

УДК 537.533

## ТЕСТИРОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЗОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ ПЛОТНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ

*А. В. Вашковский, Л. А. Неганова, В. А. Сыровой*

Всероссийский электротехнический институт, Москва, Россия

*Обсуждаются результаты тестирования геометризованных моделей на примере точного решения, описывающего плоский нерелятивистский поток со спирального катода по спиральным траекториям. Анализируются геометризованный вариант параксиальной теории первого и второго приближений; комбинированный вариант первого приближения для траекторий и более точного описания прикатодной области; метод узких полос при синтезе непараксиальных потоков.*

Геометризованная теория представляет собой раздел современной корпускулярной оптики, основанный на новой форме уравнений пучка [1]. Рассмотрение ведется в системе координат  $x^i$ , связанной с траекториями или трубками тока, которая заранее не известна и в общем случае неортогональна. К уравнениям пучка добавляются уравнения для метрического тензора  $g_{ik}$  — условия эвклидовости пространства — и уравнения, связывающие декартовы и криволинейные координаты.

Можно ожидать, что приближенные математические модели, основанные на геометризованных уравнениях, при прочих равных условиях будут иметь большую точность, чем известные асимптотические теории параксиальных и приповерхностных потоков, так как система координат  $x^i$  связана с действительными характеристиками исходной системы уравнений в частных производных. Помимо

сказанного, синтез непараксиальных потоков возможен лишь в рамках формализма геометризованной теории, равно как и рассмотрение узких пучков в общем случае релятивистских скоростей и произвольно ориентированного магнитного поля.

Алгоритмы геометризованной теории, эквивалентные параксиальным рассмотрениям, основаны на приближенных способах выделения узкого пучка из потока, описываемого точными уравнениями, в то время как при традиционном подходе рассматриваются приближенные уравнения, полученные из точных путем отбрасывания членов порядка  $\varepsilon^3$ ,  $\varepsilon^5$  и т. д., где  $\varepsilon$  — малый геометрический параметр. В результате при построении высших приближений в геометризованной теории возникает ряд Тэйлора по поперечной координате, сходимость которого выгодно отличается от свойств асимптотического ряда по  $\varepsilon$ . Действие с точными уравнениями имеет еще и то преимущество, что позволяет органично сочетать описание прикатодной области и протяженного потока, чего не удается добиться при традиционном подходе.

Так, параксиальная теория квазиаксиально-симметричных пучков (гладкая пространственная ось при круглом поперечном сечении) допускает неоднородное распределение плотности тока поперек пучка, однако такие потоки в рамках параксиальной теории не удастся привязать к термокатоду [2]. Кажется, что достаточно было бы рассчитать прикатодную область на основании теории антипараксиальных разложений [3] при неоднородной эмиссии и на некотором расстоянии от катода связать это решение с решением параксиальной теории. Однако потенциал на разделяющей две области поверхности, вычисленный от катода и от оси параксиального пучка, имеет разные значения. Даже если дисбаланс оказывается практически приемлемым, подобная модель оставляет чувство неудовлетворенности с точки зрения создания качественной теории.

В традиционной асимптотической теории тонких пучков за счет действия с приближенными уравнениями утрачена связь между формой оси или базовой поверхности, компонентами магнитного поля и градиентом плотности тока в точке старта. Попытка учесть эту информацию, основываясь на результатах теории антипараксиальных разложений [3], приводит к сужению возможных для рассмотрения физических ситуаций, а их неучет — к построению неадекватных моделей. Наконец, при традиционном подходе выполнить условия термоэмиссии удастся только при  $J = \text{const}$ , в то время как уже в первом приближении геометризованного варианта теории плотность тока эмиссии неоднородна; однородность может быть обеспечена за счет определенной специализации оси пучка или базовой трубки тока.

### Эталонное точное решение

Ниже приведены первые результаты тестирования моделей, основанных на геометризованных уравнениях пучка, при использовании в качестве эталона точного решения, описывающего плоское нерелятивистское течение со спирального катода по спиральным траекториям [4]. В спиральных координатах  $p$ ,  $q$ , которые связаны с полярными координатами  $R$ ,  $\Psi$  формулами ( $h_1$ ,  $h_2$  — коэффициенты Ляме)

$$p = h_1 \ln R - h_2 \Psi, \quad q = h_2 \ln R + h_1 \Psi, \quad h_1, h_2 = \text{const}; \quad (1)$$

$$\ln R = h_1 p + h_2 q, \quad \Psi = h_1 q - h_2 p, \quad h_1 = h_2 = e^{h_1 p + h_2 q}, \quad h_1^2 + h_2^2 = 1,$$

параметры потока определены выражениями

$$v_p = e^{-b_2 q} u(p), \quad \varphi = e^{-2b_2 q} \Phi(p), \quad I = \sigma u, \quad (2)$$

$$\rho = e^{-4b_2 q} \sigma(p), \quad J = I_0 e^{-5b_2 q}, \quad I_0 = \text{const}.$$

Здесь  $v_p$ ,  $\phi$ ,  $\rho$ ,  $J$  — скорость, потенциал, плотность пространственного заряда и плотность тока эмиссии, соответственно. Зависящие от  $p$  функции удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$u^2 = 2\Phi; \quad I = I_0 e^{-h_1 q}; \quad u \Phi'' = e^{2h_1 q} I - 4b_2^2 u \Phi. \quad (3)$$

Исключая  $u$ ,  $I$ , для  $\Phi$  получаем

$$\Phi'' + 4b_2^2 \Phi = \frac{I_0 e^{h_1 p}}{\sqrt{2\Phi}}. \quad (4)$$

Кривизна  $k_1$  траекторий  $q = \text{const}$  и кривизна  $\varkappa_1$ , ортогонального им семейства  $p = \text{const}$  задаются формулами

$$k_1 = -\frac{1}{h_2} (\ln h_1), \quad q = -b_2 e^{-h_1 p - b_2 q}; \quad (5)$$

$$\varkappa_1 = -\frac{1}{h_1} (\ln h_2), \quad p = -b_1 e^{-h_1 p - b_2 q}.$$

Индекс после запятой в (5) означает частную производную по соответствующей координате. В качестве базовой траектории выберем линию  $q = 0$ , эмиттер расположим на поверхности  $p = 0$ . Тогда их кривизны задаются выражениями

$$k_1^{(0)} = -b_2 e^{-h_1 p}, \quad \varkappa_{10} = -b_1 e^{-b_2 q} \quad (6)$$

### Трансформация точного решения применительно к методу узких полос

Решение уравнений (2) необходимо представить в форме, принятой в методе узких полос [5]. Вычислим некоторые необходимые для этого величины. Длины дуг координатных осей определяются формулами

$$l = \int_0^p h_1 dp = \frac{1}{h_1} e^{h_1 p} (e^{h_1 p} - 1), \quad s = \int_0^q h_2 dq = \frac{1}{b_2} e^{b_2 q} (e^{b_2 q} - 1); \quad (7)$$

$$l_0 = \frac{1}{h_1} (e^{h_1 p} - 1), \quad s_0 = \frac{1}{b_2} (e^{b_2 q} - 1).$$

Здесь  $l_0$ ,  $s_0$  — длины дуг вдоль базовой траектории и эмиттера.

Угол наклона  $\theta^{(0)}$  к оси  $x$  линии  $q = 0$  найдем, дифференцируя это уравнение, записанное в декартовых координатах

$$\theta^{(0)} = \arctg \frac{dy}{dx} = \gamma + \Psi^{(0)}, \quad \text{tg } \gamma = -\frac{b_2}{b_1}, \quad \Psi^{(0)} = -b_2 p = \text{tg } \gamma \ln(1 + b_1 l_0). \quad (8)$$

Выражение для  $\Psi^{(0)}$  следует из параметрических уравнений линии  $q = 0$

$$\ln R = b_1 p, \quad \Psi = -b_2 p, \quad (9)$$

вытекающих из (1).

Параметрические уравнения базовой трубки тока в декартовых координатах имеют вид

$$x^{(0)}(p) = e^{h_1 p} \cos(b_2 p), \quad y^{(0)}(p) = -e^{h_1 p} \sin(b_2 p). \quad (10)$$

Потенциал на ней определяется функцией  $\Phi$ , которая после перехода от  $p$  к  $l_0$  в (4) удовлетворяет уравнению

$$(1 + b_1 l_0)^2 \Phi_{,11} + b_1 (1 + b_1 l_0) \Phi_{,1} + 4b_2^2 \Phi = \frac{I_0 (1 + b_1 l_0)}{\sqrt{2\Phi}}. \quad (11)$$

Соотношение на трубке тока [5] в рассматриваемом случае запишется следующим образом

$$2\Phi h_{2,11} + \left[ 4k_1^{(0)2} \Phi - \alpha_{10} \Phi_{,1} + \Phi_{,11} \right] h_2 = \frac{I_0 h_{20}}{\sqrt{2\Phi}} J(0) = I_0. \quad (12)$$

Комплекс в квадратных скобках в (12) на основании (6), (11) равен

$$4k_1^{(0)2} \Phi - \alpha_{10} \Phi_{,1} + \Phi_{,11} = \frac{I_0}{1 + b_1 I_0} \frac{1}{\sqrt{2\Phi}}.$$

В результате уравнение (12) принимает вид

$$2\Phi h_{2,11} = \frac{I_0}{\sqrt{2\Phi}} \left( h_{20} - \frac{h_2}{1 + b_1 I_0} \right). \quad (13)$$

Учитывая, что  $h_{20} = h_2(0, 0) = 1$ ,  $(h_{2,1}) = -\alpha_{10} = b_1$ , получаем в качестве решения (13) точное значение  $h_2$  при  $q = 0$ :

$$h_2^{(0)} = e^{b_1 p} = 1 + b_1 I_0. \quad (14)$$

### Решения первого и второго приближений

Приближенные параметрические уравнения первой трубки тока при  $q = \text{const}$  теперь должны сравниваться с точными кривыми  $q = \text{const}$ :

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= x^{(0)} - h_2^{(0)} \sin \theta^{(0)} q = e^{b_1 p} [\cos(b_2 p) - \sin(\gamma - b_2 p)q]; \\ y^{(1)} &= y^{(0)} + h_2^{(0)} \cos \theta^{(0)} q = e^{b_1 p} [-\sin(b_2 p) + \cos(\gamma - b_2 p)q]. \end{aligned} \quad (15)$$

Все прочие параметры потока в приближенном алгоритме получаются как первые члены ряда Тэйлора по поперечной координате  $q$  для соответствующих точных выражений:

$$\begin{aligned} \varphi_{ex} &= e^{-2b_2 p} \Phi(p), \quad \left( x_0^1 \right)_{ex} = e^{b_2 q} \cos(b_1 q), \quad \left( y_0^1 \right)_{ex} = e^{b_2 q} \sin(b_1 q), \\ \varphi^{(1)} &= \Phi^{(0)} + 2(h_2 k_1 \Phi)_q^{(0)} = \Phi^{(0)}(1 - 2b_2 q); \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} x_0^{(1)} &= x_0^{(0)} - \sin \theta_0^{(0)} q = 1 + b_2 q, \quad y_0^{(1)} = y_0^{(0)} + \cos \theta_0^{(0)} q = b_1 q, \\ J_{ex} &= I_0 e^{-5b_2 q}, \quad J^{(1)} = J^{(0)} + J_2^{(0)} q = I_0(1 - 5b_2 q). \end{aligned}$$

Здесь  $x_0^{(1)}$ ,  $y_0^{(1)}$  — координаты катода на первой трубке тока; эмитирующая поверхность  $p = 0$  в точном решении описывается параметрическими уравнениями  $\ln R = b_2 q$ ,  $\Psi = b_1 q$ .

Отмеченный факт делает привлекательным использование более точной модели прикатодной области, которую можно построить в общем случае [6]. Так, во втором приближении для плотности тока получаем ряд

$$\bar{j} = e^{-5b_2 q} = 1 - 5b_2 q + \frac{25}{2} b_2^2 q^2. \quad (17)$$

Сумма этого ряда для  $b_2 = 0,4$  при  $q = 0,3$  равна 0,58 при точном значении 0,5488. Применение простейшего нелинейного преобразования Шенкса к частичным суммам  $s_n$  в (17)

$$S = \frac{s_{n+1} s_{n-1} - s_n^2}{s_{n+1} + s_{n-1} - 2s_n} \quad (18)$$

дает значение 0,5385, уменьшая ошибку с 6 до 2 %.

Координаты катода для первой трубки тока в соответствии с формулами (16) определяются рядами

$$x_0^{(1)} = 1 + b_2 q + \frac{1}{2} (b_2^2 - b_1^2) q^2; \quad y_0^{(1)} = b_1 q + b_1 b_2 q^2. \quad (19)$$

### Результаты расчетов

На рис. 1 представлен расчет траекторий на основе геометризованной параксиальной теории первого приближения. Видно, что приемлемой точности можно добиться для пучка с полушириной  $q = 0,3$ , для которого традиционная параксиальная теория уже не применима. Ошибка вычисления потенциала составляет при этом 3,4 %. Видимые на рисунке дефекты приближенного решения (смещение траектории и особенно координат катода) могут быть существенно уменьшены за счет использования второго приближения как во всем поле течения, так и только в прикатодной области.

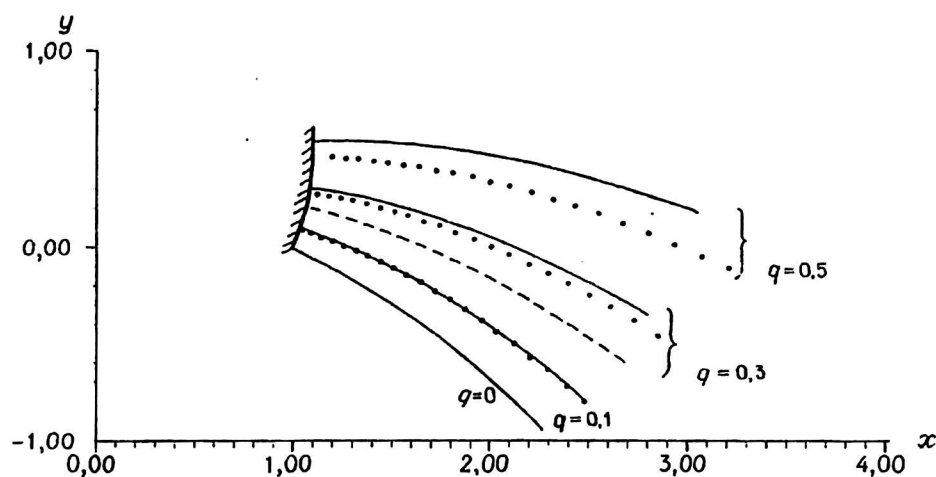


Рис. 1. Расчет траекторий на основе геометризованной параксиальной теории первого приближения:

— точное решение; - - - традиционная параксиальная теория;  
 ····· геометризованная теория

Корректировка координат  $x_0^{(1)}$ ,  $y_0^{(1)}$  по формулам (19) уменьшает ошибку их вычислений с 10 до 0,8 % (см. рис. 1). Плотность тока при этом корректируется в соответствии с формулами (17), (18). Использование второго приближения во всей области течения уменьшает ошибку вычисления траекторий вдвое. В результате с ошибкой порядка 5 % удастся рассчитать область течения с перепадом плотности тока на катоде  $e^{1,2 \sim 3,3}$ .

На рис. 2 приведены результаты расчета траекторий в той же области, но с применением метода узких полос в трехполосном приближении. Рядом с трубками тока указана ошибка вычисления потенциала. Расчеты проведены без корректировки плотности тока эмиссии (18). Приближенные и точные траектории совпадают здесь с графической точностью.

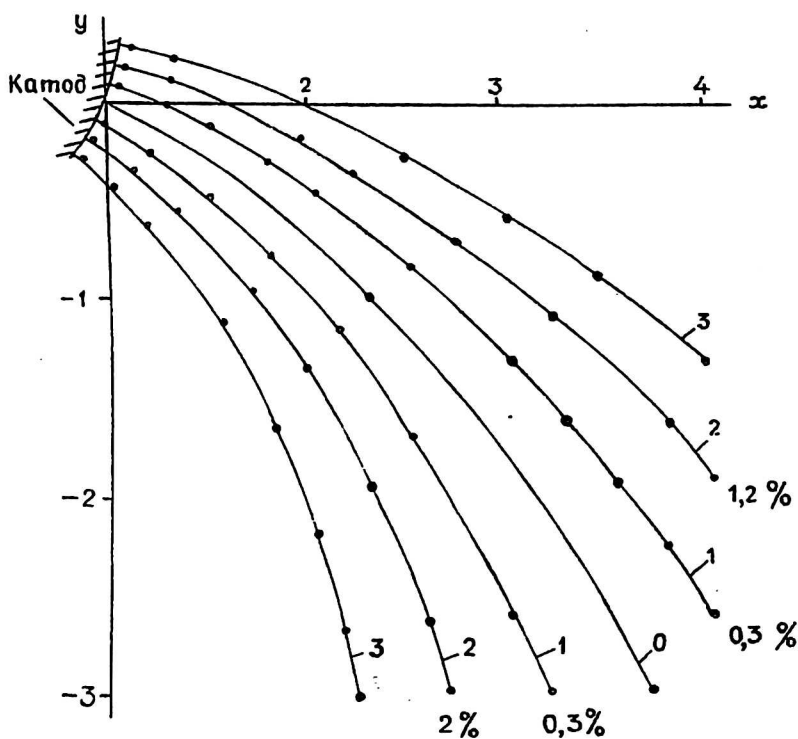


Рис. 2. Расчет траекторий методом узких полос

На рис. 3 представлены траектории для сходящегося пучка, где при компрессии порядка 6 трехполосное приближение дает ошибку при определении ширины пучка около 30 %, двухполосное приближение при той же компрессии — около 1 %.

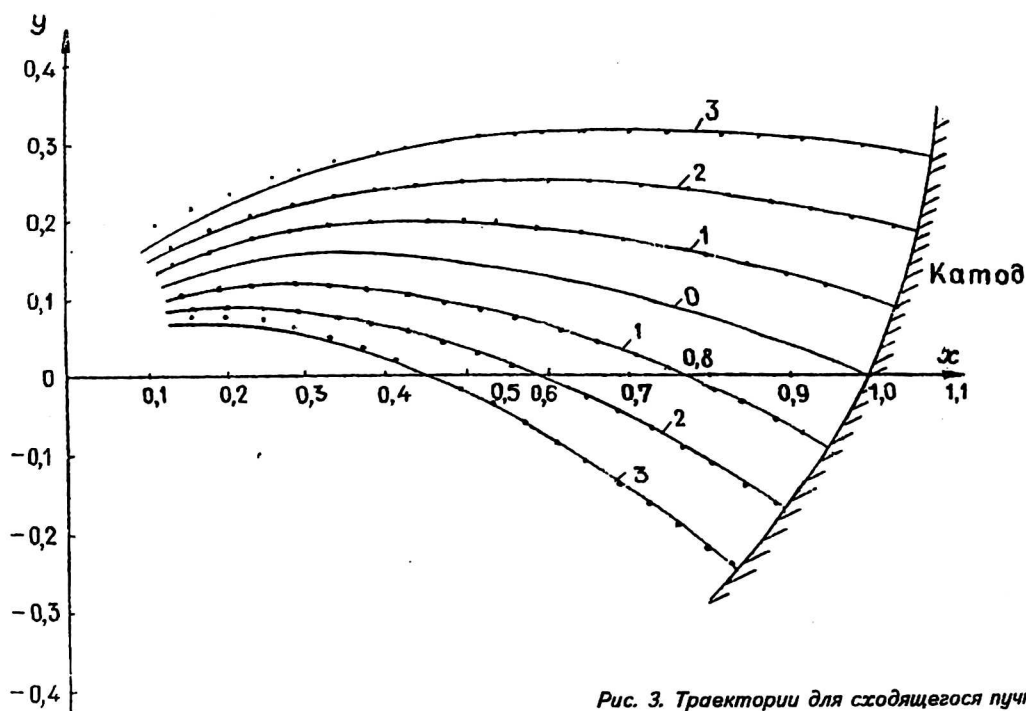


Рис. 3. Траектории для сходящегося пучка

## Выводы

1. Результаты тестирования подтверждают общие соображения о большей точности геометризованной теории тонких пучков по сравнению с ее традиционным вариантом в тех случаях, когда они могут конкурировать друг с другом.

2. Отдельные элементы метода узких полос должны быть модифицированы в целях повышения точности вычисления потенциала.

3. Дальнейшее тестирование поможет выявить оптимальное сочетание ширины и числа полос, а также порядок используемого в них приближения для описания существенно непараксиальных потоков с неоднородной плотностью тока эмиссии.

## Литература

1. Сыровой В. А. // Прикладная физика. 1997. № 2—3. С. 52.
2. Сыровой В. А. // Радиоэлектроника. 1989. Т. 35. № 12. С. 2586.
3. Сыровой В. А. // Там же. 1991. Т. 36. № 3. С. 540.
4. Kirstein P. T., Kino G. S. // J. Appl. Phys. 1958. V. 29. № 12. P. 1758.
5. Сыровой В. А. // Радиоэлектроника. 1997. Т. 42. № 2. С. 220.
6. Сыровой В. А. // Там же. № 9.

## TESTING OF GEOMETRIZED MODELS OF DENSE ELECTRON BEAMS

*A. V. Vashkovsky, L. A. Negalova, V. A. Syrovoy*

All-Russian Electrotechnical Institute, Moscow, Russia

*The results of testing of geometrized models on an example of the exact decision describing a flat non-relativistic flow from the spiral cathode on spiral trajectories are discussed. Are analyzed geometrized variant of the theory first and second approximations; the combined variant of the first approximation for trajectories and precise description in area next to cathode; a method of narrow strips with synthesis of non-parallaxes flows.*