УДК 538.3

Сила, действующая на вещество в электромагнитном поле без учета дисперсии

В. П. Макаров, А. А. Рухадзе
Институт общей физики им. А. Н. Прохорова РАН, Москва, Россия
E-mail: rukh@fpl.gri.ru

Показано, что только из уравнений Максвелла макроскопической электродинамики, соответствующих материальных уравнений и уравнений движения вещества (уравнений гидродинамики) однозначно следуют результаты, приведенные в работах [2, §75 и 3, §105], а именно: сила, действующая на единицу объема неподвижного вещества, представляется в виде суммы силы Гельмгольца и силы Абрагама; плотность импульса электромагнитного поля есть вектор Пойнтинга, деленный на секунду в квадрате (c^2); тензор напряжений, связанный с полем, по виду совпадающий с суммой тензора напряжений электростатического поля и тензора напряжений магнитостатического поля.

PACS: 41.20.-q

Введение

Настоящая работа по-существу является продолжением работы [1]. В ней, как и в работе [1], рассматривается изотропное центросимметричное (негиротропное) вещество при пренебрежении дисперсией диэлектрической ε и магнитной μ проницаемостей. Сила $\bar{\vec{f}}$, действующая на единицу объема неподвижного вещества,* получается обычно [2, §75; 3, §105] из уравнения, которое эквивалентно закону сохранения импульса системы "вещество плюс поле":

$$\bar{\vec{f}} = \bar{\vec{\sigma}}' - \frac{\partial \bar{\vec{g}}}{\partial t}, \quad \bar{\sigma}'_i = \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial r_j}, \tag{1}$$

где $\bar{\sigma}_{ij}$ — тензор напряжений, связанный с электромагнитным полем**;
$\bar{\vec{g}}$ — плотность импульса электромагнитного поля в среде.

Принимается, что $\bar{\sigma}_{ij}$ совпадает с суммой тензора напряжений электростатического поля и тензора напряжений магнитостатического поля, т. е.

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{\sigma}_{ji} = \frac{1}{4\pi}\left[\varepsilon \bar{E}_i \bar{E}_j - \frac{1}{2}\left(\varepsilon - \rho\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)\times \right.$$
$$\left.\times \bar{E}^2 \delta_{ij}\right] + \frac{1}{4\pi}\left[\mu \bar{H}_i \bar{H}_j - \frac{1}{2}\left(\mu - \rho\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\right)\bar{H}^2 \delta_{ij}\right]. \tag{2}$$

где ρ — плотность вещества.

Из уравнений Максвелла и материальных уравнений

$$\bar{\vec{D}} = \varepsilon \bar{\vec{E}}, \ \bar{\vec{B}} = \mu \bar{\vec{H}} \tag{3}$$

следует, что

$$\bar{\vec{\sigma}}' = \bar{\vec{f}}^{(G)} + \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\vec{D}} \times \bar{\vec{B}}), \tag{4}$$

где*

$$\bar{\vec{f}}^{(G)} = \frac{1}{8\pi}\times$$
$$\times\left[\nabla\rho\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\bar{E}^2 + \frac{\partial \mu}{\partial \rho}\bar{H}^2\right) - (\bar{E}^2 \nabla\varepsilon + \bar{H}^2\nabla\mu)\right]. \tag{5}$$

Принимается также, что плотность импульса поля, введенная Абрагамом [1 и 4, §35],

$$\bar{\vec{g}} = \bar{\vec{g}}^{(A)} = \frac{1}{c^2}\bar{\vec{S}}^{(P)} = \frac{1}{4\pi c}\bar{\vec{E}} \times \bar{\vec{H}}, \tag{6}$$

где $\bar{\vec{S}}^{(P)}$ — плотность потока энергии поля в покоящейся среде (вектор Пойнтинга).

* Все величины, относящиеся к неподвижной среде, снабжены чертой сверху.
** По дважды повторяющимся индексам $i, j,.. = x, y, z$ везде подразумевается суммирование.

* Для электростатического поля сила (5) получена впервые Гельмгольцем [2, §15].

Из выражений (1), (4) и (6) находим выражение для силы, действующей на покоящееся вещество в электромагнитном поле

$$\overline{\vec{f}} = \overline{\vec{f}}^{(G)} + \overline{\vec{f}}^{(A)}, \qquad (7)$$

где так называемая сила Абрагама есть

$$\overline{\vec{f}}^{(A)} = \frac{\varepsilon\mu - 1}{c^2}\frac{\partial \overline{\vec{S}}^{(P)}}{\partial t} = \frac{\varepsilon\mu - 1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\vec{E}} \times \overline{\vec{H}}). \qquad (8)$$

Отметим, что приведенный здесь вывод формулы для силы (7), (5) и (8) существенно опирается на выбор импульса поля в виде (6).

Подход Гинзбурга—Угарова

В работе [1] был предложен подход к нахождению силы, действующей на вещество в электромагнитном поле, который отличается как от обычного подхода, изложенного в введении, так и от подхода в ряде других работ, где вопрос о силе связывается с вопросом о выборе 4-тензора энергии-импульса электромагнитного поля. Подход, предложенный в [1], состоит в следующем:

1. "Тензор энергии-импульса в макроскопической электродинамике является величиной в известном смысле вспомогательной. Основными же величинами являются объемные силы, а также плотность энергии и поток энергии. Именно силы входят в уравнения движения среды и могут, в принципе, быть измерены" [1].

2. "Общие соображения", касающиеся выбора импульса поля в виде (6), "не бесспорны" и "желательно получить и силы, и другие выражения (плотность энергии, поток энергии, плотность импульса) единым образом на базе уравнений поля" [1].

3. Так как без привлечения формулы (6) для получения силы $\overline{\vec{f}}$ уравнения (1), т. е. закона сохранения импульса, недостаточно, то необходимо еще уравнение, эквивалентное закону сохранения энергии системы "вещество плюс поле".

4. "При обсуждении закона сохранения энергии естественно обратиться к движущимся средам, поскольку сила, действующая на среду, "работает" только в случае, если скорость среды не равна нулю" [1]. Следовательно, если даже конечной целью является нахождение силы $\overline{\vec{f}}$, действующей на покоящееся вещество, необходимо, тем не менее, рассматривать движущуюся среду. Это очень важное положение во всем подходе [1].

5. Если среда движется, то соответствующие материальные уравнения отличаются от простых уравнений (3), которые справедливы только для покоящейся среды. С точностью до членов ~v/c, где $\vec{v}$ — скорость вещества, связь между полями $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}$ и $\vec{B}$ в неподвижной лабораторной системе отсчета дается уравнениями Минковского [2, §76; 3, §111; 4, §33, 1, формулы (10)—(11)]:

$$\overline{\vec{D}} = \varepsilon\overline{\vec{E}} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}(\vec{v} \times \overline{\vec{H}}),$$
$$\overline{\vec{B}} = \mu\overline{\vec{H}} - \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}(\vec{v} \times \overline{\vec{E}}). \qquad (9)$$

6. Равенство, аналогичное равенству (4) и эквивалентное закону сохранения импульса, получается из уравнений Максвелла (уравнения (6)—(9) в [1]):

$$\begin{gathered}\mathrm{div}\vec{D} = 4\pi\rho^{(ext)}; \quad \mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \\ \mathrm{div}\vec{B} = 0; \quad \mathrm{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{(ext)},\end{gathered} \qquad (10)$$

где $\rho^{(ext)}$ — плотность сторонних (по отношению к рассматриваемому веществу) зарядов; $\vec{j}^{(ext)}$ — плотность создаваемого ими тока.

Для этого в выражение для силы, с которой поле действует на сторонние заряды ((1) в [1])

$$\vec{f}^{(ext)} = \rho^{(ext)}\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j}^{(ext)} \times \vec{B}, \qquad (11)$$

нужно $\rho^{(ext)}$ и $\vec{j}^{(ext)}$ в формуле (11) выразить с помощью уравнений (10) через поля $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}$ и $\vec{B}$. В результате получается уравнение

$$\vec{j}^{(ext)} + \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\vec{D}} \times \overline{\vec{B}}) = \vec{\sigma}'^{(H)} - \vec{f}^{(1)} - \vec{f}^{(2)};$$
$$\sigma_i^{(H)'} = \frac{\partial \sigma_{ij}^{(H)}}{\partial r_j}, \qquad (12)$$

где

$$\sigma_{ij}^{(H)} = \sigma_{ji}^{(H)} = \frac{1}{8\pi}\Big\{\Big[\Big(E_i D_j + E_j D_i\Big) - \vec{E}\cdot\vec{D}\delta_{ij}\Big] + $$
$$+ \Big[\Big(H_i B_j + H_j B_i\Big) - \vec{H}\cdot\vec{B}\delta_{ij}\Big]\Big\}, \qquad (13)$$

$$\overline{\vec{f}}^{(1)} = -\frac{1}{8\pi}\mathrm{rot}(\overline{\vec{E}} \times \overline{\vec{D}} + \overline{\vec{H}} \times \overline{\vec{B}}), \qquad (14)$$

$$f_i^{(2)} = -\frac{1}{8\pi}\times$$
$$\times\left[(\overline{\vec{E}}\cdot\frac{\partial \overline{\vec{D}}}{\partial r_i} - \overline{\vec{D}}\cdot\frac{\partial \overline{\vec{E}}}{\partial r_i}) + (\overline{\vec{H}}\cdot\frac{\partial \overline{\vec{B}}}{\partial r_i} - \overline{\vec{B}}\cdot\frac{\partial \overline{\vec{H}}}{\partial r_i})\right]. \qquad (15)$$

Равенство (12) записано в форме, несколько отличной от формулы (20а) в [1], в нем использован симметричный тензор $\sigma_{ij}^{(H)}$, впервые введенный Г. Герцем [4, §35].

Можно показать, что, если в (13), (14) использовать материальные уравнения (3) и положить $\vec{f}^{(ext)} = 0$, то уравнение (12) примет вид (4).

7. Уравнение, эквивалентное закону сохранения энергии, получается, если в выражении для работы $\vec{j}^{(ext)} \cdot \vec{E}$, совершаемой полем над сторонними зарядами, ток $\vec{j}^{(ext)}$ выразить с помощью уравнений (10) через поля. Оно имеет вид ((12) в [1])

$$\vec{j}^{(ext)} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{4\pi}(\overline{E} \cdot \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} + \overline{H} \cdot \frac{\partial \overline{B}}{\partial t}) - \mathrm{div}\vec{S}^{(P)}; \qquad \vec{S}^{(P)} = \frac{c}{4\pi}\vec{E} \times \vec{H}. \tag{16}$$

Подход*, предложенный в [1], основан только на уравнениях (12)—(16) и (9). Однако в работе [1] этот подход был реализован при некоторых ограничениях на ε, μ и скорость $\vec{v}$. В [1] "предполагается, что изменение ε (а также μ) для данного элемента среды связано лишь с изменением ее плотности", т. е.

$$\varepsilon = \varepsilon(\rho), \quad \mu = \mu(\rho); \tag{17}$$

"скорость среды постоянна в пространстве и во времени или, точнее, производными по $\vec{r}$ и t везде можно пренебречь (будет сохранена лишь $\mathrm{div}\vec{v}$)", т. е.

$$\frac{\partial v_i}{\partial r_j} = \frac{1}{3}\mathrm{div}\vec{v}\delta_{ij}, \tag{18}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0. \tag{19}$$

В [1] исследуются уравнения (12)—(16) и (9) при условиях (17)—(19). Согласно [1], хотя "в теоретическом плане в существовании силы Абрагама (или, точнее, силы такого типа) не может быть сомнений" [1], "законы сохранения не могут однозначно определять входящие в них величины". Более конкретно — существуют две возможности: либо сила $\bar{\vec{f}}$ определяется формулой (7), при этом импульс поля дается выражением (6), либо сила

$$\bar{\vec{f}} = \bar{\vec{f}}^{(G)}, \tag{20}$$

при этом импульс поля, введенный Минковским [1 и 4, §35],

$$\bar{\vec{g}} = \bar{\vec{g}}^{(M)} = \frac{1}{4\pi c}(\bar{\vec{D}} \times \bar{\vec{B}}); \tag{21}$$

выбор выражения для импульса поля или силы "должен производиться на основании опытных данных или каких-то расчетов, лежащих за пределами самих уравнений для макроскопического поля" [1].

Считаем, что предложенный и использованный в [1] подход является не только "более последовательным", но и единственно последовательным подходом в макроскопической электродинамике. Поэтому с невозможностью (в рамках этого подхода) однозначного ответа на вопрос о силе, действующей на вещество, можно было бы еще "согласиться", если бы сила не выражалась только через поля и диэлектрическую и магнитную проницаемости (как в поглощающих средах). Но в обоих возможных вариантах сила и импульс поля выражаются только через поля и проницаемости ε и μ. Это обстоятельство и несомненная важность вопроса побудили нас вернуться к его обсуждению в рамках подхода [1], т. е. исходя из уравнений (12)—(16) и (9). Авторы повторяют проведенные в [1] вычисления во всех основных пунктах за одним только исключением — не будем налагать на ε, μ и скорость среды $\vec{v}$ никаких ограничений (полагая лишь, что $v \ll c$) до тех пор, пока сам ход вычислений не заставит нас ввести ограничения вида (17)—(19) или какие-либо другие, чтобы избежать внутренних противоречий в теории.

Таким образом узнаем, насколько результаты работы [1] связаны с налагаемыми с самого начала условиями (17)—(19), и если эти условия не необходимы для самого подхода [1], то как изменятся результаты, если от них (условий) отказаться.

Диэлектрическая и магнитная проницаемости являются функциями плотности, энтропии (или температуры), и если среда неоднородна по своему составу, то и концентрации смеси в системе отсчета, где ε и μ определены, т. е. в системе отсчета, относительно которой вещество покоится. Но с точностью до членов ~v/c плотность, энтропия, температура и концентрация смеси* не меняются при преобразованиях Лоренца [4, §46]. Поэтому можем полагать, что

$$\varepsilon = \varepsilon(\rho, s, \gamma), \quad \mu = \mu(\rho, s, \gamma). \tag{22}$$

В формуле (22) ρ, s и γ — плотность, энтропия и концентрация смеси-функции координат $\vec{r}$ и времени t в лабораторной системе отсчета.

* В обзоре [5], целиком посвященном проблеме силы $\vec{f}$ и импульса поля $\vec{g}$, подход, предложенный в [1], никак не обсуждается (хотя ссылки на эту и другие работы В. Л. Гинзбурга по этой проблеме в [5] имеются). В обзоре [6] 2007 г. дается почти столетняя история дискуссии по этой проблеме, начиная с первых работ Минковского и Абрагама, но ссылка на [1] вообще отсутствует.

* Для простоты полагаем, что смесь двухкомпонентная.

Материальные уравнения Минковского (9) являются прямым следствием преобразований Лоренца и поэтому справедливы только в том случае, если сопутствующая система отсчета (в которой вещество покоится) — инерциальная. Другими словами, уравнения (9) справедливы только тогда, когда вещество как целое движется относительно (тоже инерциальной) лабораторной системы отсчета с постоянной скоростью $\vec{v}(\vec{r},t)=\mathrm{const}$. Если же скорость $\vec{v}\neq\mathrm{const}$, сопутствующая система отсчета — неинерциальная, и сами уравнения Максвелла, определение полей через силу, действующую на точечный (пробный) заряд, и материальные уравнения существенно отличаются от соответствующих уравнений в инерциальной системе отсчета*. Однако, следуя работам [1, 2, §76], будем полагать, что материальные уравнения Минковского (9) остаются справедливыми и тогда, когда скорость $\vec{v}$ — непостоянная, но достаточно медленно изменяющаяся функция**. Стоит напомнить, что нашей конечной целью (как и в работе [1]) является получение выражений для силы и импульса поля в неподвижной среде.)

Закон сохранения энергии

Рассмотрим сначала уравнение (16) (уравнение (12) в [1]). Прежде всего следует строго определить, что мы понимаем под силой $\vec{f}$, действующей на единицу объема вещества со стороны электромагнитного поля. Это можно сделать, только записав уравнение движения вещества при наличии поля. Будем для простоты полагать, что вещество — это идеальная жидкость, тогда уравнение движения — уравнение Эйлера [8, § 2] с добавлением в него силы $\vec{f}$ будет

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}=\frac{1}{\rho}(-\nabla p+\vec{f}),\qquad(23)$$

где $p=p(\rho,s,\gamma)$ — давление, которое было бы в веществе в отсутствие поля при данных (в присутствии поля) значениях плотности, энтропии и концентрации смеси ρ, s, γ [2, §15].

После такого уточнения смысла давления p уравнение (23) вполне определяет силу $\vec{f}$.

Найдем, как изменяется во времени энергия единицы объема вещества

$$w^{(m)}=\rho\left(\frac{v^2}{2}+\varepsilon^{(m)}\right).\qquad(24)$$

* Относительно микроскопических уравнений Максвелла [7, §90].

** В [2, §76] уравнения Минковского применяются при решении задач об электрическом поле, возникающем вокруг равномерно вращающегося шара.

В формуле (24) $\varepsilon^{(m)}=\varepsilon^{(m)}(\rho,s,\gamma)$ — внутренняя энергия единицы массы вещества в отсутствие поля.

Будем полагать, что нет ни теплового, ни диффузионного потоков. Тогда наряду с уравнением непрерывности [8, §1]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\vec{v}=0,\qquad(25)$$

справедливы уравнения [8, § 49, 58]

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\vec{v}\nabla s=0;\qquad(26)$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\vec{v}\nabla\gamma=0.\qquad(27)$$

Повторив вычисления, проведенные в [8, §6], и используя при этом уравнения (23) и (25), (27), получим

$$\frac{\partial w^{(m)}}{\partial t}=-\operatorname{div}\vec{S}^{(m)}+\vec{f}\vec{v},\qquad(28)$$

где плотность потока энергии вещества

$$\vec{S}^{(m)}=\rho\vec{v}\left(\frac{v^2}{2}+\varepsilon^{(m)}+\frac{p}{\rho}\right).\qquad(29)$$

Закону сохранения полной энергии системы (вещества и поля) при работе поля с учетом формул (28), (29) над сторонними зарядами соответствует уравнение

$$\begin{gathered}\frac{\partial w^{(tot)}}{\partial t}=-\operatorname{div}\vec{S}^{(tot)}-\vec{j}^{(ext)}\cdot\vec{E};\\ w^{(tot)}=w^{(m)}+w;\quad \vec{S}=\vec{S}^{(m)}+\vec{S},\end{gathered}\qquad(30)$$

где w — плотность энергии;

$\vec{S}$ — плотность потока энергии электромагнитного поля.

Из (30) и (28) получаем

$$\vec{f}\,\vec{v}=-\frac{\partial w}{\partial t}-\operatorname{div}\vec{S}-\vec{j}^{(ext)}\vec{E}.\qquad(31)$$

Итак, если сила, с которой поле действует на вещество, определяется в соответствии с уравнением движения (23), то уравнение (16) должно приводиться к виду (31); подставим в (16) $\vec{D}$ и $\vec{B}$ из (9).

Производные $\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial\mu}{\partial t}$ вычисляем по формулам (20) и (25)—(27):

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\varepsilon}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial\varepsilon}{\partial\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial t}=-(\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\operatorname{div}\vec{v}+\vec{v}\nabla\varepsilon),$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial t}=-(\rho\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\operatorname{div}\vec{v}+\vec{v}\nabla\mu). \qquad (32)$$

Прямые вычисления, при которых используются (32), приводят уравнение (16) к следующему виду:

$$\left(\vec{f}^{(G)}+\vec{f}^{(A)}\right)\cdot\vec{v}=-\frac{\partial}{\partial t}\times$$
$$\times\left[\frac{1}{8\pi}(\varepsilon E^2+\mu H^2)-\frac{2}{c^2}(\varepsilon\mu-1)\vec{v}\cdot\vec{S}^{(P)}\right]- \qquad (33)$$
$$-\operatorname{div}\left[\vec{S}^{(P)}-\frac{1}{8\pi}\rho\vec{v}(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}E^2+\frac{\partial\mu}{\partial\rho}H^2)\right]-\vec{j}^{(ext)}\cdot\vec{E},$$

а силы Гельмгольца $\vec{f}^{(G)}$ и Абрагама $\vec{f}^{(A)}$ определяются по формулам (5) и (8), соответственно, в которых нужно заменить $\bar{\vec{E}}$ на $\vec{E}$ и $\bar{\vec{H}}$ на $\vec{H}$.

Уравнение (33) имеет требуемый (31) вид, сравнение дает

$$\vec{f}=\vec{f}^{(G)}+\vec{f}^{(A)}+\vec{f}^{(\perp)}, \qquad (34)$$

где $\vec{f}^{(\perp)}$ — неизвестная пока сила, перпендикулярная скорости $\vec{v}$, и поэтому не вносящая вклад в работу $\vec{f}\cdot\vec{v}$;

$$w=\frac{1}{8\pi}(\varepsilon E^2+\mu H^2)-\frac{2}{c^2}(\varepsilon\mu-1)\vec{v}\cdot\vec{S}^{(P)} \text{ — } \qquad (35)$$

плотность энергии поля ((19) в [1]);

$$\vec{S}=\vec{S}^{(P)}-\frac{1}{8\pi}\rho\vec{v}(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}E^2+\frac{\partial\mu}{\partial\rho}H^2) \text{ — } \qquad (36)$$

плотность потока энергии поля ((17) в [1]).

Заметим, что для покоящейся среды сила (34) приводится к силе $\bar{\vec{f}}$ (7), плотность энергии поля (35) — к плотности энергии* $\bar{w}=\frac{1}{8\pi}(\varepsilon\bar{E}^2+\mu\bar{H}^2)$ и плотность потока энергии (36) — к вектору Пойнтинга $\bar{\vec{S}}=\bar{\vec{S}}^{(P)}$.

* Энергия $\bar{w}$ имеет точный термодинамический смысл [2, §80]: это разность между значениями внутренней энергии единицы объема вещества в поле и в отсутствие поля при одинаковых ρ, s и γ.

Законы сохранения импульса и момента импульса

Рассмотрим теперь уравнение (12) (уравнение (20а) в [1]). Найдем, как изменяется во времени импульс единицы объема вещества

$$\vec{P}^{(m)}=\rho\vec{v}. \qquad (37)$$

Повторив вычисления, проведенные в [8, §7], и используя при этом уравнения (23), (25) и (37), получим

$$\frac{\partial P_i^{(m)}}{\partial t}=-\frac{\partial\Pi_{ij}^{(m)}}{\partial r_j}+f_i, \qquad (38)$$

где плотность потока импульса вещества

$$\Pi_{ij}^{(m)}=\Pi_{ji}^{(m)}=\rho v_i v_j-\sigma_{ij}^{(m)}; \qquad (39)$$

$$\sigma_{ij}^{(m)}=\sigma_{ji}^{(m)}=-p\delta_{ij} \text{ — } \qquad (40)$$

тензор напряжений в отсутствие поля.

Закону сохранения полного импульса системы, состоящей из вещества и поля, с учетом силы, с которой поле действует на сторонние заряды (38)—(40), соответствует уравнение

$$\frac{\partial P_i^{(tot)}}{\partial t}=-\frac{\partial\Pi_{ij}^{(tot)}}{\partial r_j}-f_i^{(ext)};\quad \vec{P}^{(tot)}=\vec{P}^{(m)}+\vec{g};$$
$$\Pi_{ij}^{(tot)}=\rho v_i v_j-\sigma_{ij}^{(tot)};\quad \sigma_{ij}^{(tot)}=\sigma_{ij}^{(m)}+\sigma_{ij}, \qquad (41)$$

где $\vec{g}$ — плотность импульса поля;

σ_{ij} — тензор напряжений, связанный с полем.

Из (41) и (38) получаем

$$\vec{f}=-\frac{\partial\vec{g}}{\partial t}+\vec{\sigma}'-\vec{f}^{(ext)};\quad \sigma_i'=\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial r_j}. \qquad (42)$$

Важно иметь в виду, что полный тензор напряжений должен быть непременно симметричным [2, §15]: $\sigma_{ij}^{(tot)}=\sigma_{ji}^{(tot)}$.

Отсюда с учетом формулы (40) следует, что и

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ji}. \qquad (43)$$

Симметричность полного тензора напряжений $\sigma_{ji}^{(tot)}$ связана с законом сохранения полного момента импульса системы (вещества и поля). Момент импульса вещества и поля в некотором фиксированном объеме V будет

$$\vec{J}^{(tot)}=\int_V\vec{r}\times\vec{P}^{(tot)}dV. \qquad (44)$$

Используя (41) и (44), находим

$$\frac{dJ_i^{(tot)}}{dt} = e_{ijk}\int\limits_S r_j(\sigma_{kl}^{(tot)} - \rho v_k v_l)\times \\ \times dS_l - e_{ijk}\int\limits_V dV\sigma_{kj}^{(tot)} - M_i^{(ext)}, \tag{45}$$

где S — поверхность, ограничивающая объем V;

$$\overline{M}^{(ext)} = \int\limits_V dV\vec{r}\cdot\overline{f}^{(ext)} \quad — \tag{46}$$

момент сил, действующих со стороны поля на сторонние заряды в объеме V.

Чтобы момент сил (46), действующих на вещество и поле в объеме V, сводился к интегралу по поверхности, объемный интеграл в (45) должен обратиться в нуль, т. е. тензор $\sigma_{ij}^{(tot)}$ должен быть симметричным.

Если объем V включает в себя все вещество, и на границе S поле отсутствует, поверхностный интеграл в (45) обращается в нуль. Тогда, если $\sigma_{ij}^{(tot)} = \sigma_{ji}^{(tot)}$, то, как и должно быть,

$$\frac{d\overline{J}^{(tot)}}{dt} = -\overline{M}^{(ext)}. \tag{47}$$

Рассмотрев формулу (47), уравнение (12) должно приводиться к виду (42) с симметричным тензором σ_{ij} (см. (43)) и с силой $\vec{f}$ (34). Чтобы это сделать, необходимо преобразовать $\vec{f}^{(1)}$ (14) и $\vec{f}^{(2)}$ (15).

Используя уравнения (9), получим:

$$\vec{f}^{(1)} = -\frac{1}{2c^2}\mathrm{rot}(\varepsilon\mu-1)\vec{v}\times\vec{S}^{(P)} = \\ = -\vec{\sigma}^{(1)\prime} + \frac{\varepsilon\mu-1}{c^2}(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{S}^{(P)} + \frac{1}{c^2}\vec{S}^{(P)}\mathrm{div}(\varepsilon\mu-1)\vec{v}, \tag{48}$$

где

$$\sigma_i^{(1)\prime} = \frac{\partial\sigma_{ij}^{(1)}}{\partial r_j}; \\ \sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ji}^{(1)} = \frac{\varepsilon\mu-1}{2c^2}(v_i S_j^{(P)} + v_j S_i^{(P)}); \tag{49}$$

$$f_i^{(2)} = f_i^{(G)} - \sigma_i^{(2)\prime} - \frac{\varepsilon\mu-1}{c^2}\vec{v}\times\frac{\partial\vec{S}^{(P)}}{\partial r_i}; \tag{50}$$

$$\sigma_i^{(2)\prime} = \frac{\partial\sigma_{ij}^{(2)}}{\partial r_j}; \\ \sigma_{ij}^{(2)} = \delta_{ij}\times \\ \times\left[\frac{1}{8\pi}\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}E^2 + \frac{\partial\mu}{\partial\rho}H^2\right) - \frac{1}{c^2}(\varepsilon\mu-1)\vec{v}\cdot\vec{S}^{(P)}\right]. \tag{51}$$

Подставляя $\vec{f}^{(1)}$ из (48) и $\vec{f}^{(2)}$ из (50) в уравнение (12), приводим его к виду*:

$$\vec{f}^{(G)} + \vec{f}^{(3)} = -\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{D}\times\vec{B}) + \\ +\vec{\sigma}^{(H)\prime} + \vec{\sigma}^{(1)\prime} + \vec{\sigma}^{(2)\prime} - \vec{f}^{(ext)}, \tag{52}$$

где

$$\vec{f}^{(3)} = -\frac{1}{c^2}\times\Big[\big(\varepsilon\mu-1\big)\vec{v}\times\mathrm{rot}\vec{S}^{(P)} \\ +\vec{S}^{(P)}\mathrm{div}\big(1-\varepsilon\mu\big)\vec{v}\Big]. \tag{53}$$

Силу $\vec{f}^{(3)}$ (53) можно представить в другом виде, с учетом (32)

$$\frac{\partial\varepsilon\mu}{\partial t} = -\left[\mathrm{div}(\varepsilon\mu-1)\vec{v} + (\rho\frac{\partial\varepsilon\mu}{\partial\rho} + 1 - \varepsilon\mu)\mathrm{div}\vec{v}\right]. \tag{54}$$

Так, подставляя (54) в (53), имеем

$$\vec{f}^{(3)} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varepsilon\mu}{\partial t}\vec{S}^{(P)} + \vec{f}^{(\perp)} + \vec{f}^{(\square)}, \tag{55}$$

где сила, перпендикулярная к скорости, будет

$$\vec{f}^{(\perp)} = -\frac{\varepsilon\mu-1}{c^2}\vec{v}\times\mathrm{rot}\vec{S}^{(P)} + \\ +\frac{1}{c^2}\left(\varepsilon\mu-1-\rho\frac{\partial\varepsilon\mu}{\partial\rho}\right)\left[\vec{S}^{(P)} - \vec{v}\frac{(\vec{v}\cdot\vec{S}^{(P)})}{v^2}\right]\mathrm{div}\vec{v}, \tag{56}$$

и сила, параллельная скорости, будет

$$\vec{f}^{(\square)} = \frac{1}{c^2}\vec{v}\left(\varepsilon\mu-1-\rho\frac{\partial\varepsilon\mu}{\partial\rho}\right)\frac{\left(\vec{S}^{(P)}\cdot\vec{v}\right)}{v^2}\mathrm{div}\vec{v}. \tag{57}$$

Левая часть уравнения (52) еще существенно отличается от силы $\vec{f}$, для которой ранее из закона сохранения энергии мы получили выражение (34) с силой Абрагама.

Следовательно, для дальнейших вычислений существуют две возможности [1]: либо, оставив без изменения уравнение (33), преобразовать уравнение (52) с $\vec{f}^{(3)}$ (55)—(57) так, чтобы в его левой части появилась сила Абрагама $\vec{f}^{(A)}$; либо, оставив без изменения уравнение (52), преобразовать уравнение (33) так, чтобы из него исключить силу Абрагама $\vec{f}^{(A)}$. В этом разделе мы воспользуемся первой возможностью.

---

* Соответствующее уравнение (24) в [1] записано уже для неподвижной среды.

Прибавим к обеим частям уравнения (52) силу Абрагама (8).

$$\vec{f}^{(A)}=\frac{\varepsilon\mu-1}{c^2}\frac{\partial\vec{S}^{(P)}}{\partial t}=$$
$$=\frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\mu-1\right)\vec{S}^{(P)}-\frac{\partial\varepsilon\mu}{\partial t}\vec{S}^{(P)}\right]. \qquad (58)$$

Учитывая (55)—(57), получаем окончательно

$$\vec{f}+\vec{f}^{(\parallel)}=-\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{D}\times\vec{B}-(\varepsilon\mu-1)\vec{E}\times\vec{H}\right]+$$
$$+\vec{\sigma}^{(H)\prime}+\vec{\sigma}^{(1)\prime}+\vec{\sigma}^{(2)\prime}-\vec{f}^{(ext)}, \qquad (59)$$

где $\vec{f}$ — сила (20), полученная из закона сохранения энергии, причем $\vec{f}^{(\perp)}$ в ней определяется формулой (56).

Сравнивая правые части уравнений (42) и (59), находим, что плотность импульса электромагнитного поля

$$\vec{g}=\frac{1}{4\pi c}\left[\vec{D}\times\vec{B}-(\varepsilon\mu-1)\vec{E}\times\vec{H}\right], \qquad (60)$$

и тензор напряжений (27), (49) и (51)

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ji}=\sigma_{ij}^{(H)}+\sigma_{ij}^{(1)}+\sigma_{ij}^{(2)}. \qquad (61)$$

Левая часть уравнения (59) содержит лишнее по сравнению с силой (34) слагаемое $\vec{f}^{(\parallel)}$, которое должно быть пренебрежимо малым по сравнению с $\vec{f}$:

$$\left|\vec{f}^{(\parallel)}\right|\ll\left|\vec{f}^{(G)}\right|,\left|\vec{f}^{(A)}\right|. \qquad (62)$$

Условие (62) — это единственное условие, при котором с точностью ~v/c все величины: плотность энергии поля w (35), плотность потока энергии поля $\vec{S}$ (34), плотность потока импульса поля $\vec{g}$ (60), плотность силы, действующей на вещество в поле, $\vec{f}$ (34) и симметричный тензор напряжений σ_{ij} (61) определяются в макроскопической электродинамике непротиворечивым образом. Остается лишь показать, что эти определения однозначны. Что касается условия (62), то (кроме, очевидного случая, когда $\vec{v}\perp\vec{S}^{(P)}$) $\vec{f}^{(\parallel)}=0$, когда среду можно считать несжимаемой $\mathrm{div}\vec{v}=0$ [2, §76] и когда среда — достаточно разреженный газ (тогда $\mu = 1$, $\rho\partial\varepsilon/\partial\rho = \varepsilon - 1$ [2, §15]).

Однозначность выражений для силы и импульса поля

Теперь воспользуемся второй возможностью: оставляем без изменения уравнение (52) с $\vec{f}^{(3)}$ из (55), а преобразуем уравнение (33), вычтив из обеих его частей работу силы Абрагама (58)

$$\vec{f}^{(A)}\vec{v}=\frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\mu-1\right)\vec{v}\cdot\vec{S}^{(P)}-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial\varepsilon\mu}{\partial t}\vec{v}\cdot\vec{S}^{(P)}\left(\varepsilon\mu-1\right)\vec{S}^{(P)}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right]. \qquad (63)$$

В результате с учетом (63) вместо (33) получим следующее уравнение:

$$\vec{f}^{(M)}\cdot\vec{v}-\frac{\varepsilon\mu-1}{c^2}\vec{S}^{(P)}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=$$
$$=-\frac{\partial w^{(M)}}{\partial t}-\mathrm{div}\vec{S}-\vec{j}^{(ext)}\cdot\vec{E}, \qquad (64)$$

где

$$\vec{f}^{(M)}=\vec{f}^{(G)}+\vec{f}^{(\perp)}-\frac{1}{c^2}\vec{S}^{(P)}\frac{\partial\varepsilon\mu}{\partial t}, \qquad (65)$$

$$w^{(M)}=w+\frac{\varepsilon\mu-1}{c^2}\vec{v}\cdot\vec{S}^{(P)}=\frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B}\right), \qquad (66)$$

а w и $\vec{S}$ определяются формулами (35) и (36). При этом уравнение (52), с учетом (55) и (65), имеет следующий вид:

$$\vec{f}^{(M)}+\vec{f}^{(\parallel)}=-\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial\left(\vec{D}\times\vec{B}\right)}{\partial t}+\vec{\sigma}'-\vec{f}^{(ext)}, \qquad (67)$$

где $\sigma_i'=\partial\sigma_{ij}/\partial r_j$, а тензор напряжений σ_{ij} и сила $\vec{f}^{(\parallel)}$, параллельная скорости (из формулы (67)), по-прежнему определяются формулами (61) и (57).

Уравнение (64) имеет требуемый согласно (31) вид, если только вторым слагаемым в левой части можно пренебречь:

$$\left|\frac{\varepsilon\mu-1}{c^2}\vec{S}^{(P)}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right|\ll\left|\vec{f}^{(M)}\cdot\vec{v}\right|. \qquad (68)$$

За исключением очевидного случая, когда $\vec{S}^{(P)}\perp\partial\vec{v}/\partial t$, условие (68) эквивалентно условию (11). Если вместе с условием (62) выполняется еще и условие (68), то в согласии с [1] в качестве плотности энергии поля можно принять $w^{(M)}$ (66), в качестве плотности импульса — $\vec{g}^{(M)}=\vec{D}\times\vec{B}/4\pi c$ и в качестве силы (наряду с $\vec{f}$ (34) — $\vec{f}^{(M)}=\vec{f}^{(G)}$.

Если же отказаться от ограничения только стационарным движением среды (от условия (19) или

(68)), то при одном только условии (62) все величины определяются однозначным и непротиворечивым образом — в соответствии с результатами предыдущего раздела.

Заключение

Согласно [1] сила, действующая на вещество в электромагнитном поле и другие величины, квадратичные по полю (энергия, поток энергии, импульс поля), должны получаться единым образом на основе уравнений Максвелла, соответствующих материальных уравнений и уравнений движения среды. Этот подход в [1] был реализован для изотропной центросимметричной (негиротропной) среды при пренебрежении дисперсией диэлектрической ε и магнитной μ проницаемостей и при некоторых еще дополнительных ограничениях на ε, μ и скорость среды $\vec{v}(\vec{r},t)$ (17)—(19).

Авторы [1] показали, что в рамках предложенного ими подхода (по нашему мнению, единственно последовательного подхода в макроскопической электродинамике), когда выполняются условия (17)—(19), не представляется возможным однозначно определить силу, действующую на вещество, и импульс поля: в пределе, когда движением вещества можно пренебречь, либо выражение для силы включает силу Абрагама (7), и тогда импульс поля есть деленный на c^2 вектор Пойнтинга (6), либо в выражение для силы сила Абрагама не входит (20), и тогда импульс поля есть $\vec{g}^{(M)}$ (21).

Представляется интересным выяснить, в какой степени условия (17)—(19) являются необходимыми для самого подхода [1] и, если они не необходимы и от них можно отказаться, то насколько результат о неоднозначности определения силы и импульса поля связан с этими условиями.

В данной работе показано, что ни одно из условий (17)—(19) не является необходимым.

Единственное условие, выполнение которого необходимо для отсутствия внутреннего противоречия в подходе [1], — это условие (62) на $\mathrm{div}\vec{v}$ (57), не сводящееся ни к одному из условий (17)—(19).

Условия (17) и (18) — непринципиальны, т. е. отказ от них не изменяет результата [1] о невозможности однозначного определения силы и импульса поля. Условие же (19) в этом смысле — принципиально.

Если условие (19) принять, т. е. ограничиться только стационарным движением вещества, то выбор из двух возможных выражений для импульса поля — (6) или (21) и, соответственно, для силы — (7) или (20) действительно не возможен в согласии с [1].

Если же от условия (19) отказаться, то вторая возможность — (20), (21) (сила Абрагама отсутствует) исключается, так как она приводит к внутренним противоречиям в самом подходе [1].

Таким образом, если, оставаясь в рамках макроскопической теории, мы хотим найти силу, действующую в электромагнитном поле на покоящееся вещество, мы должны, тем не менее, рассматривать движущуюся среду [1], причем движущуюся не стационарно. При этом для импульса поля и силы получаются формулы (6) и (7), совпадающие с соответствующими формулами, приведенными в [2, §75 и 3, §105]. Что касается 4-тензора энергии-импульса электромагнитного поля в неподвижной среде, то для него справедлива симметричная форма Абрагама (см. (32) и (33) в [1 и 4, §35]).

Литература

1. *Гинзбург В. Л., Угаров В. А.*// УФН. 1976. № 118. С. 175.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982.
3. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. — М.: Наука, 1989.
4. *Паули В.* Теория относительности. — М.: Наука, 1983.
5. *Brevik I.*// Phys. Rept. 1979. No. 52. P. 133.
6. *Pfeifer R. N. C. et al.*// Rev. Mod. Phys. 2007. No. 79. P. 1197.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. — М.: Наука, 1973.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. — М.: Наука, 1988.

Статья поступила в редакцию 18 сентября 2009 г.

The force acting on medium in an electromagneting field without account of dispersion

V. P. Makarov, A. A. Rukhadze
Prokhorov General Physics Institute of RAS, Moscow, Russia
E-mail: rukh@fpl.gri.ru

This paper continuous the paper [1]. It is shown in this paper that only from Maxwell equation of macroscopic electrodynamics, corresponding material equations and equations of motion of a me-

dium (hydrodynamic equations) it simple follows the results presented in [2, §75 and 3, §105]: the force acting on unit volume of an nonmoving medium is a sum oa Helmholts and Abraham forces; the density of electromagnetic fields momentum is the Pointing vector divided on c^2; the field tension tensor coincides with the sum of electrostatic and magnetostatic tension tensors.

PACS: 41.20.-q