

of microfields in unlimited plasma. It is shown that the calculated distributions have the same asymptotics. Position of the maximum and presence of additional extremums depend on the type and the size of the cluster. The dependence of an average of distribution and a dispersion of the function of distribution for a microfield are also investigated on number of cluster's particles.

PACS: 52.25.-b, 52.65.Ww

УДК 532.14:546.82

Флуктуационный подход к оценке температурного коэффициента поверхностного натяжения простых веществ

А. Г. Черевко

Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики
(СибГУТИ), г. Новосибирск, Россия
E-mail: rectorat@sibsuiris.ru

На основе анализа температурных флуктуаций критических кластеров при фазовом переходе пар — жидкость получено полуэмпирическое соотношение, определяющее температурную зависимость поверхностного натяжения простых веществ в широком интервале температур от точки плавления до точки их кипения. Получена формула для температурного коэффициента поверхностного натяжения. Соотношение выполняется с удовлетворительной точностью для широкого круга элементов таблицы Д. И. Менделеева. Оно указывает на связь капиллярных и теплофизических характеристик веществ в широком температурном интервале.

PACS: 68.35.-p

Введение

Капиллярные характеристики веществ определяют кинетику фазовых переходов первого рода. Эти характеристики играют также важную практическую роль, так как жидкие металлы являются охладителями энергетических установок, в том числе установок большой мощности [1]. Экспериментальные исследования поверхностного натяжения являются очень трудоемким процессом [2], особенно при высоких температурах. Для оценки поверхностного натяжения используется модель атомов с короткодействующим взаимодействием [3], благодаря которой установлена корреляция поверхностного натяжения с теплотой сублимации и плотностью простых веществ. Полученные в работе [3] результаты справедливы вблизи температуры плавления, но погрешность определения поверхностного натяжения по полученному соотношению, как отмечает автор, составляет порядка 50 %. В то же время в работе [4] найдена корреляция поверхностного натяжения вблизи температуры плавления. Полуэмпирические соотношения [5, 6] указывают на корреляцию поверх-

ностного натяжения с теплотой испарения и молекулярным объемом, но не позволяют получить кривую температурной зависимости поверхностного натяжения в широком интервале температур.

Флуктуационный подход, развитый в работе [7], позволил определить поверхностное натяжение простых веществ вблизи температуры их кипения и подтвердить корреляции теплофизических и капиллярных свойств, отмеченные в работах [3—6]. Он также указал на корреляцию теплоемкости и поверхностного натяжения, однако вопрос о температурной зависимости поверхностного натяжения и, следовательно, о его температурном коэффициенте остался открытым.

Таким образом, задача определения температурного коэффициента поверхностного натяжения и получения достаточно универсального соотношения, описывающего температурную зависимость поверхностного натяжения в широком интервале температур от точки плавления до точки их кипения для различных веществ, является актуальной.

Температурные флуктуации и размер критического кластера, индифферентного к ним

Кластеры (зародыши) новой фазы образуются в материнской фазе спонтанно [8—10]. Критическим называется кластер, вероятности роста и распада которого равны.

Рассмотрим образование критических кластеров в изотропных фазах, например, образование капелек жидкости в переохлажденном паре. Кластер можно считать шарообразным, так как благодаря очень малым размерам влиянием поля тяжести на его форму можно пренебречь. Разность давления P_L внутри кластера, в жидкой фазе и P_G — вне кластера, т. е. в газовой фазе, равна $P_L - P_G = 2\sigma/r^*$ [8], где r^* — радиус критического кластера, σ — поверхностное натяжение.

Давления P_L и P_G при наличии кластера отличаются от давления P_0 при плоской границе фаз, т. е. равновесного давления, соответствующего температуре T_B фазового перехода (температуре кипения), а именно $P_L = P_0 + \Delta P_L$, а $P_G = P_0 + \Delta P_G$. Отсюда радиус критического кластера равен

$$r^* = \frac{2\sigma}{\Delta P_L - \Delta P_G}. \tag{1}$$

При термодинамическом равновесии фаз их химические потенциалы равны как при наличии каплеобразного кластера $\mu_G(P_G, T) = \mu_L(P_L, T)$, так и при плоской межфазной границе $\mu_G(P_0, T) = \mu_L(P_0, T)$. Разность этих равенств дает

$$\mu_G(P_G, T) - \mu_G(P_0, T) = \mu_L(P_L, T) - \mu_L(P_0, T). \tag{2}$$

Если метастабильная фаза лишь слабо перегрета или переохлаждена, то разности $\Delta P_L = P_L - P_0$ и $\Delta P_G = P_G - P_0$ относительно малы, что позволяет разложить (2) в ряд. Ограничиваясь первым порядком малости, получаем $\frac{d\mu_G}{dP} \Delta P_G = \frac{d\mu_L}{dP} \Delta P_L$. Учитывая, что при постоянной температуре $N_A \frac{d\mu}{dP} = V$, где N_A — число Авогадро, а V — молярный объем, получаем $V_L \Delta P_L = V_G \Delta P_G$. Отсюда следует $\Delta P_L = P_G V_G / V_L$. В результате подстановки ΔP_L в (1) радиус критического кластера становится равным

$$r^* = \frac{2\sigma V_L}{\Delta P_G (V_G - V_L)}. \tag{3}$$

Согласно формуле Клапейрона—Клаузиуса

$$\Delta P_G = \frac{\Lambda}{T_0 (V_G - V_L)} \Delta T, \tag{4}$$

где Λ — молярная теплота перехода из метастабильной фазы в фазу зародыша;

$\Delta T = T_B - T$ — переохлаждение.

Подставляя (4) в (3), получаем

$$r^* = \frac{2\sigma V_L T_B}{\Lambda \Delta T}. \tag{5}$$

Число молекул n^* в критическом кластере назовем его размером. Если считать, что объем кластера равен сумме объемов составляющих его сферических молекул, то размер кластера равен

$$n^* = \frac{4}{3} \pi r^{*3} \frac{N_A}{V_L}.$$

После подстановки r^* из (5) получим $n^* = \frac{32}{3} \pi N_A V_L^2 \left(\frac{\sigma T_0}{\Lambda \Delta T} \right)^3.$

Поскольку мы ищем соотношение для оценки, то оно должно содержать величины, которые относительно легко могут быть найдены в справочниках и оригинальных статьях. Поэтому за объем V_L в первом приближении примем молярный объем

$$V_m = \frac{M}{\rho} \text{ [м}^3\text{/моль]},$$

где M — молярная масса;

ρ — удельная масса;

ε — пористость кластера.

Из-за пористости кластера число молекул в нем будет меньше, так как долю объема εV занимают поры. Поскольку форму молекул в кластере принимаем сферической, то $\varepsilon = 0,4$ [11]. В результате размер кластера будет равен

$$n^* = \frac{32}{3} \pi N_A V_m^{1-\varepsilon} \left(\frac{\sigma T_0}{\Lambda \Delta T} \right)^3. \tag{6}$$

Температура критических кластеров испытывает флуктуации [8], среднеквадратическое значение которых равно

$$\theta_{rms} = \sqrt{\frac{RT^2}{n^* C_V}}, \tag{7}$$

где $R = kN_A$ — молярная газовая постоянная;

C_V — молярная изохорная теплоемкость фазы кластера.

Поскольку размер околокритических кластеров новой фазы в системах жидкость—пар простых

веществ может быть относительно малым ($n^* \sim 100$), то, согласно (7), температурные флуктуации (ТФ) таких кластеров могут быть относительно большими.

Температурные флуктуации кластеров экспериментально не наблюдались, но ТФ малых термодинамических систем измерены в работах [12, 13]. Кроме того, в работе [12] показано, что амплитудное распределение ТФ является нормальным, а в работе [13] по величине этих флуктуаций определена высокотемпературная изохорная теплоемкость вольфрама. Цифровая методика измерения ТФ методом противопоставления предложена в работе [14]. Если размер критических кластеров столь мал, что его ТФ превышают переохлаждение, то ТФ могут оказывать влияние на состояние критических кластеров.

Ввиду нормального амплитудного распределения амплитуда ТФ будет превышать переохлаждение более чем в 67 % случаев, если $\theta_{rms} > \Delta T$, при этом ТФ пренебрегать не следует.

При условии $\theta_{rms} \leq \Delta T$ влияние ТФ на критический кластер можно не учитывать.

Таким образом, равенство $\theta_{rms} = \Delta T$ можно принять в качестве условия определения размера критического кластера индифферентного к ТФ (КИТФ). Подставив в это условие значение θ_{rms} из (7) и ΔT из (6), получаем величину размера КИТФ

$$n^{**} = \frac{3^2}{2^{10} \pi^2 N_A^2} \left(\frac{R}{C_V} \right)^3 \left(\frac{\Lambda}{\sigma V_m^{2/3} (1-\varepsilon)^{2/3}} \right)^6.$$

Для получения оценочного расчетного соотношения перейдем от изохорной теплоемкости к изобарной, приняв, что в первом приближении изобарная и изохорная теплоемкости связаны соотношением $C_P = \frac{4}{3} C_V$, что соответствует экспериментальным значениям для щелочных металлов, например, для калия при температуре 1030 К $C_P/C_V = 1,35 \pm 4,5$ % (температура кипения калия равна 1030,6 К) [1].

Примем также, что молярная теплота испарения Λ равна разности молярной теплоты сублимации (Λ_{sub}) и плавления (Λ_{melt}). В итоге размер КИТФ будет равен

$$n^{**} = \frac{1}{48 \pi^2 N_A^2} \left(\frac{R}{C_P} \right)^3 \left(\frac{\Lambda_{sub} - \Lambda_{melt}}{\sigma V_m^{2/3} (1-\varepsilon)^{2/3}} \right)^6. \quad (8)$$

Формула (8) получена ранее в работе [7] путем другого доказательства.

Поверхностное натяжение и его температурный коэффициент

Сравнение размера КИТФ, рассчитанного по экспериментальным данным [1] с отношением температур кипения T_B и плавления T_M для щелочных металлов, показало, что с точностью до трех значащих цифр размер КИТФ удовлетворяет уравнению $\ln n^{**} = 2,34 \frac{T_B}{T_M}$ (в работе [15] учтены только две значащие цифры). Отсюда и из (8) с учетом того, что $\varepsilon = 0,4$, для поверхностного натяжения при температуре кипения получаем

$$\sigma_B = 0,5 \frac{R^{1/2}}{N^{1/3}} \frac{\Lambda_{sub} - \Lambda_{melt}}{V_m^{2/3} C_P^{1/2}} \exp\left(-0,39 \frac{T_B}{T_M}\right). \quad (9)$$

Как показано в работе [7], эта формула справедлива для большинства элементов таблицы Д. И. Менделеева. Поскольку температурная зависимость поверхностного натяжения является гладкой функцией, т. е. не терпит разрывов, то можно предположить, что вблизи точки кипения справедлива аналогичная формула, в которой вместо температуры кипения стоит текущая температура T . Поэтому в окрестности точки кипения можно заменить температуру кипения T_B на T , т. е. в этой окрестности будем иметь:

$$\sigma = 0,5 \frac{R^{1/2}}{N^{1/3}} \frac{\Lambda_{sub} - \Lambda_{melt}}{V_m^{2/3} C_P^{1/2}} \exp\left(-0,39 \frac{T}{T_M}\right).$$

Поскольку $T = T_B - \Delta T$, то при малых переохлаждениях ΔT это выражение можно разложить в ряд. Ограничиваясь линейным членом разложения, получаем $\sigma = \sigma_B \left(1 + 0,39 \frac{\Delta T}{T_M}\right)$.

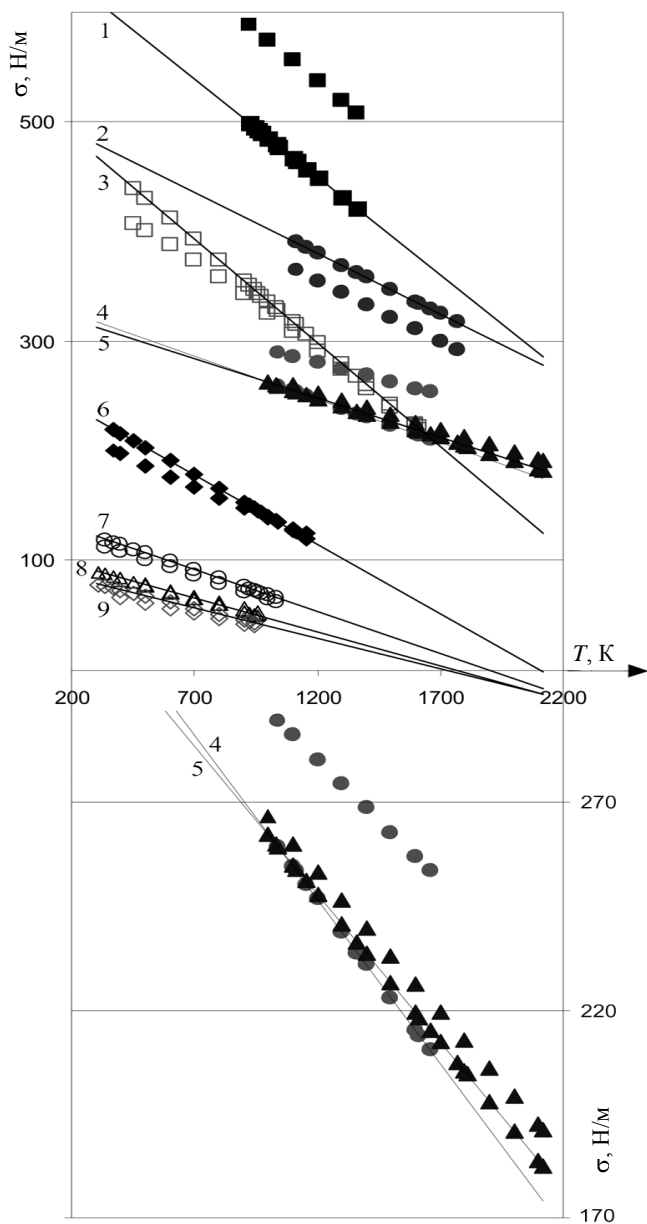
Таким образом

$$\sigma = \sigma_B \left(1 + 0,39 \frac{T_B - T}{T_M}\right). \quad (10)$$

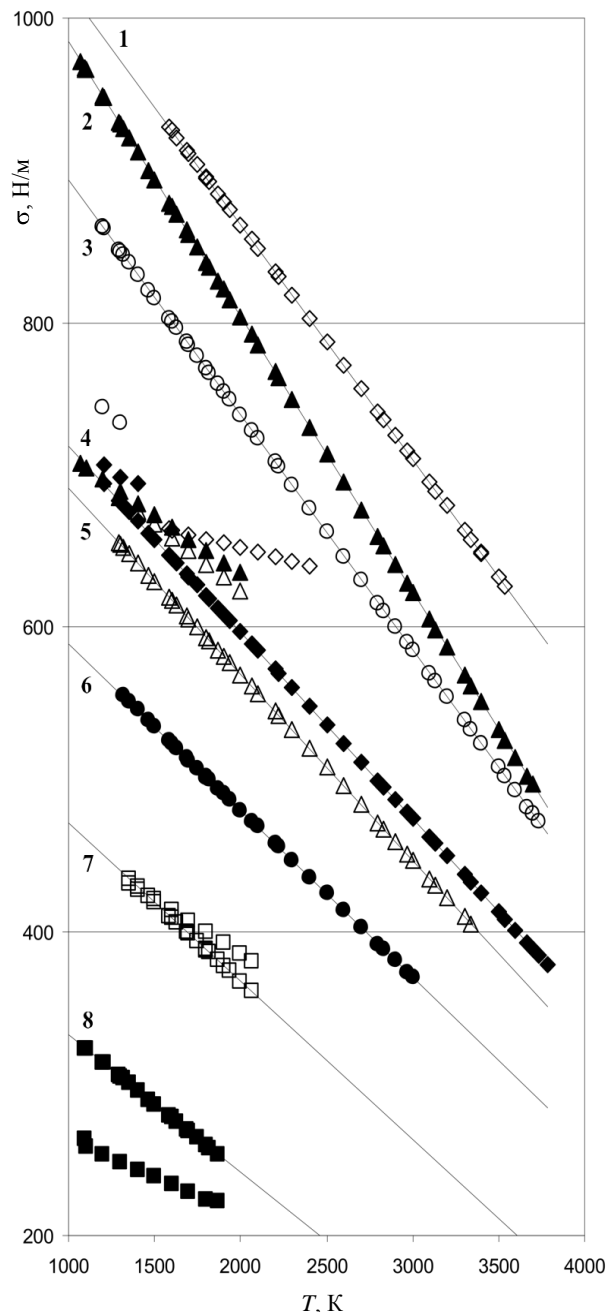
Температурная зависимость поверхностного натяжения в первом приближении линейна, т. е. в этом приближении температурная производная поверхностного натяжения постоянна, и соотношение (10) соответствует этому факту. Можно ожидать, что соотношение (10) в первом приближении справедливо в широком диапазоне температур от точки кипения до точки плавления. Сравнение с экспериментальными данными, при-

веденное на рисунке, подтверждает это предположение. Анализ результатов сравнения расчетных и экспериментальных данных для щелочных металлов (см. рисунок, *a*, линии 3, 6—9) показывает, что

во всем температурном диапазоне от точки плавления до точки кипения этих металлов максимальное расхождение между указанными данными менее 10 %.



a



б, I

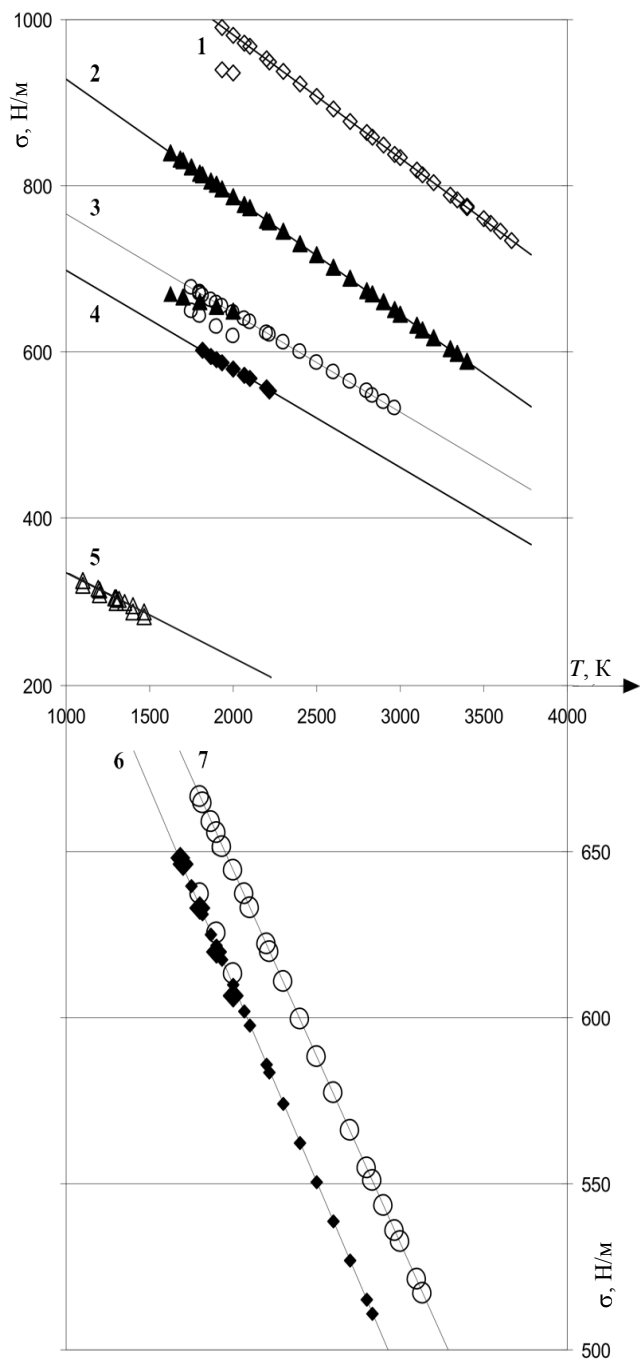
Температурная зависимость поверхностного натяжения:

a — щелочных и щелочно-земельных металлов:

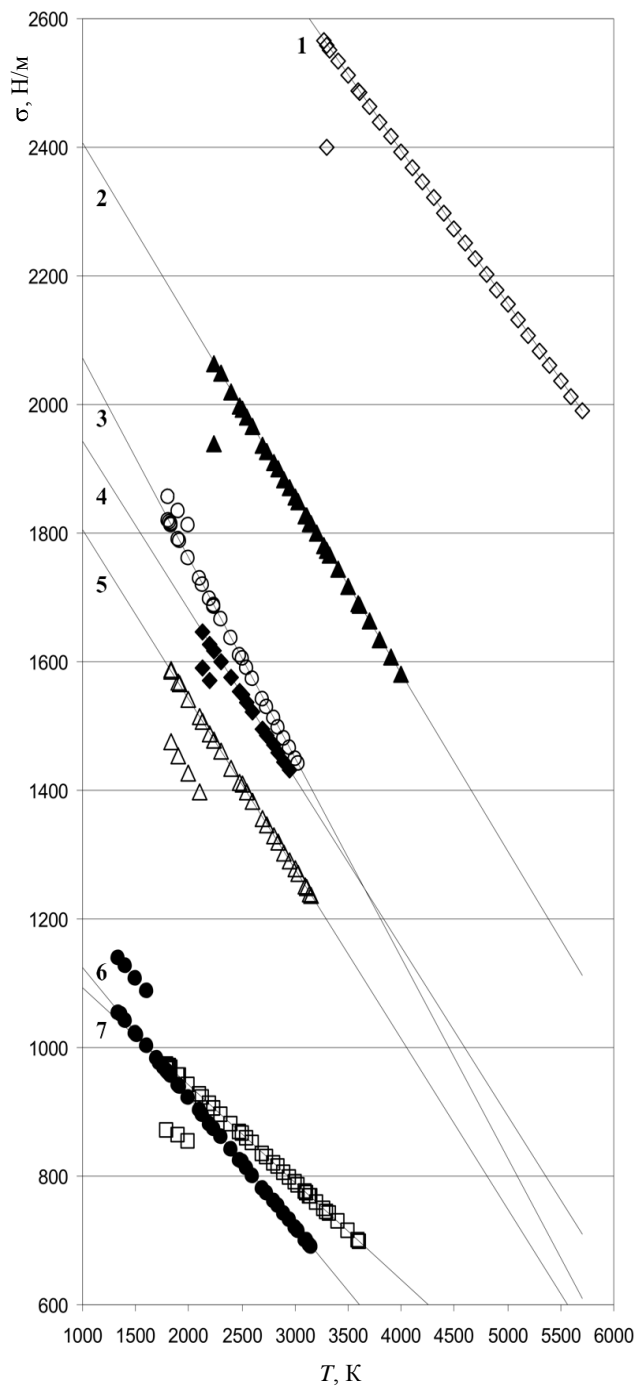
(точки, соединенные линией — расчет по формуле (10), такие же точки, но без линии — экспериментальные данные [1]):
 1 — Mg¹²; 2 — Ca²⁰; 3 — Li³; 4 — Sr³⁸; 5 — Ba⁵⁶; 6 — Na¹¹; 7 — K¹⁹; 8 — Rb³⁷; 9 — Cs⁵⁵;

б — лантана и лантаноидов:

(точки, соединенные линией — расчет по формуле (10), такие же точки, но без линии — экспериментальные данные [16]):
 I: 1 — Gd⁶⁴; 2 — Ce⁵⁸; 3 — La⁵⁷; 4 — Pr⁵⁹; 5 — Nd⁶⁰; 6 — Pm⁶¹, только расчетная кривая; 7 — Sm⁶²; 8 — Eu⁶³;



б, II



в, I

Продолжение:

б — лантана и лантаноидов:

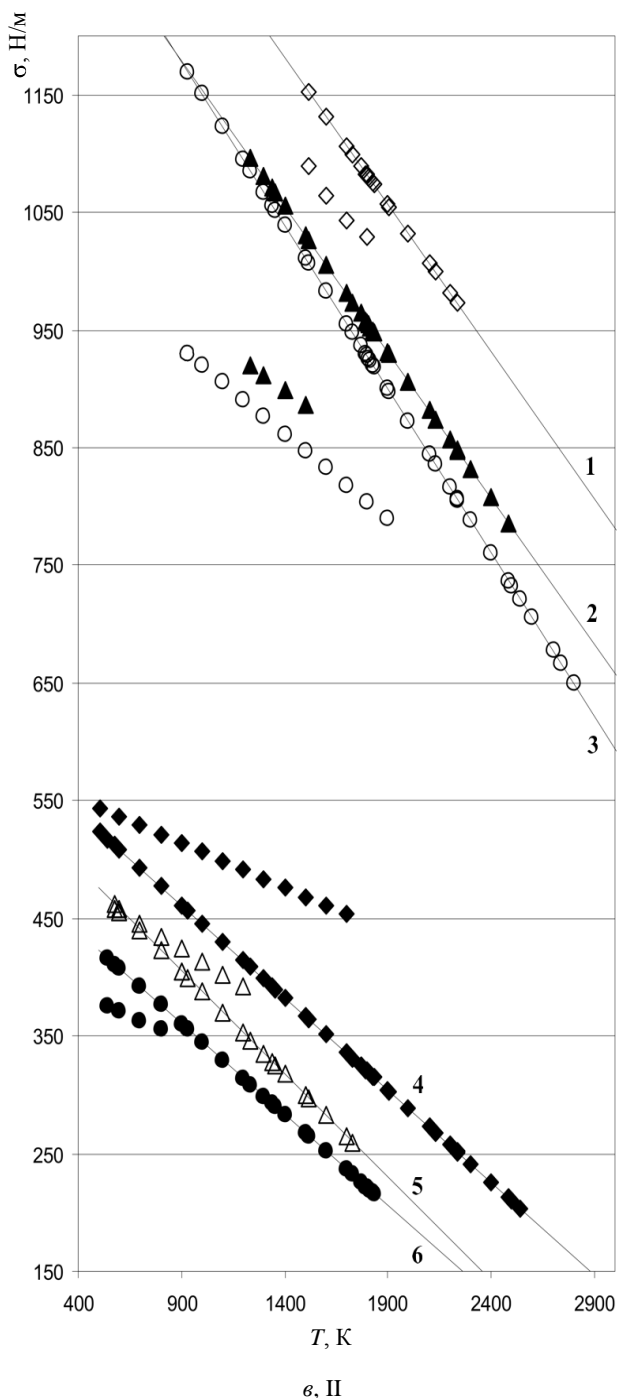
(точки, соединенные линией — расчет по формуле (10), такие же точки, но без линии — экспериментальные данные [16]):

II: 1 — Lu⁷¹; 2 — Tb⁶⁵; 3 — Ho⁶⁷; 4 — Tm⁶⁹, только расчетная кривая; 5 — Yb⁷⁰; 6 — Dy⁶⁶; 7 — Er⁶⁸;

в — ряда элементов таблицы Д. И. Менделеева:

(точки, соединенные линией — расчет по формуле (10), такие же точки, но без линии — экспериментальные данные [16, 17]):

I: 1 — Ta⁷³; 2 — Rh⁴⁵; 3 — Fe²⁶; 4 — Cr²⁴; 5 — Pd⁴⁶; 6 — Au⁷⁹; 7 — Y³⁹;



Окончание:

в — ряда элементов таблицы Д. И. Менделеева:
 (точки, соединенные линией — расчет по формуле (10), такие же точки, но без линии — экспериментальные данные [16, 17]):
 II: 1 — Mn²⁵; 2 — Ag⁴⁷; 3 — Al¹³; 4 — Sn⁵⁰; 5 — Tl⁸¹;
 6 — Bi⁸³

В случае щелочно-земельных металлов расхождение экспериментальных и расчетных данных составляет для:

- Ва⁵⁶ — менее 5 % (линия 5, $T_M = 1000$ К, $T_B = 2120$ К);
- Са²⁰ — менее 10 % (линия 2, $T_M = 1114$ К, $T_B = 1768$ К);
- Ст³⁸ — менее 20 % (линия 4, $T_M = 1041$ К, $T_B = 1659$ К);

Mg¹² — менее 20,8 % (линия 1, $T_M = 923$ К, $T_B = 1363$ К).

Результаты для лантана и лантаноидов и других элементов представлены на рисунке, б, в.

Анализируя температурные зависимости поверхностного натяжения лантаноидов (см. рисунок, б, I и II), отметим, что:

- для Yb⁷⁰ экспериментальные данные имеют во всем температурном диапазоне от точки плавления до точки кипения [16]. Отклонение расчетных и табличных данных не превышает 2,2 %. Поэтому на линии 5 (см. рисунок, б, II) они практически сливаются. Для Dy⁶⁶ имеются экспериментальные данные в диапазоне температур от точки плавления до 2000 К. В этом диапазоне температур расхождение расчетных и табличных данных не превышает 0,5 %. Поэтому на графике (см. рисунок, б, II — линия 6) они попадают на одну прямую;
- для Се⁵⁸ (диапазон экспериментальных данных от точки плавления до 2000 К, точка кипения 3699 К) и Gd⁶⁴ (диапазон экспериментальных данных $T_M = 2400$ К; точка кипения 3536 К) расхождение достигает 28 %;
- для Pm⁶¹ и Tm⁶⁹ надежных экспериментальных данных не было найдено, поэтому приведены только расчетные температурные зависимости поверхностного натяжения (см. рисунок, б, I — линия 6 и б, II — линия 4).

Для большинства лантаноидов расхождение табличных и расчетных данных не превышает 10 %, при этом для Pr⁵⁹, Sm⁶², Dy⁶⁶, Ho⁶⁷, Er⁶⁸, Yb⁷⁰, Lu⁷¹ это отклонение не превышает 5,5 % во всем диапазоне экспериментальных значений.

На рисунке в, I и II приведена температурная зависимость поверхностного натяжения ряда металлов с широким интервалом температур плавления ($T_M = 505—3327$ К) и кипения ($T_B = 1730—5698$ К), включая тугоплавкие металлы (Rh⁴⁵, Ta⁷³, $T_{B\text{Rh}} = 4000$ К, $T_{B\text{Ta}} = 5698$ К). К сожалению, экспериментальные данные для этих металлов имеются в относительно узком интервале температур, а для тантала и родия — только при температуре плавления.

Результаты сравнения экспериментальных [16, 17] и расчетных данных показывают, что расхождение для Cr²⁴ и Fe²⁶ не превышает 3,5 %; для Mn²⁵, Rh⁴⁵, Ta⁷³ — менее 6,2 %; для Y³⁹, Pd⁴⁶, Au⁷⁹, Tl⁸¹, Bi⁸³ — не превышает 11 %; для Al¹³, Ag⁴⁷ — меньше 20,5 %, а для Sn⁵⁰ оно достигает 35 %.

По мнению автора, стоит обратить внимание на тот факт, что для родия и тантала, как и для других элементов, поверхностное натяжение, соответствующее температуре плавления, было определено из значения поверхностного натяжения σ_B , рассчитанного по формуле (9) для температуры

кипения 4000 и 5698 К, соответственно. Полученное расхождение экспериментальных и расчетных данных при температуре плавления этих веществ составляет всего 6,2 %, что служит дополнительным основанием для доверия к расчетным данным, получаемым из формулы (10).

Таким образом, можно констатировать, что для большинства металлов полуэмпирическое соотношение (10) с удовлетворительной для оценок точностью описывает температурную зависимость поверхностного натяжения.

Продифференцировав (10), для температурного коэффициента поверхностного натяжения получаем

$$\frac{d\sigma}{dT} = -0,39 \frac{\sigma_B}{T_M}. \quad (11)$$

В соотношении (11) входит значение поверхностного натяжения вблизи температуры кипения σ_B , даваемое формулой (9). Отсюда следует, что температурный коэффициент поверхностного натяжения определяется такими теплофизическими величинами, как температура кипения и плавления, разность теплоты сублимации и плавления вещества, а также теплоемкостью вещества. Это подтверждает корреляцию теплофизических и капиллярных свойств веществ, отмеченную в работах [3—7].

Заключение

Получена полуэмпирическая связь поверхностного натяжения металлов и его температурного коэффициента с их теплофизическими характеристиками. Показано, что полученные соотношения справедливы в широком диапазоне температур от точки плавления до точки кипения вещества. Они могут использоваться для оценки поверхностного натяжения и его температурного коэффициента при отсутствии экспериментальных данных.

Предложенный полуэмпирический флуктуационный подход, вероятно, может быть использован для оценки температурной зависимости поверхностного натяжения сплавов и неорганических соединений, экспериментальные данные для которых получить затруднительно.

*Автор благодарен участникам научного семинара
Отдела термодинамических исследований
Института неорганической химии СО РАН
за всестороннее обсуждение работы.*

Работа поддержана междисциплинарным интеграционным проектом СО РАН № 81 и грантом РФФИ 06-08-00456-А.

Литература

1. Быстров П. И., Каган Д. Н., Кречетова Г. А., Шпильрайн Э. Э. Жидкометаллические теплоносители тепловых труб и энергетических установок. — М.: Наука, 1988. — 261 с.
2. Saravanan R. A., Molina J. M., Narciso J., Garcia-Cordovilla C., Louis E. Surface tension of pure aluminum in argon/hydrogen and nitrogen/hydrogen atmospheres at high temperatures// J. Mater. Sci. Lett. 2002. V. 21. No. 4. P. 309—311.
3. Смирнов Б. М. Система атомов с короткодействующим взаимодействием// Успехи физических наук. 1992. Т. 162. № 12. С. 97—150.
4. Сумм Б. Д. Новые корреляции поверхностного натяжения с объемными свойствами жидкостей// Вестник Моск. ун-та. Сер. 2. Химия. 1999. Т. 40. № 6. С. 400—405.
5. Keeney M., Heicklen J. Surface tension and the heat of vaporization: a simple empirical correlation// J. inorg. nucl. Chem. 1979. V. 41. P. 1755—1758.
6. Семенченко В. К. Поверхностные свойства металлов и сплавов. — М.: Машиностроение, 1957. — 491 с.
7. Черевко А. Г. Флуктуационный подход к оценке поверхностного натяжения простых веществ вблизи их температуры кипения// Прикладная физика. 2008. № 6. С. 5—7.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Ч. 1. — М.: Физматлит, 2005. — 616 с.
9. Френкель Я. И. Кинетическая теория жидкостей. — Л.: Наука, 1975. — 592 с.
10. Abraham F. F. Homogeneous Nucleation Theory, Advances in Theoretical Chemistry (Academic, New York), 1974. P. 420.
11. Фенелонов В. Б. Введение в физическую химию формирования супрамолекулярной структуры адсорбентов и катализаторов. — Новосибирск: Изд-во сиб. отд. РАН, 2002. — 413 с.
12. Milatz J. M. W., Van der Velden H. A. Natural Limit of Measuring Radiation with a Bolometre// Physica. 1943. V. 10. No. 36. P. 369—380.
13. Крафтмахер Я. А., Крылов С. Д. Температурные флуктуации и теплоемкость вольфрама при постоянном объеме// ФТТ. 1980. Т. 22. Вып. 1. С. 3157—3159.
14. Анисимов М. П., Черевко А. Г. Флуктуационные явления в физико-химическом эксперименте. — Новосибирск: Наука, 1986. — 157 с.
15. Cherevko A. G. The Scale for the Size of Critical Cluster// High Temperature. 2007. V. 45. No. 4. P. 575—577.
16. Scientific Data Base of phys. & chem. properties of metals & alloys/ The Chelyabinsk Sci. Center Southern Ural State Univ/www.itp.nsc.ru.
17. Свойства элементов: Справочник. Ч. 1. Физические свойства/ Т. В. Андреева, А. С. Болгар, М. В. Власова и др. — М.: Металлургия, 1976. — 599 с.

Статья поступила в редакцию 18 сентября 2008 г.

The fluctuation approach for the estimation of the temperature coefficient of surface tension of simple substances

A. G. Cherevko

Siberian State University of Telecommunications and Informatics, Novosibirsk, Russia
E-mail: rectorat@sibsuiris.ru

On the basis of the analysis of temperature fluctuations of liquid critical clusters during a vapor to liquid phase transition the semiempirical relationship defining temperature dependence of a surface tension of simple substances from melting point up to a point of their boiling is offered. The formula for temperature coefficient of a surface tension is offered also. The relationship is carried out with satisfactory accuracy for a wide range of elements. Relationships link the thermophysical properties with the capillary properties of simple substances within a wide temperatures interval.

PACS: 68.35.-p

УДК 543.22:548.55

Анизотропия скорости ультразвука в монокристаллах металлов кубической симметрии

В. В. Красавин

Ковровская государственная технологическая академия, г. Ковров, Россия
E-mail: plddesigner@gmail.com

А. В. Красавин

Королевский университет Белфаста, г. Белфаст, Великобритания

Путем решения уравнения движения элементов среды под действием упругих напряжений получены аналитические выражения для продольной (квазипродольной) и двух поперечных (квазипоперечных) ультразвуковых волн в любом произвольном кристаллографическом направлении кубических кристаллов. Пространственная анизотропия скорости ультразвуковых волн в монокристаллах никеля и меди демонстрируется указательными поверхностями скоростей и численными оценками их разброса.

PACS: 81.10.-h

Введение

Распространение упругих волн в частности ультразвуковых, в анизотропной кристаллической среде определяется уравнением движения элементов среды под действием упругих напряжений [1]:

$$C_{ijkl} S_{ol} n_k n_j = \rho V^2 S_{oi}, \quad (1)$$

где C_{ijkl} — тензор модулей упругости кристалла;
 S_{ol}, S_{oi} — компоненты вектора смещения;
 n_k, n_j — компоненты единичного вектора \vec{n} (n_1, n_2, n_3), определяющего направление распространения упругой волны;
 ρ — плотность упругой среды;
 V — скорость упругой волны.

Анализ анизотропии скорости ультразвуковых волн в монокристаллах кубических металлов требует точного решения уравнения (1). Известны [1] решения этого уравнения для главных кристаллографических направлений в кристалле [100], [110] и [111]:

- для продольных волн:

$$\begin{aligned} \rho V^2_{[100]} &= C_{11}, \\ \rho V^2_{[110]} &= \frac{1}{2} (C_{11} + C_{12} + 2C_{44}), \\ \rho V^2_{[111]} &= \frac{1}{3} (C_{11} + 2C_{12} + 4C_{44}); \end{aligned} \quad (2)$$

- для поперечных волн:

$$\rho V^2_{[100]} = C_{44} \text{ — независимо от поляризации,}$$