УДК 537.533

# ГЕОМЕТРИЗОВАННАЯ ТЕОРИЯ ТОНКИХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ

*В. А. Сыровой*
Всероссийский электротехнический институт, Москва, Россия

***Обсуждается возможность построения теории пространственных приповерхностных течений, основанной на геометризованных уравнениях пучка. Построена теория пространственных параксиальных релятивистских потоков при произвольной ориентации магнитного поля на катоде, имеющая предметом исследования ситуации, которые не могут быть описаны традиционной параксиальной теорией.***

Построение теории узких пространственных потоков, локализованных вблизи заданной поверхности или пространственной кривой, на основе геометризованной теории представляет собой естественный шаг после исследования осесимметричных течений [1—6]. Соображения, вытекающие из анализа асимптотических методов в механике жидкости [7] и результатов теории антипараксиальных разложений [8], приводят к мысли о целесообразности построения приближенных методов расчета электронного потока в системе, связанной с действительными характеристиками исходной системы дифференциальных уравнений. При прочих равных условиях подобный подход обеспечивает большую точность описания, что подтверждается первыми результатами тестирования на эталонных точных решениях. Последовательные приближения при описании тонких потоков в геометризованной постановке образуют ряд Тэйлора по поперечной координате, сходимость которого выгодно отличается от свойств асимптотического ряда по малому геометрическому параметру при традиционном рассмотрении. Она может быть еще более улучшена за счет применения нелинейных преобразований, в первую очередь, простейшего из них — преобразования Шенкса — в прикатодной области [8].

В работе используются стандартные тензорные обозначения и нормировки, принятые в [1]; нижний индекс после запятой означает частную производную по соответствующей координате.

## Уравнения пучка в системе, связанной с трубками тока

Рассмотрение в этом случае можно вести в системе, для которой поверхности $x^2 = \mathrm{const}$ являются трубками тока, $x^1$, $x^3$ определяют сетку на них, причем $x^1$ — продольная координата, а элемент $g_{13}$ метрического тензора $g_{ik}$ тождественно равен нулю.

Ковариантные проекции уравнения движения на оси $x^2$, $x^3$ и интеграл энергии имеют вид

$$\left[(1+\tilde\varphi)h_1u\right]_{,3}-\left[(1+\tilde\varphi)h_3w\right]_{,1}+\frac{\sqrt{g}}{h_2}M=0,$$

$$\frac{w}{h_3}\left\{\left[(1+\tilde\varphi)h_3w\right]_{,2}-\left[(1+\tilde\varphi)h_2\left(u\cos\theta_{12}+w\cos\theta_{23}\right)\right]_{,3}+\frac{\sqrt{g}}{h_1}L\right\}=$$

$$=\frac{u}{h_1}\left\{\left[(1+\tilde\varphi)h_2\left(u\cos\theta_{12}+w\cos\theta_{23}\right)\right]_{,1}-\left[(1+\tilde\varphi)h_1u\right]_{,2}+\frac{\sqrt{g}}{h_3}N\right\}, \tag{1}$$

$$1+\varphi=\frac{1}{\sqrt{1-\left(u^2+w^2\right)}},\quad \cos\theta_{ab}=\frac{g_{ab}}{h_ah_b}.$$

Здесь $g = \det g_{ik}, g_{aa} \equiv h_a^2, \theta_{ab}$ — угол между осями $x^a$, $x^b$; $u$, $w$ и $L$, $M$, $N$ — косоугольные проекции скорости $\bar v$ и напряженности магнитного поля $\bar H$, связанные с контравариантными составляющими соотношениями вида $u = v^1/h_1$; $\varphi$ — потенциал; тильдой отмечены релятивистские члены, исчезающие при переходе к случаю малых скоростей.

Уравнение Пуассона для $\varphi$ и уравнения Максвелла для $\bar H$, а также уравнение сохранения тока запишутся следующим образом:

$$\left(\sqrt{g}g^{ik}\varphi_{,k}\right)_{,i}=\sqrt{g}\rho,\quad \left(\frac{1}{h_1}\sqrt{g}\rho\, u\right)_{,1}+\left(\frac{1}{h_3}\sqrt{g}\rho\, w\right)_{,3}=0,$$

$$H_{3,2}-H_{2,3}=\frac{1}{h_1}\sqrt{g}\rho\, u,\quad H_{1,3}-H_{3,1}-0, \tag{2}$$

$$H_{2,1}-H_{1,2}=\frac{1}{h_3}\sqrt{g}\widetilde{\rho w},\quad \left(\sqrt{g}H^i\right)_{,i}=0.$$

Уравнения (1), (2) дополняются шестью условиями эвклидовости пространства

$$R_{iklm}=0, \tag{3}$$

представляющими собой уравнения второго порядка относительно $g_{ik}$.

Помимо уравнений движения (1), нам потребуется контравариантная проекция на ось $x^2$:

$$\nu^k u^\lambda \Gamma^2_{\lambda k} = g^{2k}\left(\varphi_{,k} + e_{ljk}\nu^l H^j\right), \quad u^\lambda = (1+\tilde{\varphi})\nu^\lambda. \tag{4}$$

Уравнение (4) позволяет вычислить комбинацию

$$\sqrt{g}\, g^{2k}\varphi_{,k} = h_3 w H_1 - h_1 u H_3 - (1+\tilde{\varphi}) h_1 h_3 B_{\alpha\beta}\nu^\alpha \nu^\beta. \tag{5}$$

Здесь $B_{\alpha\beta}$ — коэффициенты второй квадратичной формы базовой поверхности (греческие индексы принимают значения 1, 3), выражаемые через вектор единичной нормали $\nu^i$ и метрику посредством соотношений ($\Gamma_{i,mn}$ — символы Кристоффеля):

$$B_{\alpha\beta} = -x^i{}_{,\alpha}\left(g_{ij}\nu^j + \Gamma_{i,mn}\nu^m x^n_{,\beta}\right) = -g_{\alpha j}\nu^j_{,\beta} - \Gamma_{\alpha,m\beta}\nu^m. \tag{6}$$

Для $\nu_i$, $\nu_j$ имеем:

$$\nu_1 = 0, \nu_2 = -\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{G}}, \ \nu_3 = 0, \nu^1 = g^{12}\nu_2, \ \ \nu^2 = g^{22}\nu_2, \ \ \nu^3 = g^{23}\nu_2,$$

$$G_{\alpha\beta} = \begin{Vmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{33} \end{Vmatrix}, \quad G = \det G_{\alpha\beta}, \quad \sqrt{g} = h_1 h_2 h_3\sqrt{\delta}, \quad \delta = 1 - \cos^2\theta_{12} - \cos^2\theta_{23}. \tag{7}$$

С учетом (6), (7) для $B_{\alpha\beta}$ получаем следующие формулы:

$$B_{11} = \frac{h_1}{h_2\sqrt{\delta}}\left[h_{1,2} - \left(\frac{g_{12}}{h_1}\right)_{,1} - \frac{g_{23}}{g_{33}}h_{1,3}\right],$$

$$B_{13} = -\frac{1}{2}\frac{1}{h_2\sqrt{\delta}}\left[g_{11}\left(\frac{g_{12}}{g_{11}}\right)_{,3} + g_{33}\left(\frac{g_{23}}{g_{33}}\right)_{,1}\right], \tag{8}$$

$$B_{33} = \frac{h_3}{h_2\sqrt{\delta}}\left[h_{3,2} - \left(\frac{g_{23}}{h_3}\right)_{,3} - \frac{g_{12}}{g_{11}}h_{3,1}\right].$$

Главные кривизны $k_1$, $k_2$ трубки тока $x^2 = \mathrm{const}$ являются корнями уравнения

$$k^2 - G_{\alpha\beta}B^{\alpha\beta}k + \frac{B}{G} = 0, \qquad B = \det B_{\alpha\beta}. \tag{9}$$

## Соотношение на трубке тока и уравнение для $u_{,2}$

Соотношение на трубке тока, не содержащее не исключаемых производных по $x^2$, получается, если в уравнение Пуассона

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{g}\,g^{2k}\varphi_{,k}\right)_{,2} = \sqrt{g}\rho - \left[\sqrt{g}\left(g^{11}\varphi_{,1}+g^{12}\varphi_{,2}+g^{13}\varphi_{,3}\right)\right]_{,1} - \\ -\left[\sqrt{g}\left(g^{13}\varphi_{,1}+g^{23}\varphi_{,2}+g^{33}\varphi_{,3}\right)\right]_{,3}\end{aligned} \tag{10}$$

подставить выражение (5) в виде комплекса в левой части и это же выражение, разрешенное относительно $\varphi_{,2}$, — в правой. Уравнения (3) используются для исключения $g_{11,22}$, $g_{11,23}$, $g_{12,23}$, $g_{23,23}$ (соответственно, $R_{1221} = R_{2113} = R_{1223} = R_{2332} = 0$). В результате соотношение на трубке тока можно интерпретировать как уравнение в частных производных для $g_{22}$.

Успех при построении метода узких полос в [2] был основан на представлении уравнений пучка в виде соотношения на трубке тока, имевшего вид обыкновенного дифференциального уравнения относительно $g_{22}$, и системы эволюционных уравнений первого порядка по поперечной координате $x^2$ для всех физических и геометрических параметров потока.

В пространственном случае уравнение для $u_{,2}$ получим, продифференцировав первое уравнение (1) по $x^2$, чтобы найти $w_{,21}$, а затем исключим эту величину из второго уравнения (1), продифференцированного по $x^1$. Возникшее в результате соотношение представляет собой на трубке тока линейное уравнение в частных производных первого порядка относительно $u_{,2}$, которое можно проинтегрировать лишь в осесимметричном случае за счет существования дополнительного интеграла движения.

Таким образом, построение теории пространственных приповерхностных пучков в рамках последовательного геометризованного формализма представляется неосуществимым.

Определенные надежды на описание приповерхностных течений в произвольно ориентированном магнитном поле можно связывать с введением заданной неортогональной системы, чья неортогональность обусловлена этой произвольной ориентацией в соответствии с результатами геометризованной теории.

## Уравнения пучка в системе, связанной с траекториями

Уравнения, аналогичные по смыслу системе (1), имеют вид

$$\left[(1+\tilde{\varphi})h_1 u\right]_{,2} = \left[(1+\tilde{\varphi})\frac{g_{12}u}{h_1}\right]_{,1} + \sqrt{g}H^3,$$

$$\left[(1+\tilde{\varphi})h_1 u\right]_{,3} = \left[(1+\tilde{\varphi})\frac{g_{13}u}{h_1}\right]_{,1} - \sqrt{g}H^2, \qquad (11)$$

$$1+\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Уравнения поля из системы (2) запишутся следующим образом:

$$\left(\sqrt{g}g^{ik}\varphi_{,k}\right)_{,i} = \sqrt{g}\rho, \quad \frac{1}{h_1}\sqrt{g}\rho u = h_{20}\, h_{30}\, J, \qquad (12)$$

$$H_{3,2} - H_{2,3} = \frac{1}{h_1}\sqrt{g}\widehat{\rho u}, \quad H_{1,3} = H_{3,1}, \quad H_{1,2} = H_{2,1}, \left(\sqrt{g}H^i\right)_{,i} = 0.$$

Здесь $J$ — плотность тока эмиссии, нижний индекс ноль относится к катоду.

Контравариантные проекции уравнения движения на оси $x^2$, $x^3$ дают следующие выражения для комплексов с производными от потенциала

$$g^{2k}\varphi_{,k} = \frac{(1+\tilde{\varphi})u^2}{h_1^2}\Gamma_{11}^2 + \frac{\sqrt{g}u}{h_1}\left(g^{22}H^3 - g^{23}H^2\right), \qquad (13)$$

$$g^{3k}\varphi_{,k} = \frac{(1+\tilde{\varphi})u^2}{h_1^2}\Gamma_{11}^3 + \frac{\sqrt{g}u}{h_1}\left(g^{23}H^3 - g^{33}H^2\right).$$

Соотношения (13) могут быть разрешены относительно поперечных производных потенциала, выражения для которых необходимо дополнить условием их совместности

$$\varphi_{,2} = \frac{(1+\tilde{\varphi})u^2}{h_1}\gamma_2 + \frac{g_{12}}{h_1^2}\varphi_{,1} + \frac{\sqrt{g}uH^3}{h_1};$$

$$\varphi_{,3} = \frac{(1+\tilde{\varphi})u^2}{h_1}\gamma_3 + \frac{g_{13}}{h_1^2}\varphi_{,1} - \frac{\sqrt{g}uH^2}{h_1}; \tag{14}$$

$$\gamma_2 \equiv \left(\frac{g_{12}}{h_1}\right)_{,1} - h_{1,2}, \quad \gamma_3 \equiv \left(\frac{g_{13}}{h_1}\right)_{,1} - h_{1,3}.$$

Связь декартовых координат $x$, $y$, $z$ с криволинейными $x^i$, если для каждой из криволинейных осей ввести углы $\vartheta$, $\psi$, определяющие их ориентацию в пространстве, сводится к соотношениям вида

$$x_{,1} = h_1 \cos\vartheta_1 \cos\Psi_1; \quad x_{,2} = h_2 \cos\vartheta_2 \cos\varphi_2; \quad x_{,3} = h_3 \cos\vartheta_3 \cos\Psi_3. \tag{15}$$

Условия совместности для уравнениий (15) и аналогичных уравнений относительно $y$, $z$ приводят к возникновению трех троек соотношений, из которых получаются уравнения эволюционной системы для $h_{1,2}$, $\vartheta_{1,2}$, $\Psi_{1,2}$; $h_{1,3}$, $\vartheta_{1,3}$, $\psi_{1,3}$; $h_{2,3}$, $\vartheta_{2,3}$, $\psi_{2,3}$.

Кривизна $k$ и кручение æ траектории могут быть выражены через метрику и, будучи заданными для оси пучка, дают две связи между элементами метрического тензора, например:

$$k^2 = \frac{1}{g_{11}} g^{\alpha\beta}\gamma_\alpha\gamma_\beta; \quad \alpha,\beta = 2,3. \tag{16}$$

## Соотношение на траектории и формулировка задачи параксиальной теории

Соотношение на траектории получается из уравнения Пуассона после исключения $\rho$ из его правой части, подстановки комплексов (13) в левую часть и использования уравнений (3):

$$\begin{gathered}
\frac{\sqrt{g}(1+\tilde{\varphi})u^2}{g_{11}}\left\{\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,11} - \left(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,1}\right)^2 - \frac{g_{11}}{g}\left(g_{22,1}g_{33,1} - g_{23,1}^2\right) - \right.\\
-\frac{1}{4}\frac{1}{g_{11}}g_{11,1}g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,1} - g_{11}g^{11}g^{\alpha\beta}\left(\frac{g_{1\alpha}}{h_1}\right)_{,1}\left(\frac{g_{1\beta}}{h_1}\right)_{,1} - h_1 g^{1\alpha}g^{\gamma\beta}\left(\frac{g_{1\gamma}}{h_1}\right)_{,1} g_{\alpha\beta,1} + \\
+\frac{h_1}{g}\left(g_{12,3} - g_{13,2}\right)\left[g_{13}\left(\frac{g_{12}}{h_1}\right)_{,1} - g_{12}\left(\frac{g_{13}}{h_1}\right)_{,1}\right] - \frac{g_{11}}{g}\left(g_{12,3}^2 + g_{13,2}^2 - g_{12,3}g_{13,2}\right) + \\
+\frac{2}{g}\left(g_{13}h_{1,2} - g_{12}h_{1,3}\right)\left[h_1\left(g_{13,2} - g_{12,3}\right) + g_{13}\gamma_2 - g_{12}\gamma_3\right] + \\
\left. +g_{11}g^{1\gamma}\left[\frac{1}{h_1}\left(\frac{g_{1\gamma}}{h_1}\right)_{,1}\right]_{,1} + \left(2 - \tilde{u}^2\right)k^2\right\} + \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\varphi_{,1}\right)_{,1} + \\
+\frac{H_1 u}{g_{11}}\left\{-2\frac{g_{12}g_{13}}{g_{11}}h_{1,1} - 3\left(g_{13}\gamma_2 - g_{12}\gamma_3\right) + g_{11}\left[\left(\frac{g_{12}}{h_1}\right)_{,3} - \left(\frac{g_{12}}{h_1}\right)_{,2}\right]\right\} - \\
-2u\left(H_2\gamma_3 - H_3\gamma_2\right) - 2\tilde{u}^2\frac{u}{g_{11}}\left\{\left[-\frac{g_{12}g_{13}}{g_{11}}h_{1,1} + g_{12}\gamma_3 - g_{13}\gamma_2\right]H_1 - \right.\\
\left. - g_{11}\left(H_2\gamma_3 - H_3\gamma_2\right)\right\} + \frac{\sqrt{g}}{(1+\tilde{\varphi})^3}\left[g^{ik}H_i H_k - \frac{H_1^2}{g_{11}}\right] = \frac{h_{20}h_{30}h_1 J}{u(1+\tilde{\varphi})^2}.
\end{gathered} \tag{17}$$

Изучены асимптотики, описывающие решение вблизи стартовой поверхности, которые не только позволяют удалиться от особенности при численном интегрировании, но и несут более важную смысловую нагрузку, так как помогают выявить произвольные элементы и связи между зависимыми величинами, которые необходимо знать для постановки задачи.

На оси пучка с учетом выполнения прикатодных асимптотик можно произвольно задать восемь функций продольной координаты $\varphi$, $L$, $M$, $N$, $g_{23}$, $g_{12}$, $g_{13}$, $\vartheta_3$. Упоминавшееся в связи с формулами (14) условие совместности и выражение для кручения æ служат для определения функций $g_{12,3}$, $g_{13,2}$, на оси; уравнение (15) — для вычисления $g_{33}$, уравнение (17) — для $g_{22}$, а $\vartheta_2$, $\psi_2$, $\psi_3$ получаются из формул, связывающих углы $\theta_{12}$, $\theta_{13}$, $\theta_{23}$ с шестью углами $\vartheta$, $\psi$. В точке старта мы можем распоряжаться одиннадцатью произвольными параметрами, в число которых входят главные кривизны $æ_1$, $æ_2$ катода, плотность тока эмиссии $J$, а также градиенты $\nabla h_{10}, \nabla (g_{23})_0, \nabla J, \nabla L_0$. Перечисленные параметры, в частности, однозначно определяют градиенты поперечных компонент магнитного поля $\nabla M_0, \nabla N_0$ на катоде в точке старта.

При традиционном подходе [9] пространственный параксиальный пучок описывается уравнениями в частных производных. Эти уравнения имеют точное решение в случае однородной деформации поперечного сечения, при которой плотность тока эмиссии оказывается однородной:

$$s = \alpha(\ell)\xi + \beta(\ell)\eta, \quad q = \mu(\ell)\xi + \nu(\ell)\eta. \tag{18}$$

Здесь $\ell$, $s$, $q$ — связанная с осью пучка система, причем $s$ направлена по нормали, $q$ — по бинормали к оси; $\xi$, $\eta$ — значения $s$, $q$ при $\ell = 0$.

Можно показать, что при геометризованном подходе однородная деформация сечения является законом, а не упрощающим предположением для параксиальных пучков с неоднородным распределением плотности тока по сечению. При этом

$$\begin{gathered}
\alpha = \frac{h_2 \cos\vartheta_2}{kZ'}\left[(Z'X'' - X'Z'')\cos\Psi_2 - (Y'Z'' - Z'Y'')\sin\Psi_2\right],\\
\beta = \frac{h_3 \cos\vartheta_3}{kZ'}\left[(Z'X'' - X'Z'')\cos\Psi_3 - (Y'Z'' - Z'Y'')\sin\Psi_3\right],\\
\mu = \frac{h_2 \cos\vartheta_2}{kZ'}\left(X''\sin\Psi_2 - Y''\cos\Psi_2\right),\\
\nu = \frac{h_3 \cos\vartheta_3}{kZ'}\left(X''\sin\Psi_3 - Y''\cos\Psi_3\right); \quad X' = \frac{dX}{d\ell}.
\end{gathered} \tag{19}$$

Здесь $x = X(\ell)$, $y = Y(\ell)$, $z = Z(\ell)$ — параметрические уравнения оси.

## Выводы

1. Синтез пространственных непараксиальных потоков, обобщающий алгоритмы теории осесимметричных течений, неосуществим из-за невозможности проинтегрировать уравнение в частных производных первого порядка для поперечной производной продольной скорости.

2. Теория пространственных параксиальных течений в геометризованной постановке основана на приближенном решении точных уравнений пучка в отличие от ее традиционного варианта, использующего точное решение приближенных уравнений в случае однородной плотности тока эмиссии при ограничениях на ориентацию магнитного поля на катоде.

3. Геометризованная теория пространственных параксиальных пучков описывает течения с градиентом плотности тока эмиссии при произвольной ориентации магнитного поля на эмитирующей поверхности и имеет те же преимущества по отношению к ранее известным моделям, которые сформулированы для геометризованной теории осесимметричных течений. Пучок описывается двумя обыкновенными дифференциальными уравнениями первого и второго порядков и рядом алгебраических соотношений. Однородная деформация поперечного сечения является общим законом для параксиальных потоков, не требующим каких-либо дополнительных предположений и не влекущим за собой ограничения общности.

**Литература**

1. Сыровой В. А.//Радиоэлектроника. 1996. Т. 41. № 10. С. 1255.
2. Сыровой В. А.//Там же. 1997. Т. 42. № 2. С. 220.
3. Сыровой В. А.//Там же. № 9.
4. Сыровой В. А.//Там же. № 3. С. 348.
5. Сыровой В. А.//Там же. № 12.
6. Сыровой В. А.//Там же. 1998. Т. 43.
7. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости.— М.: Мир, 1967.
8. Сыровой В. А.//Радиоэлектроника. 1988. Т. 33. № 8. С. 1706.
9. Данилов В. Н.//Журн. прикл. механики и техн. физики. 1968. № 5. С. 3.

## GEOMETRIZED THEORY OF THIN SPATIAL ELECTRON BEAMS

*V. A. Syrovoy*

All-Russian Electrotechnical Institute, Moscow, Russia

***The opportunity of construction of the theory of spatial beams adjoining to cathode based on the geometrized equations of a beam is discussed. The theory of spatial parallaxes relativistic beams is constructed with any orientation of a magnetic field on the cathode having by a subject researches of a situation, which cannot be described by the traditional parallaxes theory.***