

PACS: 41.20.-q

УДК 537.29:539.14

Индucedированное излучение водородоподобного атома в монохроматическом электрическом поле

В. И. Крылов

Дальневосточный государственный гуманитарный университет, г. Хабаровск, Россия
E-mail: boss@khsu.ru

А. А. Рухадзе

Институт общей физики им. А. М. Прохорова РАН, Москва, Россия

По поведению волновой функции нестационарной задачи определена плотность тока электрона в водородоподобном атоме, находящемся во внешнем сильном однородном высокочастотном монохроматическом поле. Показано, что индуцированное атомным электроном электромагнитное поле может заметно отличаться от монохроматического и содержать высокие нечетные гармоники частоты внешнего поля. Такой механизм генерации гармоник отличается от механизма, обусловленного туннелированием атомного электрона в сильном электромагнитном поле, и доминирует в условиях, когда туннелирование отсутствует. Его следует считать проявлением нелинейной поляризации атома в сильном высокочастотном поле.

PACS: 41.20.-q

Введение

В плазме, помещенной во внешнее высокочастотное электромагнитное поле ($\omega \gg v$; ω, v — частоты поля и столкновений частиц плазмы) как в нелинейной среде всегда индуцируются высокие гармоники поля накачки. Если последнее достаточно мало, так что скорость осцилляций электронов в этом поле меньше их тепловой скорости, то отношение амплитуды n -й гармоники индуцированного поля к амплитуде поля накачки пропорционально отношению скорости осцилляций к скорости света в n -й степени и обратно пропорционально n .

Иное положение имеет место, если поле накачки настолько сильно, что скорость осцилляций электронов больше их тепловой скорости, но все еще нерелятивистская. В этом случае определяющим в генерации гармоник поля накачки является индуцированный диссипативный ток, что впервые показал В. П. Силин в работе [1], рассмотревший генерацию гармоник в полностью ионизованной плазме при учете только упругих столкновений электронов с ионами. При этом отношение интенсивностей индуцированных гармоник к интенсивности основной гармоники порядка v/ω , но они все почти одного порядка и с номером гармоник уменьшаются как $1/n$. В работе [2] была исследована генерация гармоник в сильном высокочастотном поле при учете неупругих столкновений

электронов и показано, что в этом случае происходит более эффективная генерация гармоник, хотя с номером гармоник их интенсивность падает сильнее — как $1/n^2$. Ниже показано, что и атомные (связанные) электроны, находясь во внешнем монохроматическом электрическом поле, также будут индуцировать электромагнитное излучение с гармониками, кратными частоте внешнего поля.

Отметим, что появление квантовых генераторов, создающих интенсивное электромагнитное поле, стимулировало большое число работ, в которых экспериментально и теоретически исследовалось взаимодействие такого излучения с веществом (обзоры [3—6] и литература в них). В этих работах, в частности, исследуется генерация гармоник частоты внешнего поля. В подавляющем большинстве работ, однако, использовался метод численного моделирования, поскольку в общем случае произвольных параметрах — частоты ω и амплитуды $\tilde{\epsilon}$ внешнего электромагнитного поля с напряженностью

$$\tilde{\epsilon} \cos(\omega t + \alpha) \quad (1)$$

пока не удастся аналитически решить задачу из-за невозможности применения теории возмущений.

В ряде работ, обзор которых содержится в [4], предприняты попытки аналитически решить задачи генерации гармоник лазерного излучения атом-

ным электроном во внешнем высокочастотном поле при определенных ограничениях.

Предполагается, что энергия осцилляций электрона порядка потенциала ионизации атома, а само поле считается достаточно сильным, так что существенным становится туннельная ионизация атома. Поскольку в этих работах используется теория возмущений, их результаты весьма ограничены и для некоторых рассмотренных в этих работах параметров поля накачки вызывают сомнения.

В интересующей нас области параметров частота поля ω значительно меньше частот перехода электрона в атоме

$$\omega \ll Ze^2 / a\hbar, \quad (2)$$

а амплитуда поля накачки мала по сравнению с напряженностью атомного поля, т. е. $\tilde{\varepsilon} \ll Z|e|/a^2$ ($a = \hbar^2 / Ze^2 m_e$ — кулоновский масштаб длины; e и m — заряд и масса электрона), но в то же время величина этого поля такова, что энергия, которую атомный электрон приобретает в поле волны $|e|\tilde{\varepsilon}\ell$ (ℓ — среднее расстояние, пройденное электроном вдоль поля), благодаря низкой частоте ω сравнима с его потенциальной энергией в кулоновском поле ядра, но вероятность туннельного ухода электрона из атома все еще мала. Величина ℓ при этом может намного превосходить размер a .

В настоящей работе сделана попытка, не прибегая к теории возмущений, найти приближенные аналитические выражения напряженности электромагнитного поля, индуцированного электроном в атоме водорода, находящемся во внешнем электрическом поле с напряженностью, определяемой формулой (1) и параметрами, значения которых лежат в вышеуказанных областях.

Основная часть задачи заключается в решении нестационарного уравнения Шредингера для электрона, находящегося в кулоновском поле атомного ядра и осциллирующем поле (1). Именно здесь и будут использованы некоторые модельные представления, позволяющие получить выражение для волновой функции, используя которое можно найти плотность тока и индуцируемое им электромагнитное поле, а следовательно, и гармоники частоты внешнего поля излучения. Поскольку туннелированием атомного электрона пренебрегается, в отличие от работы [4], то рассмотренное явление следует считать проявлением нелинейной поляризации атома в сильном электромагнитном поле.

Волновая функция электрона в водородоподобном атоме, находящемся в сильном электромагнитном поле

Будем считать, что ядро водородоподобного атома (бесконечно большой массы) с зарядом $Z|e|$ находится в начале декартовой системы координат $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$, а ось \tilde{z} направлена вдоль напряженности внешнего поля (1). Внешнее поле считаем сильным, а движение электрона одномерным, и поэтому взаимодействие поля с атомным электроном в уравнении Шредингера запишем в виде потенциальной энергии — $|e|\tilde{z}\tilde{\varepsilon}\cos(\omega\tilde{t} + \alpha)$. Тогда в безразмерных параболических координатах (удобных для анализа задачи) $\frac{\tilde{x}}{a} = x = \sqrt{\xi\eta}\cos\varphi$;
 $\frac{\tilde{y}}{a} = y = \sqrt{\xi\eta}\sin\varphi$; $\frac{\tilde{z}}{a} = z = \frac{1}{2}(\xi - \eta)$ уравнение Шредингера для волновой функции $\tilde{\psi}$ имеет вид [7]:

$$i\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial t} = -\frac{4}{\xi + \eta} \left[\frac{\partial}{\partial\xi} \xi \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\eta} \eta \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\eta} \right] - \frac{1}{\xi\eta} \frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial\phi^2} - \frac{4}{\xi + \eta} \tilde{\psi} - \varepsilon(\xi - \eta)\tilde{\psi}(\xi, \eta, \phi, t) \times \cos(\Omega t + \alpha), \quad (3)$$

где $\varepsilon = (a^2 / (Z|e|))\tilde{\varepsilon}$;

$\gamma t = \tilde{t}$ — время, с;

$\gamma = 2\hbar^3 / (Z^2 e^4 m_e)$ — атомный масштаб времени.

Отметим, что переменные и параметры ξ, η, t и ε , а также $\Omega = \gamma\omega$ есть безразмерные величины.

Решение уравнения (3) ищем в виде

$$\tilde{\psi}(\xi, \eta, \phi, t) = \psi_\lambda(\xi, \eta) T_\lambda(\xi, \eta, t) e^{-i\lambda t} e^{im\varphi}. \quad (4)$$

Исходим из того, что величина $\hbar\omega$ значительно меньше энергии электрона в стационарном состоянии и поэтому частота $\Omega \ll 1$. Следовательно, движение электрона будет в некотором смысле представлять суперпозицию движений в кулоновском поле и в слабоменяющемся потенциале внешнего поля. В выражении (4) функция $\psi_\lambda(\xi, \eta)$ будет определять движение в кулоновском поле (с временным множителем) $e^{-i\lambda t}$, а $T_\lambda(\xi, \eta, t)$ — отражать модуляцию этого движения, вызванное внешним полем.

Подставляя (4) в (3), находим известное уравнение [7]

$$\begin{aligned} \lambda \psi_\lambda T_\lambda + i \psi_\lambda \frac{\partial T_\lambda}{\partial t} = & \left\{ -\frac{4}{\xi + \eta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial \xi} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial}{\partial \eta} \eta \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial \eta} \right] + \left(\frac{m^2}{\xi \eta} - \frac{4}{\xi + \eta} \right) \psi_\lambda \right\} T_\lambda + \\ & + \left\{ -\frac{4}{\xi + \eta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial T_\lambda}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \eta \frac{\partial T_\lambda}{\partial \eta} \right] - \right. \\ & \left. - \varepsilon (\xi - \eta) T_\lambda (\xi, \eta, t) \cos(\Omega t + \alpha) \right\} \psi_\lambda - \\ & - \frac{4}{\xi + \eta} 2 \left[\xi \frac{\partial T_\lambda}{\partial \xi} \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial T_\lambda}{\partial \eta} \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial \eta} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Исходя из вышеизложенного, приравняем в последнем уравнении первое слагаемое (слева) к первой фигурной скобке, а второе слагаемое к остальным слагаемым в правой части. Первое уравнение будет содержать только ψ_λ :

$$\begin{aligned} -\frac{4}{\xi + \eta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \eta \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial \eta} \right] + \\ + \left(\frac{m^2}{\xi \eta} - \frac{4}{\xi + \eta} \right) \psi_\lambda = \lambda \psi_\lambda. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнение (6) совпадает со стационарным уравнением Шредингера в параболических координатах для водородоподобного атома [7] и решается точно, как для $\lambda > 0$ – непрерывного спектра, так и для дискретного спектра ($\lambda < 0$).

Уравнение для функции T_λ имеет вид

$$\begin{aligned} i \frac{\partial T_\lambda}{\partial t} = -\frac{4}{\xi + \eta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial T_\lambda}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \eta \frac{\partial T_\lambda}{\partial \eta} \right] - \\ - \varepsilon (\xi - \eta) T_\lambda (\xi, \eta, t) \cos(\Omega t + \alpha) - \\ - \frac{8}{\xi + \eta} \frac{1}{\psi_\lambda} \left[\xi \frac{\partial T_\lambda}{\partial \xi} \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial T_\lambda}{\partial \eta} \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial \eta} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Рассмотрим частный случай этого уравнения, соответствующий нормальному (основному) стационарному состоянию водородоподобного атома, когда $\psi_\lambda = (1/\sqrt{\pi}) e^{-\frac{\xi + \eta}{2}}$, а $\lambda = -1$.

Подставляя эту функцию в (7), получим

$$\begin{aligned} i \frac{\partial T_\lambda}{\partial t} = -\frac{4}{\xi + \eta} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial T_\lambda}{\partial \xi} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial}{\partial \eta} \eta \frac{\partial T_\lambda}{\partial \eta} \right] - \xi \frac{\partial T_\lambda}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial T_\lambda}{\partial \eta} \right\} - \\ - \varepsilon (\xi - \eta) T_\lambda (\xi, \eta, t) \cos(\Omega t + \alpha). \end{aligned} \quad (8)$$

В уравнение (8) не входит сферически симметричная кулоновская энергия взаимодействия $2/(\xi + \eta)$,

а последнее слагаемое из пространственных координат зависит только от z . Все это делает более удобным решение уравнения (8) в цилиндрических координатах (что, впрочем, можно было делать с самого начала, но параболические координаты в атомной физике более привычны [7]).

Учитывая, что $\frac{\partial T_\lambda}{\partial \varphi} = 0$, можем записать

$$\frac{4}{\xi - \eta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial T_\lambda}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \eta \frac{\partial T_\lambda}{\partial \eta} \right] = \Delta T_\lambda, \quad (9)$$

$$\xi \frac{\partial T_\lambda}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial T_\lambda}{\partial \eta} = x \frac{\partial T_\lambda}{\partial x} + y \frac{\partial T_\lambda}{\partial y} + z \frac{\partial T_\lambda}{\partial z} = \vec{r} \frac{\partial T_\lambda}{\partial \vec{r}}. \quad (10)$$

Подставляя (9) и (10) в (8), получим

$$\begin{aligned} i \frac{\partial T_\lambda}{\partial t} = -\Delta T_\lambda + 2 \frac{\vec{r}}{r} \frac{\partial T_\lambda}{\partial \vec{r}} - \\ - 2z\varepsilon T_\lambda (\vec{r}, t) \cos(\Omega t + \alpha). \end{aligned} \quad (11)$$

Очевидно, что внешнее поле будет заметно влиять на движение электрона в атоме только при больших (по модулю) значениях z : $|z| \gg 1$, в то время как $r_\perp = \sqrt{x^2 + y^2}$ — поперечное расстояние от ядра до электрона считаем достаточно малым: $r_\perp \lesssim 1$. Используя эти представления, будем рассматривать T_λ при больших значениях $|z|$. Решение такой задачи облегчается тем, что при $|z| \gg 1$ входящее в (11) выражение

$$\frac{\vec{r}}{r} \frac{\partial T_\lambda}{\partial \vec{r}} \approx \frac{z}{|z|} \frac{\partial T_\lambda}{\partial z} = k \frac{\partial T_\lambda}{\partial z},$$

где $k = 1$, если $z \gg 1$, и $k = -1$, если $z \ll -1$.

Нетрудно заметить, что в этом случае уравнение (11) позволяет считать T_λ функцией только z и t и его записать в виде

$$\begin{aligned} i \frac{\partial T_\lambda}{\partial t} = -\frac{\partial^2 T_\lambda}{\partial z^2} + 2k \frac{\partial T_\lambda}{\partial z} - \\ - 2z\varepsilon T_\lambda (z, t) \cos(\Omega t + \alpha) \end{aligned} \quad (12)$$

как для положительных, так и отрицательных значений z .

Уравнение (12) имеет точное решение

$$\begin{aligned} T_\lambda = T_{0\lambda} \exp \left\{ i \left[\frac{2\varepsilon z}{\Omega} \sin \tau - \frac{2\varepsilon^2}{\Omega^3} \left(\tau - \frac{1}{2} \sin 2\tau \right) \right] - \right. \\ \left. - \frac{2k\varepsilon}{\Omega^2} \cos \tau \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

где для краткости введено обозначение $\tau = \Omega t + \alpha$.

В результате для волновой функции электрона имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} = \frac{A}{\sqrt{\pi a^3}} \exp \left\{ i \left[\frac{2\varepsilon z}{\Omega} \sin \tau - \frac{2\varepsilon^2}{\Omega^3} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\tau - \frac{1}{2} \sin 2\tau \right) - \lambda t \right] - \frac{4k\varepsilon}{\Omega^2} \cos \tau - r \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

где A — нормировочная постоянная, зависящая от ε и Ω , но не зависит от времени.

Здесь необходимо сделать следующие замечания. Волновая функция в виде выражения (14), не содержащая осциллирующего множителя перед слагаемым с iz и поэтому не описывающая туннельную ионизацию атома, была предопределена распределением слагаемых в уравнении (5), приведшим к множителю $\psi_\lambda \sim e^{-r}$, тем самым неявным образом накладываясь уже не только вышеупомянутое ограничение на амплитуду внешнего поля ε , но и на его частоту ω снизу. Она должна быть значительно больше вероятности в единицу времени “просачивания” атомного электрона через потенциальный барьер кулоновского и внешнего поля: $\omega \gg \omega$, где [7, § 77]

$$w = \frac{4m_e^3 |e|^9}{\hbar^7 \varepsilon} \exp \left(-\frac{2m^2 |e|^5}{3\hbar^4 \varepsilon} \right). \quad (15)$$

Ниже условие (15) считается выполненным.

Индукцированный в атоме ток и электромагнитное излучение

Подставляя (14) в выражение для плотности тока

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m_e} \left[\tilde{\psi} \nabla \psi^* - \tilde{\psi}^* \nabla \psi \right],$$

получим:

$$\vec{j} = \left(0, 0, \frac{2\hbar |A|^2}{\pi m_e a^4} \frac{\varepsilon}{\Omega} \exp \left(-\frac{8k\varepsilon}{\Omega^2} \cos \tau - 2r \right) \sin \tau \right). \quad (16)$$

Нетрудно проверить, что для (14) и (16) выполняется уравнение непрерывности с той же точностью, что и уравнение (12):

$$\frac{\partial |\tilde{\psi}|^2}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (17)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial j_z}{\partial z} &= -\frac{4\hbar |A|^2}{\pi m_e a^5} \frac{z}{r} \frac{\varepsilon}{\Omega} \exp \left(-\frac{8k\varepsilon}{\Omega^2} \cos \tau - 2r \right) \sin \tau \approx \\ &\approx -\frac{4\hbar |A|^2}{\pi m_e a^5} k \frac{\varepsilon}{\Omega} \exp \left(-\frac{8k\varepsilon}{\Omega^2} \cos \tau - 2r \right) \sin \tau; \\ \frac{\partial |\tilde{\psi}|^2}{\partial t} &= \frac{4\hbar |A|^2}{\pi m_e a^5} k \frac{\varepsilon}{\Omega} \exp \left(-\frac{8k\varepsilon}{\Omega^2} \cos \tau - 2r \right) \sin \tau. \end{aligned}$$

Сумма этих величин дает нуль, т. е. выполняется условие (17), что и следовало ожидать.

Подставляя (13) в (11) или (14) в (5), получим выражение

$$\frac{2}{\Omega} \left[\frac{z}{r} - k \right] \frac{\partial T_\lambda}{\partial z},$$

из условия пренебрежения которого следует неравенство $z > 1/\sqrt{2\Omega} \gg 1$, что ниже считается выполненным. Однако заметим, что для определения плотности тока в выбранном приближении это несущественно из-за множителя $\exp(-r)$, который обращает $\tilde{\psi}$ практически в нуль в области $r \approx z \gg 1$.

Нормировочная постоянная A должна определяться из соотношения

$$\begin{aligned} 1 = \iint_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x} d\tilde{y} \left\{ \int_{-\infty}^{-ab} d\tilde{z} |\tilde{\psi}|^2 + \int_{ab}^{\infty} d\tilde{z} |\tilde{\psi}|^2 \right\} + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \int_{-ab}^{ab} dz |\tilde{\psi}|^2 \equiv J, \end{aligned}$$

где $b > 1$.

При подстановке (14) в это выражение мы не сможем взять последний интеграл

$$J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \int_{-ab}^{ab} dz |\tilde{\psi}|^2, \text{ так как вблизи ядра вид}$$

$\tilde{\psi}$ нам неизвестен.

Как уже отмечалось, при движении электрона вблизи атомного ядра, т. е. в области $\tilde{r} \leq a$, основное влияние на него будет оказывать кулоновское поле. Следовательно можно ожидать, что индуцированная внешним полем плотность тока пренебрежимо мала в этой области по сравнению с ее величиной на расстояниях $\tilde{r} \gg a$. Это утверждение можно обосновать и иначе.

Как следует из условия нормировки, переменные части интегралов от $|\tilde{\psi}|^2$ вблизи ядра и в области пространства при $\tilde{r} > a$ должны быть по модулю одинаковыми (но, конечно, противоположного знака в один и тот же момент времени) так же, как и их производные по времени, но тогда должны быть приблизительно одинаковыми в этих областях пространства и значения дивергенции от

плотности тока. Эта величина имеет порядок, равный отношению плотности тока к характерному размеру области пространства, в которой она определяется, а так как размеры рассматриваемых областей сильно различаются, то, по-видимому, индуцированная внешним полем плотность тока вблизи ядра будет значительно меньше, чем при $\tilde{r} \gg a$. В этом случае нетрудно провести усреднение выражения (16), что приводит к приближенной формуле

$$j_{ez} \approx -\frac{e^2 n \tilde{\epsilon}}{m_e \omega} |A|^2 ch \left(\frac{8\epsilon}{\Omega^2} \cos \tau \right) \sin \tau. \quad (18)$$

В выражении (18) мы оставили величину $|A|^2$ неопределенной и, кроме того, здесь нам удобно использовать как обычные единицы, так и кулоновские. Знак "минус" появляется из-за выбора направления (при $\tau = 0$) напряженности внешнего поля против оси \tilde{z} (потенциальная энергия дана выражением $-|e| \tilde{z} \tilde{\epsilon} \cos \tau \equiv e \tilde{z} \tilde{\epsilon} \cos \tau$, а не $-e \tilde{z} \tilde{\epsilon} \cos \tau$, которое обычно используется).

Выражение (18) нетрудно разложить в ряд Фурье:

$$j_{ez} = ea\omega |A|^2 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) I_{2n+1} \left(\frac{2|e|\tilde{\epsilon}}{m_e a \omega^2} \right) \times \sin[(2n+1)(\omega \tilde{t} + \alpha)], \quad (19)$$

где $I_{2n+1}(8\epsilon/\Omega^2)$ — модифицированная функция Бесселя.

Из формулы (19) следует, что в рамках выбранного приближения генерируются только нечетные гармоники, так же, как и при упругих и неупругих столкновениях электронов в ионизованном газе [1, 2] и при туннелировании электрона атома во внешнем поле [4], причем, максимальный номер гармоники определяется превышением аргумента функции Бесселя над ее порядковым номером, т. е. $2n_{\max} + 1 = 2e\tilde{\epsilon}/m_e a \omega^2$, или, что то же самое, превышением длины осцилляций электрона в поле над атомным размером.

Выпишем выражения для отношений амплитуд гармоник индуцированного электромагнитного поля. В соответствии с уравнениями электродинамики [8] выражение для векторного потенциала \vec{A} в волновой зоне и дипольном приближении (т. е. при пренебрежении временем запаздывания внутри объема, занимаемого атомарным водородом) в ранее выбранной системе координат, имеет вид

$$A_x = 0; \quad A_y = 0;$$

$$A_z = \frac{1}{cR} \iiint_V j_{ez} d^3 \tilde{r} = -\frac{e^2 \tilde{\epsilon}}{m_e c R \omega} |A|^2 \times ch \left(\frac{8\epsilon}{\Omega^2} \cos \tau \right) \sin \tau = \frac{ea\omega}{cR} |A|^2 \sum_{n=0}^{\infty} (2l+1) \times I_{2n+1} \left(\frac{2|e|\tilde{\epsilon}}{m_e a \omega^2} \right) \sin[(2n+1)(\omega \tilde{t} + \alpha)],$$

где c — скорость света;

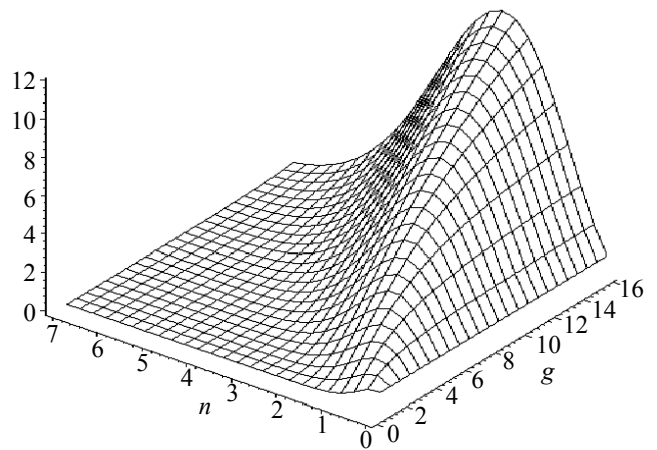
R — расстояние от выбранного объема газа до точки наблюдения поля.

Напряженности магнитного \vec{H} и электрического \vec{E} полей даются формулами: $\vec{H} = \frac{1}{c} [\dot{\vec{A}}, \vec{n}]$, где \vec{n} — единичный вектор в направлении \vec{R} ; "точка" означает дифференцирование по \tilde{t} ; $\vec{E} = [\vec{H}, \vec{n}]$ (значения полей \vec{E} и \vec{H} соответствуют моменту времени $\tilde{t} - R/c$).

Дифференцируя A_z по времени, находим, что отношение амплитуд гармоник индуцированного поля (($2n+1$)-ной к основной с $n=0$) определяется выражением

$$F = \frac{(2n+1)^2 I_{2n+1}(2|e|\tilde{\epsilon}/m_e a \omega^2)}{I_1(2|e|\tilde{\epsilon}/m_e a \omega^2)}.$$

Используя программу MAPLE 10, нетрудно построить поверхность F как функцию n и аргумента $g = 8\epsilon/\Omega^2$ модифицированной функции Бесселя (рисунок).



Поверхность F при значениях $8 \epsilon/\Omega^2 = g \in (0,16)$ и $n \in (0,7)$

Из вида этой поверхности следует, что при значениях g порядка двух, трех гармоника с утроенной частотой имеет амплитуду больше, чем гармоника, индуцированная с основной частотой (из-за множителя $(2n+1)^2$). При дальнейшем увели-

чении n (с тем же значением g) амплитуды быстро уменьшаются, так как при заданном аргументе $I_s(g)$ стремится к нулю быстрее, чем $\exp(-s)$ (при s , стремящейся к бесконечности), однако с ростом g такое убывание начинается с больших n , т. е. максимум кривой $F(n, g = \text{const})$ смещается в область больших значений n .

Обсуждение результатов

Сравнивать полученные результаты с результатами работ [1, 2] по генерации гармоник поля в плазме при упругом и неупругом рассеянии электронов во внешнем высокочастотном поле некорректно, поскольку рассмотренный здесь механизм излучения относится к связанному электрону. Он полностью определяется током, индуцированным в атоме внешним полем.

Полученные в настоящей работе результаты скорее можно сравнить с результатами работы [4], в которой находится индуцированный внешним полем дипольный момент атома. В этой работе используется теория возмущений при малых параметрах отношения амплитуды внешней волны к атомному полю и частоты волны к атомной частоте. Эти же параметры считаются малыми в настоящей работе. Между тем найденная волновая функция (14) существенно отличается от функции, описывающей движение электрона в поле плоской монохроматической волны, так как учитывает влияние на движение электрона поля ядра атома.

В работе [4] это отличие слабое. Тем не менее, авторы распространяют свои вычисления на лазерные интенсивности, соответствующие плотностям мощности вплоть до 10^{15} — 10^{16} Вт/см². В таких полях вероятность полевой ионизации атома становится сравнимой и даже больше частоты лазерного излучения, которая и учитывается в подавляющем числе работ, представленных в обзоре [4].

Для максимального номера гармоники авторы дают численную оценку $n_{\max} \approx \frac{3U_p + I_p}{h\omega}$, где

U_p — энергия осцилляции электрона в поле волны, а I_p — потенциал ионизации атома. При $U_p = 3I_p$ имеем $n_{\max} \approx 100$.

В настоящей работе, как уже отмечалось выше, максимальный номер генерируемой атомом гармоники поля определяется превышением аргумента функции Бесселя, входящей в формулу (19), над ее порядковым номером $2n_{\max} + 1 = g \approx \frac{l}{a}$, т. е. определяется отношением среднего расстояния, пройденного электроном в поле волны, к размеру атома. На рисунке приведены отношения n -й гар-

моники генерируемого поля к основной. Из них явно видно наличие максимального номера генерируемой гармоники, которая определяется равенством $2n_{\max} + 1 = g$.

В настоящее время в экспериментах достижимы значения $\tilde{\epsilon}$ порядка 10^7 — 10^9 СГСЭ на частотах $\omega = 2 \cdot 10^{15}$ с⁻¹ (что соответствует плотностям мощности 10^{17} — 10^{21} Вт/см²). Для таких величин параметр $\frac{\epsilon}{\Omega^2} = \frac{|e|}{4m_e} \frac{1}{a} \frac{\tilde{\epsilon}}{\omega^2}$ лежит в интервале от

66Z до 6600Z. Отношение энергии осцилляций к потенциалу ионизации атома при этом много больше единицы, и туннельная ионизация становится определяющей.

В рамках изложенной здесь теории можно ожидать, что соответствие с результатами эксперимента будет иметь место при той же частоте и величине амплитуды напряженности внешнего поля $\tilde{\epsilon} = 3 \cdot 10^5$ СГСЭ, т. е. при $\frac{\epsilon}{\Omega^2} = 2,2Z$ (или плотности мощности $\leq 10^{14}$ Вт/см²). В этих условиях даже при $Z = 10$ можно ожидать генерацию гармоник до $n_{\max} \leq 10$. Естественно, более интересной для рассматриваемого случая является низкая частота, например частота СО₂-лазера, т. е. $\omega = 2 \cdot 10^{14}$ с⁻¹. При тех же (и даже на порядок меньших) полях в этом случае можно ожидать излучения более высоких гармоник.

Следует отметить, что близкая к исследованной нами задаче была рассмотрена в работе [9], но в ней, однако, не приведены вычисления, а даются только графики. Кроме того, рассмотрены другие области параметров: частота $\omega \approx \omega \cdot 10^{18}$ с⁻¹, плотность мощности падающего излучения $\geq 10^{19}$ Вт/см², генерируются гармоники до номера $n \leq 20$, выше которого происходит резкий завал. Приведенные в этой работе результаты хорошо согласуются с вычисленными по нашим формулам.

Заключение

Рассмотренный механизм генерации гармоник частоты внешнего сильного высокочастотного поля является так же, как и в работе [4], следствием нелинейной поляризации атома в таком поле.

Л и т е р а т у р а

1. Силин В. П. Генерация гармоник СВЧ-поля в полностью ионизованной плазме при упругом рассеянии электронов на ионах// ЖЭТФ. 1963. Т. 47. С. 2254.

2. Кузелев М. В., Рухадзе А. А. Генерация гармоник лазерного излучения в процессе ионизации газа// Квантовая электроника. 2007. Т. 37. № 10. С. 924.

3. Pukhov A. Strong field interaction of laser radiation// Rep. Prog. Phys. 2003. V. 66. P. 47—101.

4. Lewenstein M., Balkou Ph., Ivanov M. et al. Theory of high-harmonic generation by low-frequency laser fields// Phys. Rev. A. 1994. V. 49. P. 2117—2132.

5. Ehlotzky F., Jaron A., Kaminski J. Z. Electron-atom collisions in a laser field// Physics Reports. 1998. No. 297. P. 63—153.

6. Попов В. С. Туннельная и многофотонная ионизация атомов и ионов в сильном лазерном поле (теория Келдыша)// УФН. 2004. Т. 174. С. 921.

7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. — М.: Наука, 1974.

8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — М.: Наука, 1988.

9. Hu S. X. et al.// Physical Review A. 1998. V. 64. P. 013410.

Статья поступила в редакцию 25 ноября 2008 г.

The induced emission of a hydrogen like atom in monochromatic electric field

V. I. Krylov

Fareast State University, Khabarovsk, Russia

E-mail: boss@khspu.ru

A. A. Rukhadze

Prokhorov General Physics Institute of RAS, Moscow, Russia

Starting from the behavior of a nonstationar problem electron wave function the electron current density in hydrogen like atom in external strong homogeneous monochromatic field is determined. It was shown the electromagnetic field stimulated by atomic electron significantly can differ from monochromatic one and contain high odd harmonics of the frequency of external field. Such mechanism of harmonic generation differ from the mechanism of stipulated by atomic electron tunneling and dominate when the last is impossible. It can be considered as a result of nonlinear atom polarization in a strong high frequency electric field.

PACS: 41.20.-q

УДК 537.531: 621.373: 537.567

Частичная когерентность излучения электронного сгустка

М. А. Горбунов, А. Н. Лебедев

Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия

E-mail: lebedev@sci.lebedev.ru, ujh@mail.ru

Рассмотрена модель релятивистского сгустка излучателей с заданной пространственной неопределенностью. Обсуждены вопросы когерентного излучения, связанные с временной и пространственной когерентностью излучателей. Рассчитанные спектрально-угловые характеристики позволяют судить о доли когерентного излучения относительно полных радиационных потерь сгустка. Представлены зависимости спектрально-угловых характеристик от плотности излучателей в сгустке, в том числе и при плотности излучателей один электрон на длину волны.

PACS: 41.75.-i

Введение

Физическая картина интерференции двух (реже многих) электромагнитных волн хорошо известна и сводится, как правило, к появлению интерференционных линий с увеличенной (или уменьшен-

ной) интенсивностью [1—4]. Эта же картина переносится на излучение дискретных источников, находящихся на упорядоченных расстояниях порядка длины волны излучения. Как правило, рассматриваются два предельных случая.