

УДК 533.93

Квантовая природа затухания ленгмюровских колебаний и бозонный пик в плазме

Б. А. Векленко

Объединенный институт высоких температур РАН, Москва, Россия

E-mail: veklenko@yandex.ru

Показано, что затухание ленгмюровских колебаний плазмы определяется квантовой природой, причем коэффициент затухания, пропорциональный четвертой степени заряда электрона, обусловлен термическими флуктуациями электронов и неаналитически зависит от постоянной Планка \hbar , стремящейся к нулю, т. е. $\hbar \rightarrow 0$. При частотах $\omega \ll T/\hbar$ коэффициент затухания обладает максимумом, отождествляемым с бозонным пиком.

PACS: 03.70.+k; 52.35.-g

Введение

В последние годы в физике аморфных тел интенсивно обсуждается проблема так называемого "бозонного пика", заключающаяся в аномальном поглощении фононных волн на частотах $\sim 10^{12}$ 1/с. Бозонный пик широко распространен и освещен в работах [1—6]. Им обладают практически все среды со случайно выраженными неоднородностями. Диапазон температур появления бозонного пика простирается от десятка до тысячи градусов Кельвина [7, 8]. Природа бозонного пика остается неясной до сих пор [9—11]. Универсальность бозонного пика ставит вопрос об универсальном характере его появления.

В работе [6] было высказано предположение, что природа бозонного пика связана не с поглощением фононных волн, а с их некогерентным рассеянием на неоднородностях в пространственно-случайных средах. Экспериментально коэффициент экстинкции от коэффициента поглощения отличить трудно.

Если представить аморфное тело состоящим из хаотически разбросанных в пространстве когерентных сгустков размером l_c , то можно оценить характерную частоту ω_c бозонного пика следующим образом. Пусть длина фононных волн $\lambda \gg l_c$. Рассеяние их невелико, поскольку размеры неоднородностей вещества много меньше λ . Если $\lambda \ll l_c$, то рассеяние будет также подавляться, так как волны распространяются теперь в локально однородной среде, и справедливо приближение эйконала. Если же $\lambda \sim l_c$, то рассеяние оказывается максимальным.

Мы имеем дело с пространственным резонансом, который отличается от частотного по своим

свойствам. Обозначив скорость распространения фононов через v , для характерной частоты появления бозонного пика находим $\omega_c \sim v/l_c$. Поскольку скорость акустических волн в твердом теле $v \sim 10^5$ см/с, а l_c определяется теледебаевской длиной по порядку величины, совпадающей с размерами атомов $l_c \sim 10^{-7}$ см, то $\omega_c \sim 10^{12}$ 1/с. Если указанный механизм возникновения бозонного пика справедлив, то он неспецифичен для аморфных тел. Бозонный пик должен появляться во всех волновых процессах, распространяющихся в случайных средах.

Не должна представлять исключение и электрон-ионная плазма при учете наличия в ней флуктуационных явлений. Но здесь, однако, возникает вопрос о длине когерентности l_c . Согласно классическим представлениям в плазме, $l_c = 0$, но тогда в теории бозонного пика промежуточные интегралы по волновым числам k оказываются расходящимися [6] при больших значениях k .

Проблема исчезает, если плазму описывать квантовым образом. Изначально можно предположить, что волны де Бройля, описывая когерентные свойства вещества на своем протяжении, могут служить причиной формирования l_c . Но в таком случае стандартная электрон-ионная плазма должна рассматриваться как квантовый объект, не допускающий предельного перехода $\hbar \rightarrow 0$. Исследование этого вопроса подтверждает такое предположение.

С другой стороны, расчет диэлектрической проницаемости ϵ электрон-ионной плазмы в низшем приближении по константе взаимодействия $\sim e^2$ приводит к теории Власова—Ландау [12, 13]. Этот расчет опирается на уравнение Больцмана [14], которое в бесстолкновительном приближе-

нии носит название "уравнения Власова". Теория Власова—Ландау оперирует с самосогласованным электромагнитным полем в его простейшем варианте. Поправка к ϵ на основе учета в уравнении Больцмана интеграла столкновений оказывается пропорциональной $\sim e^6$. Возникает вопрос о причине исчезновения в теории члена, пропорционального $\sim e^4$, и правилах отбора, на основании которых этот член исчезает. Разумеется, учет флуктуаций в плазме вследствие некогерентного томсоновского рассеяния поперечных волн даст вклад в коэффициент экстинкции $\sim e^4$, но остается вопрос о существовании бозонного пика и его локализации. В теории продольных волн вопрос еще более неясен.

Электрон-ионную плазму можно рассчитывать методами квантовой электродинамики, минуя уравнение Больцмана. Этот путь автоматически учитывает все флуктуационные эффекты и эффекты "среднего поля", и нет оснований ожидать исчезновения здесь фейнмановских диаграмм четвертого порядка.

В настоящей работе рассчитывается поправочный член $\sim e^4$ к затуханию Ландау, т. е. к затуханию продольных волн в плазме, вызванный флуктуационными явлениями. Фактически речь идет о поправочном члене к мнимой части диэлектрической проницаемости. Поскольку, согласно сказанному, есть основания ожидать, что при $\hbar \rightarrow 0$ этот член представляется в виде расходящегося интеграла, то в расчетах используется аппарат квантовой теории.

Сопоставим нерелятивистскому электронному полю плазмы гейзенберговский полевой оператор $\check{\psi}_e(x)$ (где $x = \{\mathbf{r}, t\}$, \mathbf{r} — пространственная координата, t — время), а полю ионов — сопоставим полевой оператор $\check{\psi}_i(x)$, и, наконец, пусть $\check{A}^V(x)$ — полевой оператор электромагнитного поля. Систему основных уравнений примем в виде

$$i\hbar \frac{\partial \check{\psi}_e(x)}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \nabla_{\mathbf{r}}^V - \frac{e}{c} \check{A}^V(x) \right)^2 \check{\psi}_e(x),$$

$$i\hbar \frac{\partial \check{\psi}_i(x)}{\partial t} = \frac{1}{2M} \left(-i\hbar \nabla_{\mathbf{r}}^V + \frac{e}{c} \check{A}^V(x) \right)^2 \check{\psi}_i(x),$$

где m и e — масса и заряд электрона, соответственно;

M — масса иона.

Здесь использована калибровка с нулевым скалярным потенциалом $\check{\phi} = 0$ [15]. Последнее озна-

чает, что на векторный полевой оператор наложены два условия:

$$-\frac{1}{c} \operatorname{div} \frac{\partial \check{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \check{\rho}(\mathbf{r}, t); \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}}^2 \check{A}^V(x) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \check{A}^V(x)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial r^V} \frac{\partial}{\partial r^{V1}} \check{A}^{V1}(x) - \mu^2 \check{A}^V(x) = \\ = -\frac{1}{c} \check{j}^V(x) - \frac{1}{c} \check{j}_{cl}^V(x). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\check{j}_{cl}^V(x)$ — плотность классического тока, если он присутствует в системе, $\check{\rho} = \check{\rho}_e + \check{\rho}_i$, $\check{j}^V = \check{j}_e^V + \check{j}_i^V$, причем

$$\begin{aligned} \check{\rho}_e(x) &= e \check{\psi}_e^+(x) \check{\psi}_e(x), \\ \check{j}_e^V(x) &= \frac{e}{2m} \check{\psi}_e^+(x) \left(\hat{p}_{\mathbf{r}}^V - \frac{e}{c} \check{A}^V(x) \right) \check{\psi}_e(x) + h.c., \\ \hat{p}_{\mathbf{r}}^V &= -i\hbar \nabla_{\mathbf{r}}^V, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \check{\rho}_i(x) &= -e \check{\psi}_i^+(x) \check{\psi}_i(x), \\ \check{j}_i^V(x) &= \frac{e}{2M} \check{\psi}_i^+(x) \left(\hat{p}_{\mathbf{r}}^V + \frac{e}{c} \check{A}^V(x) \right) \check{\psi}_i(x) + h.c. \end{aligned}$$

Параметр $\mu \rightarrow 0$ удобно ввести в уравнение для векторного потенциала $\check{A}^V(x)$ при процедуре вторичного квантования [16]. По окончании расчетов этот параметр примем равным нулю. Если обе части уравнения (2) подвергнуть операции div , то с учетом законов сохранения зарядов

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \check{\rho}_e(x) + \operatorname{div} \check{\mathbf{j}}_e^V(x) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \check{\rho}_i(x) + \operatorname{div} \check{\mathbf{j}}_i^V(x) = 0, \\ \operatorname{div} \check{\mathbf{j}}_{cl}^V(x) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \operatorname{div} \frac{\partial \check{\mathbf{A}}}{\partial t} + \check{\rho} \right) = 0. \quad (5)$$

После преобразования Фурье уравнения (1) и (5) принимают, соответственно, вид

$$\frac{i\omega}{c} \operatorname{div} \check{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, \omega) - \check{\rho}(\mathbf{r}, \omega) = 0;$$

$$\omega \left(\frac{i\omega}{c} \text{div} \overset{\vee}{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, \omega) - \overset{\vee}{\rho}(\mathbf{r}, \omega) \right) = 0.$$

Таким образом, уравнение (1) представляет собой следствие уравнения (2), и при $\omega \neq 0$ его можно не принимать во внимание.

Полевые операторы подчиняются перестановочным соотношениям

$$\begin{aligned} \left[\overset{\vee}{\Psi}_e(\mathbf{r}, t); \overset{\vee}{\Psi}_e^+(\mathbf{r}', t) \right]_+ &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'); \\ \left[\overset{\vee}{\Psi}_i(\mathbf{r}, t); \overset{\vee}{\Psi}_i^+(\mathbf{r}', t) \right]_+ &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'); \\ \left[A^{\vee}(\mathbf{r}, t); \frac{\partial}{\partial t} A^{\vee}(\mathbf{r}', t) \right] &= i\hbar c^2 \delta_{vv'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned}$$

Используемая авторами система уравнений фактически совпадает с системой уравнений, исследуемой в работе [17]. Отличие заключается в том, что в работе [17] поля не считались вторично квантованными, и флуктуационные явления авторов не интересовали. Использование аппарата вторичного квантования позволяет исследовать флуктуационные явления, что является целью настоящей работы, проливающей свет на природу бозонного пика.

В отсутствие взаимодействий в системе для свободных полей имеем:

$$\begin{aligned} \overset{\vee}{\Psi}_e^0(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}} \exp\left(i \frac{\mathbf{r}}{\hbar} \mathbf{p} - i \frac{t}{\hbar} \varepsilon(\mathbf{p})\right); \\ \varepsilon(\mathbf{p}) &= \frac{p^2}{2m}, \quad \left[\hat{b}_{\mathbf{p}}; \hat{b}_{\mathbf{p}'}^+ \right]_+ = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}; \\ \overset{\vee}{\Psi}_i^0(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{P}} \hat{b}_{\mathbf{P}} \exp\left(i \frac{\mathbf{r}}{\hbar} \mathbf{P} - i \frac{t}{\hbar} \varepsilon(\mathbf{P})\right); \\ \varepsilon(\mathbf{P}) &= \frac{P^2}{2M}, \quad \left[\hat{b}_{\mathbf{P}}; \hat{b}_{\mathbf{P}'}^+ \right]_+ = \delta_{\mathbf{P}\mathbf{P}'}; \end{aligned}$$

$$A^{\vee 0v}(x) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} e_{\mathbf{k}\lambda}^{\vee} \sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\omega(\lambda)V}} \left(\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega t} + \hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}^+ e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega t} \right).$$

Причем

$$\omega = ck; \quad \omega(\lambda) = \begin{cases} c\sqrt{k^2 + \mu^2} & \text{при } \lambda = 1, 2 \\ c\mu & \text{при } \lambda = 3 \end{cases},$$

где V — объем квантования;

$e_{\mathbf{k}\lambda}^{\vee}$ — единичные орты линейной поляризации электромагнитного поля.

Далее движением ионов будем пренебрегать, считая их равномерно размазанными по пространству и обеспечивающими электронейтральность плазмы в целом.

Ток электронной компоненты плазмы согласно (3) состоит из двух слагаемых, одно из них

$$j_e^{\vee}(x) = \frac{e^2}{2mc} \times \left[\overset{\vee}{\Psi}_e^+(x) \overset{\vee}{\Psi}_e(x) A^{\vee}(x) + A^{\vee}(x) \overset{\vee}{\Psi}_e^+(x) \overset{\vee}{\Psi}_e(x) \right] \quad (6)$$

в формировании коэффициента экстинкции плазмы будем считать ответственным за роль томсоновского механизма рассеяния электромагнитного поля на электронах.

Оставшиеся согласно (3) члены, пропорциональные импульсу электронов, учитывают вклад гейзенберговского рассеяния в коэффициент экстинкции. Ниже мы ограничимся выражением (6), имея в виду, что при

$$\omega \gg k \sqrt{\frac{T}{m}}$$

роль гейзенберговского рассеяния мала. С другой стороны, пренебрежение гейзенберговским механизмом рассеяния и учет членов (6) позволяют получить для коэффициента экстинкции оценку снизу для всего диапазона частот. Выражение (6) написано в симметричной форме, удобной для последующего разрыва корреляторов по схеме

$$\begin{aligned} \langle \hat{b}_{\mathbf{p}_1}^+ \hat{b}_{\mathbf{p}_2}^{\vee} A \rangle &= \delta_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2} N(\mathbf{p}_1) A; \\ N(\mathbf{p}) &= \langle \hat{b}_{\mathbf{p}}^+ \hat{b}_{\mathbf{p}}^{\vee} \rangle, \quad A = \langle A \rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

Подстановка (6) в уравнение (2) для образа преобразования Фурье векторного потенциала

$$A^{\vee}(\mathbf{k}, \omega) = \int e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}} A^{\vee}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} dt$$

в линейном приближении по A^{\vee} дает

$$\begin{aligned} &\left(\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \delta_{vv_1} - k_v k_{v_1} \right) A^{\vee 1}(\mathbf{k}, \omega) = \\ &= \frac{e^2}{2mc^2 V} \sum_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2} \left[\hat{b}_{\mathbf{p}_1}^+ \hat{b}_{\mathbf{p}_2}^{\vee} A^{\vee} \left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2}{\hbar}, \omega - \frac{\varepsilon(\mathbf{p}_1) - \varepsilon(\mathbf{p}_2)}{\hbar} \right) + \right. \\ &\left. + A^{\vee} \left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2}{\hbar}, \omega - \frac{\varepsilon(\mathbf{p}_1) - \varepsilon(\mathbf{p}_2)}{\hbar} \right) \hat{b}_{\mathbf{p}_1}^+ \hat{b}_{\mathbf{p}_2}^{\vee} \right] - \frac{1}{c} j_{cl}^{\vee}. \end{aligned} \quad (8)$$

Если в (8) осуществить усреднение по ансамблю систем и разорвать корреляторы по схеме (7), воспользовавшись тем, что

$$\sum_{\mathbf{p}} \dots n(\mathbf{p}) = \int \dots n(\mathbf{p}) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \quad \text{при } V \rightarrow \infty$$

и $n(\mathbf{p}) = N(\mathbf{p})/V$,

то при максвелловском распределении электронов по скоростям

$$n(\mathbf{p}) = nf(\mathbf{p}), \quad f(\mathbf{p}) = f(p_x)f(p_y)f(p_z),$$

$$f(p_z) = \sqrt{\frac{2\pi}{mT}} \exp\left(-\frac{p_z^2}{2mT}\right)$$

получим

$$\left(\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \delta_{vv_1} - k_v k_{v_1} \right) A^{v_1}(\mathbf{k}, \omega) =$$

$$= \pi_r^{vv_1}(\mathbf{k}, \omega) A^{v_1}(\mathbf{k}, \omega) - \frac{1}{c} j_{cl}^v(\mathbf{k}, \omega), \quad (9)$$

причем

$$\pi_r^{vv_1}(k, \omega) = \pi_r(\omega) \delta_{vv_1}, \quad \pi_r(\omega) = \frac{\Omega^2}{\omega^2} = \frac{e^2 n}{\omega^2 m},$$

где Ω — частота ленгмюровских колебаний плазмы.

Из (9) в высокочастотном пределе получаем стандартное выражение для диэлектрической проницаемости плазмы [14]

$$\varepsilon^{vv_1}(\mathbf{k}, \omega) = \left(\delta_{vv_1} - \frac{k_{v_1} k_{v_2}}{k^2} \right) \varepsilon^{tr}(\omega) + \frac{k_{v_1} k_{v_2}}{k^2} \varepsilon^l(\omega),$$

причем

$$\varepsilon^{tr}(\omega) = \varepsilon^l(\omega) = 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}.$$

В этом приближении мнимая часть диэлектрической проницаемости отсутствует, и коэффициент экстинкции равен нулю. Отличный от нуля коэффициент экстинкции появляется в следующем приближении.

Теперь нас будут интересовать в диэлектрической проницаемости члены, пропорциональные четвертой степени заряда. Для их вычисления удобно ввести обозначение

$$\left(\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \delta_{vv_1} - k_v k_{v_1} \right) A^{v_1} = \hat{L}^{vv_1} A^{v_1} - \frac{1}{c} j_{cl}^v,$$

где оператор \hat{L} определяется первым членом правой части уравнения (8).

Добавляя и вычитая в правой части уравнения (8) член $\hat{L}^{vv_1} A^{v_1} / \omega^2$, перепишем это уравнение в интегральной форме

$$\hat{L}^{vv_1} A^{v_1}(\mathbf{k}, \omega) = D_{\Omega}^{vv_2}(\mathbf{k}, \omega) \left(\hat{L}^{v_1 v_2} A^{v_2} - \frac{\Omega^2}{\omega^2} A^{v_2} \right) - \frac{1}{c} D_{\Omega}^{vv_1} j_{cl}^{v_1}.$$

В символическом виде уравнение выглядит так

$$\hat{L}^{vv_1} A^{v_1} = D_{\Omega} \left(\hat{L}^{vv_1} A^{v_1} - \frac{\Omega^2}{\omega^2} A^{v_1} \right) - \frac{1}{c} D_{\Omega} j_{cl}, \quad (10)$$

причем

$$\left(\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \frac{\Omega^2}{c^2} \right) \delta_{vv_1} - k_v k_{v_1} \right) D_{\Omega}^{v_1 v'}(k, \omega) = \delta_{vv'}. \quad (11)$$

Вакуумные эффекты нас не интересуют. Если в правой части уравнения (10) оператор \hat{L} заменить всей правой частью этого уравнения, то получим

$$\hat{L}^{vv_1} A^{v_1} = D_{\pi} \left(\hat{L} - \pi_r \right) \left[D_{\pi} \left(\hat{L} - \pi_r \right) A^{v_1} - \frac{1}{c} j_{cl} \right] - \frac{1}{c} j_{cl}. \quad (12)$$

Уравнения (10) и (12), разумеется, равносильны, что нельзя сказать об их приближенных вариантах. В уравнении (12) произведем усреднение по ансамблю систем и разорвем корреляторы электронного и фотонного полей. С учетом равенства $\langle \hat{L}^{vv_1} \rangle = \pi_r^{vv_1}$ найдем

$$\left(\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \frac{\Omega^2}{c^2} \right) \delta_{vv_1} - k_v k_{v_1} - \Pi_r^{vv_1} \right) A^{v_1} =$$

$$= -\frac{1}{c} j_{cl}^v, \quad (13)$$

где тензор второго порядка $\Pi_r^{vv_1}(\mathbf{k}, \omega)$ определяется равенством

$$\Pi_r = \langle \hat{L} D_{\pi} \hat{L} \rangle - \pi_r D_{\pi} \pi_r. \quad (14)$$

Поляризационный оператор Π_r учитывает флуктуации плазмы и выражается через дисперсию электронного поля. В линейном приближении по концентрации электронов

$$\langle \hat{b}_{\mathbf{p}_1}^+ \hat{b}_{\mathbf{p}_2}^+ \hat{b}_{\mathbf{p}_1} \hat{b}_{\mathbf{p}_2} \rangle \approx \delta_{\mathbf{p}'_2 \mathbf{p}_1} \delta_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2} N(\mathbf{p}_2)$$

согласно (14) он равен

$$\Pi_r^{v_1}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2V} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} (N(\mathbf{p}_1) + N(\mathbf{p}_2)) D_{\Omega}^{v_1} \times \left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1}{\hbar}; \omega - \frac{\varepsilon(\mathbf{p}_2) - \varepsilon(\mathbf{p}_1)}{\hbar} \right). \quad (15)$$

Очевидно, что

$$\Pi_r^{v_1}(\mathbf{k}, \omega) = \Pi_r^{v_1^*}(-\mathbf{k}, -\omega).$$

Любой тензор второго ранга, описывающий свойства однородной изотропной среды, может быть представлен в форме

$$\Pi_r^{v_1}(\mathbf{k}, \omega) = \left(\delta_{vv_1} - \frac{k_v k_{v_1}}{k^2} \right) \Pi_r^{tr}(k, \omega) + \frac{k_v k_{v_1}}{k^2} \Pi_r^l(k, \omega), \quad (16)$$

причем

$$\begin{aligned} \Pi_r^{tr}(k, \omega) &= \frac{1}{2} \left(\delta_{v_1 v_2} - \frac{k_{v_1} k_{v_2}}{k^2} \right) \Pi_r^{v_2 v_1}(\mathbf{k}, \omega); \\ \Pi_r^l(k, \omega) &= \frac{k_{v_1} k_{v_2}}{k^2} \Pi_r^{v_2 v_1}(\mathbf{k}, \omega). \end{aligned} \quad (17)$$

Суммирование по v_1 и v_2 подразумевается. Теперь уравнение (13) распадается на два

$$\begin{aligned} \left(\varepsilon^{tr}(k, \omega) \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) A^{trv}(\mathbf{k}, \omega) &= -\frac{1}{c} j_{cl}^{trv}(\mathbf{k}, \omega); \\ \varepsilon^l(k, \omega) \frac{\omega^2}{c^2} A^{lv}(\mathbf{k}, \omega) &= -\frac{1}{c} j_{cl}^{lv}(\mathbf{k}, \omega), \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned} A_v^{tr}(\mathbf{k}, \omega) &= \left(\delta_{vv_1} - \frac{k_v k_{v_1}}{k^2} \right) A^{v_1}(\mathbf{k}, \omega); \\ A_v^l(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{k_v k_{v_1}}{k^2} A^{v_1}(\mathbf{k}, \omega); \quad A^v = A^{trv} + A^{lv}; \\ j_{cl}^{trv}(\mathbf{k}, \omega) &= \left(\delta_{vv_1} - \frac{k_v k_{v_1}}{k^2} \right) j_{cl}^{v_1}(\mathbf{k}, \omega); \\ j_{cl}^{lv}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{k_v k_{v_1}}{k^2} j_{cl}^{v_1}(\mathbf{k}, \omega); \quad j_{cl}^v = j_{cl}^{trv} + j_{cl}^{lv} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \varepsilon^{tr}(k, \omega) &= 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} - \Pi_r^{tr}(k, \omega); \\ \varepsilon^l(k, \omega) &= 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} - \Pi_r^l(k, \omega). \end{aligned} \quad (18)$$

Для тензора $D_{\Omega}^{v_1}(\mathbf{k}, \omega)$ также справедливо представление (16), причем согласно (11) имеем:

$$\begin{aligned} D_{\Omega}^{tr}(k, \omega) &= \left(\frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \Omega^2} - k + i0} - \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \Omega^2} + k + i0} \right) \frac{c^2}{2k}; \\ D_{\Omega}^l(k, \omega) &= \left(\frac{1}{\omega - \Omega + i0} - \frac{1}{\omega + \Omega + i0} \right) \frac{c^2}{2\Omega}. \end{aligned}$$

Ограничимся приближением, при котором продольные и поперечные волны не взаимодействуют друг с другом. Другими словами, при вычислении Π_r^{tr} мы опустим в (15) член с D_{Ω}^l , а при вычислении Π_r^l опустим член с D_{Ω}^{tr} .

Воспользуемся формулами (17) и используем замену переменной $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 + \hbar \mathbf{q}$. Полагая $V \rightarrow \infty$, перейдем от суммирования по переменной \mathbf{q} к интегрированию

$$\sum_{\mathbf{q}} \dots = \frac{V}{(2\pi)^3} \int \dots d\mathbf{q}.$$

Теперь выражение (15) переписывается так

$$\begin{aligned} \Pi_r^{tr}(k, \omega) &= \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{c}{8} \sum_{\mathbf{p}} \int_0^{\infty} \frac{q d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} n(\mathbf{p}) (1 + \cos^2(\mathbf{k}\mathbf{q})) \times \\ &\times \left[\frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \Omega^2} + \frac{\mathbf{p}(\mathbf{q} - \mathbf{k})}{m} + \frac{\hbar(\mathbf{q} - \mathbf{k})^2}{2m} - cq + i0} - \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \Omega^2} + \frac{\mathbf{p}(\mathbf{q} - \mathbf{k})}{m} + \frac{\hbar(\mathbf{q} - \mathbf{k})^2}{2m} + cq + i0} + \right. \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \Omega^2} + \frac{\mathbf{p}(\mathbf{q} - \mathbf{k})}{m} - \frac{\hbar(\mathbf{q} - \mathbf{k})^2}{2m} - cq + i0} - \left. \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \Omega^2} + \frac{\mathbf{p}(\mathbf{q} - \mathbf{k})}{m} - \frac{\hbar(\mathbf{q} - \mathbf{k})^2}{2m} + cq + i0} \right]. \end{aligned}$$

В этом выражении воспользуемся аппроксимацией

$$(\mathbf{q} - \mathbf{k})^2 \approx q^2 + k^2,$$

справедливой в областях $q \gg k$ и $q \ll k$. При суммировании по \mathbf{p} и максвелловском распределении электронов по скоростям в качестве полярной оси выбираем направление вектора \mathbf{q} . Теперь $\mathbf{q}\mathbf{p} = p \cdot q$,

и интеграл по телесным углам $do_{\mathbf{q}}$ вычисляется явно

$$\int \cos^2(\mathbf{kq}) do_{\mathbf{q}} = \frac{4}{3}\pi.$$

Окончательно имеем:

$$\Pi_r^{tr}(k, \omega) = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{2c}{3} \sum_{\mathbf{p}} \int_0^\infty \frac{qdq}{(2\pi)^3} n(\mathbf{p}) \times \left(\frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \Omega^2} + \frac{p_z q - \mathbf{pk}}{m} + \frac{\hbar(q^2 + k^2)}{2m} - cq + i0} - \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \Omega^2} + \frac{p_z q - \mathbf{pk}}{m} + \frac{\hbar(q^2 + k^2)}{2m} + cq + i0} + \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \Omega^2} + \frac{p_z q - \mathbf{pk}}{m} - \frac{\hbar(q^2 + k^2)}{2m} - cq + i0} - \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \Omega^2} + \frac{p_z q - \mathbf{pk}}{m} - \frac{\hbar(q^2 + k^2)}{2m} + cq + i0} \right). \quad (19)$$

Аналогичным образом при пренебрежении в (15) членом D_{Ω}^{tr} следует

$$\Pi_r^l(k, \omega) = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{c}{3} \sum_{\mathbf{p}} \int_0^\infty \frac{qdq}{(2\pi)^3} n(\mathbf{p}) \times \left(\frac{1}{\omega - \Omega + \frac{p_z q}{m} + \frac{\hbar q^2}{2m} + i0} - \frac{1}{\omega + \Omega + \frac{p_z q}{m} + \frac{\hbar q^2}{2m} + i0} + \frac{1}{\omega - \Omega + \frac{p_z q}{m} - \frac{\hbar q^2}{2m} + i0} - \frac{1}{\omega + \Omega + \frac{p_z q}{m} - \frac{\hbar q^2}{2m} + i0} \right). \quad (20)$$

Обращает на себя внимание тот факт, что при $\hbar \rightarrow 0$ интегралы (19) и (20) оказываются расходящимися. Их классического аналога не существует.

Таким образом, флуктуационные явления в плазме, строго говоря, с помощью методов классической физики описаны быть не могут.

Рассмотрим сначала поперечное поле. В высокочастотном пределе $\omega \gg k\sqrt{T/m}$ в (19) можно опустить члены, содержащие произведения \mathbf{pk} и $p_z q$, после чего интегралы вычисляются в явном виде

$$\Pi_r^{tr}(k, \omega) = -i \frac{n}{6\pi} \frac{e^4}{\hbar^2 c^2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{m^2 c^2 - \hbar^2 k^2 - 2m\hbar\omega - i0}} - \frac{1}{\sqrt{m^2 c^2 - \hbar^2 k^2 + 2m\hbar\omega + i0}} \right). \quad (21)$$

Это выражение имеет особенность при обращении знаменателя в ноль в точке $\lambda = 2\pi/k \sim \lambda_c$, где $\lambda_c = 2\pi\hbar/mc$ — комптоновская длина волны или, что то же самое, $\omega \sim mc^2/\hbar$. Эта особенность $\text{Im} \varepsilon^{tr}(\mathbf{k}, \omega) = -\text{Im} \Pi_r^{tr}(\mathbf{k}, \omega) c^2/\omega^2$, расположенная в квантовой области параметров, служит аналогом бозонного пика. В то же время — это релятивистская область, в которой изначально используемая нами нерелятивистская теория некорректна. Тем не менее в методических целях стоит заметить, что аналитическая в верхней полуплоскости комплексной частоты функция $\Pi_r^{tr}(k, \omega)$ обязана обладать вещественной частью.

Согласно (21) $\text{Re} \Pi_r^l(k, \omega)$ имеет вид δ -функции, не может быть построена без привлечения постоянной Планка \hbar и локализована в релятивистской области. Частоты, превышающие mc^2/\hbar с помощью (21), рассматривать бессмысленно. При меньших частотах

$$\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \gg k^2 + \frac{2m}{\hbar} \omega; \quad \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \gg k^2 - \frac{2m}{\hbar} \omega$$

из (21) следует, что

$$\Pi_r^{tr}(k, \omega) = -i \frac{16\pi}{3} r_0^2 n \frac{\omega}{c}; \quad r_0 = \frac{e^2}{4\pi m c^2},$$

где r_0 — классический радиус электрона.

Эта формула теряет зависимость от k и, что более важно, зависимость от постоянной \hbar . Она описывает известное затухание поперечных волн в плазме вследствие некогерентного томсоновского рассеяния их на флуктуациях электронов. Согласно (18) имеем

$$\text{Im} \varepsilon^{tr}(k, \omega) = -\frac{c^2}{\omega^2} \text{Im} \Pi_r^l(k, \omega) = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{cn}{3\pi\omega}.$$

Если определить коэффициент экстинкции как $\kappa(\omega) = \frac{\omega}{c} \text{Im} \varepsilon^l(\omega)$ [18], то он оказывается не зависящим от частоты, что следует из независимости от частоты сечения томсоновского рассеяния.

Исходя из вышесказанного, приходим к выводу о том, что затухание поперечных волн в плазме обладает бозонным пиком. Этот пик имеет квантовую природу, но находится в релятивистской области частот и может представлять интерес только при исследовании рентгеновских волн.

Что касается продольных волн в плазме, то здесь ситуация иная. Локализация бозонного пика здесь не может находиться в области $\lambda_c = 2\pi\hbar/mc$, потому что теория продольных волн не обладает параметром "c", каковым является скорость света. Вместе с областью локализации бозонного пика остается неясной и область частот, требующая квантового описания.

Теперь перейдем к исследованию формулы (20). Перепишем ее в виде

$$\begin{aligned} \Pi_r^l(\mathbf{k}, \omega) = & \frac{e^4}{3(2\pi)^2 \hbar c^2 \Omega m} \sum_{\mathbf{p}} \int_0^\infty n(\mathbf{p}) q^2 dq \times \\ & \times \left[\frac{1}{q^2 + \frac{2p_z}{\hbar} q + \frac{2m}{\hbar}(\omega - \Omega) + i0} - \right. \\ & - \frac{1}{q^2 + \frac{2p_z}{\hbar} q + \frac{2m}{\hbar}(\omega + \Omega) + i0} - \\ & - \frac{1}{q^2 - \frac{2p_z}{\hbar} q - \frac{2m}{\hbar}(\omega - \Omega) - i0} + \\ & \left. + \frac{1}{q^2 - \frac{2p_z}{\hbar} q - \frac{2m}{\hbar}(\omega + \Omega) - i0} \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Отметим, что поляризационный оператор $\Pi_r^l(\mathbf{k}, \omega)$ потерял зависимость от \mathbf{k} , тем не менее мы сохраним за ним прежнее обозначение.

При максвелловском распределении электронов по скоростям в пределе $T = 0$ слагаемое, содержащее p_z , можно опустить. Теперь интегралы легко вычисляются по формуле

$$\Pi_r^l(\mathbf{k}, \omega) = \frac{e^4}{12\pi c^2 \hbar \Omega} n e^{i\frac{\pi}{4}} \left(\sqrt{\frac{(\omega + \Omega)}{\hbar m}} - \sqrt{\frac{(\omega - \Omega)}{\hbar m}} \right). \quad (23)$$

Мнимая часть поляризационного оператора $\Pi_r^l(k, \omega)$ оказывается положительной величиной, что влечет за собой отрицательность мнимой части диэлектрической проницаемости. Таким образом, принятая модель плазмы при $T \rightarrow 0$ оказывается неустойчивой.

Иначе обстоит дело при $T \neq 0$. В общем случае выражение для $\Pi_r^l(\mathbf{k}, \omega)$ здесь оказывается достаточно громоздким. Но мнимая часть поляризационного оператора, определяющая коэффициент экстинкции, из-за наличия символической формулы

$$\frac{1}{x - a + i0} = \frac{1}{x - a} - i\pi\delta(x - a)$$

и свойств δ -функции, согласно (22), может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \text{Im} \Pi_r^l(\mathbf{k}, \omega) = & -\frac{e^4 n}{48\pi^2 c^2 m \Omega} \sqrt{\frac{2\pi}{mT}} \int_0^\infty q dq \times \\ & \times \left[e^{-\left(\frac{m(\omega - \Omega) + \hbar q}{2}\right)^2 / 2mT} - e^{-\left(\frac{m(\omega + \Omega) + \hbar q}{2}\right)^2 / 2mT} + \right. \\ & \left. + e^{-\left(\frac{m(\omega - \Omega) - \hbar q}{2}\right)^2 / 2mT} - e^{-\left(\frac{m(\omega + \Omega) - \hbar q}{2}\right)^2 / 2mT} \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Мы воспользовались максвелловским распределением электронов по скоростям и при $V \rightarrow \infty$ выполнили интегрирование по проекциям импульсов p_z , взяв в качестве полярной оси направление вектора \mathbf{q} .

Воспользуемся далее асимптотической при $\hbar \rightarrow 0$ формулой

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty q e^{-\left(\frac{\omega^2 m^2 + \hbar^2 q^2}{q^2 + \frac{\hbar^2 q^2}{4}}\right)^2 / 2mT} dq \approx \\ & \approx \frac{8mT}{\hbar^2} \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{\hbar\omega}{4T}\right)^2 \left(A_3 - A_1 + \ln \frac{\hbar\omega}{4T} \right) \right], \end{aligned} \quad (25)$$

причем

$$A_n = \int_1^\infty e^{-y^2} \frac{dy}{y^n}.$$

Из (18) и (24) при $\hbar \rightarrow 0$ находим

$$\begin{aligned} \omega^2 \text{Im} \varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = & -c^2 \text{Im} \Pi_r(\mathbf{k}, \omega) = \\ = & -\frac{e^4 n}{24\pi T \Omega} \sqrt{\frac{1}{2\pi mT}} \times \\ & \times \left[(\omega - \Omega)^2 \ln \frac{\hbar|\omega - \Omega|}{4T} - (\omega + \Omega)^2 \ln \frac{\hbar|\omega + \Omega|}{4T} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Если при малых концентрациях n ограничиться приближением $\Omega \rightarrow 0$,

то

$$\omega^2 \operatorname{Im} \varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = \frac{e^4 \omega n}{6\pi T \sqrt{2\pi m T}} \ln \frac{\hbar |\omega|}{4T}. \quad (27)$$

Если же $\Omega \neq 0$, то в характерной точке $\omega = \Omega$ имеем

$$\Omega^2 \operatorname{Im} \varepsilon(\mathbf{k}, \Omega) = \frac{e^4 \Omega n}{6\pi T \sqrt{2\pi m T}} \ln \frac{\hbar \Omega}{2T}. \quad (28)$$

Пусть $n \sim 10^{19} \text{ 1/см}^3$, $\Omega \sim 10^{14} \text{ 1/с}$ и $T = 10^4 \text{ К}$. При этих условиях, согласно (28), в плазме возможны ленгмюровские колебания с частотой $\omega = \Omega(1 + i \cdot 10^{-2}) \text{ 1/с}$. Такая оценка показывает, что затуханием (26) в плазме пренебрегать нельзя.

С другой стороны, формула (26) не имеет классического аналога и не допускает предельного перехода $\hbar \rightarrow 0$. Особенность этой формулы заключается в том, что квантовые свойства плазмы оказываются существенными даже при $\omega \rightarrow 0$.

При низких температурах $\hbar\omega \gg T$ или больших частотах для интеграла (25) методом перевала получаем оценку

$$\int_0^\infty q e^{-\left(\frac{\omega^2 m^2 + \hbar^2 q^2}{q^2} + \frac{\hbar^2 q^2}{4}\right)/2mT} dq \approx 2m \sqrt{\frac{\pi\omega T}{\hbar^3}} \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{2T}\right). \quad (29)$$

Подстановка (29) в (24) вновь приводит к формуле (23). Формула (26) на границе области своей применимости $\hbar\Omega/4T \ll 1$, $\hbar\omega/4T \sim 1$ согласно (27) предсказывает подавление функции $\omega^2 \operatorname{Im} \varepsilon^l(\mathbf{k}, \omega)$ и, следовательно, существование у нее максимума в интервале частот $0 - T/\hbar$, что ассоциируется с бозонным пиком. При дальнейшем возрастании частоты плазма теряет устойчивость, вызванную уменьшением роли температуры, что, в свою очередь, согласуется с формулой (23).

Заключение

Потеря устойчивости плазмы при малых температурах свидетельствует о нарушении термического беспорядка в системе и тенденции плазмы к

упорядоченному состоянию, что в свою очередь согласуется с общими закономерностями формирования бозонного пика со стороны больших волновых чисел.

Автор статьи приносит благодарность руководителям семинара Института общей физики РАН А. А. Рухадзе и А. М. Игнатову за благожелательное обсуждение работы и советы по ее улучшению.

Литература

1. Benassi P., Krisch M., Masciovecchio C., Mazzacurati V., Monaco G., Ruocco G., Sette F., Verbeni R. // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 77. P. 3835.
2. Foret M., Courtens E., Vacher R., Suck J. B. // Ibid. P. 3831.
3. Ruocco G., Sette F., Leonardo R. Di., Fioretto D., Krisch M., Lorenzen M., Masciovecchio C., Monaco G., Pignon F., Scopigno T. // Ibid. 1999. V. 83. P. 5583.
4. Buchenau U., Prager M., Nucker N., Dianoux A. J., Ahmad N., Phillips W. A. // Phys. Rev. B. 1986. V. 34. P. 5665.
5. Vainer Yu. G., Naumov A. V., Bauer M., Kador L. // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 97. P. 185501.
6. Векленко Б. А. // Прикладная физика. 2008. № 1. С. 5.
7. Scopigno T., Suck J. B., Angelini R., Albergamo F., Rouco G. // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 96. P. 135501.
8. Ruffle B., Guimbretiere G., Courtens E., Vacher R., Monaco G. // Ibid. 2006. V. 96. P. 045502.
9. Klinger M. I., Vatova L. // Phys. Rev. B. 2005. V. 72. P. 134206.
10. Chong Song-Ho. // Phys. Rev. E. 2006. V. 74. P. 031205.
11. Ciliberti S., Grigera T. S., Martin-Mayor V., Parisi G., Verrocchio P. // J. Chem. Phys. 2003. V. 119. P. 8577.
12. Власов А. А. // ЖЭТФ. 1938. Т. 8. С. 291.
13. Ландау Л. Д. // Там же. 1946. Т. 16. С. 574.
14. Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. Основы электродинамики плазмы. — М.: Высш. шк., 1988.
15. Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е. Методы квантовой теории поля в статистической физике. — М.: ГИФМЛ, 1962.
16. Ткачук Г. Б.: Труды/ Моск. энерг. ин-т. 1978. Вып. 350. С. 26.
17. Кузюлев М. В., Рухадзе А. А. // УФН. 1999. Т. 169. С. 1025.
18. Собельман И. И. // УФН. 2002. Т. 172. С. 85.

Статья поступила в редакцию 11 декабря 2008 г.

The quantum nature of the Langmuir's oscillations damping and the boson peak in plasma

B. A. Veklenko

Institute for High Energy Density RAS, Moscow, Russia
E-mail: veklenko@yandex.ru

It is shown that the Langmuir's oscillating damping is defined by quantum nature. The proportional to the four power of electron charge damping coefficient is created by thermal electron fluctuation.

tuations. It depends non analytically of the Planck constant \hbar if $\hbar \rightarrow 0$. The damping coefficient possesses the maximum by frequencies $\propto T / \hbar$, which coincides by boson peak.

PACS: 03.70.+k; 52.35.-g