-35-53; E-mail: bvsolod@yandex.ru
Кириллов Илья Александрович, главный метролог
109507, Москва, ул. Ферганская, 25, ОАО «Концерн “Энергоатом”»
E-mail: iakir@rambler.ru