Общая физика

УДК 537.8

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля классической системы точечных зарядов

В. И. Крылов

Построено действие для системы точечных зарядов и найден тензор энергии-импульса их электромагнитного поля, в которых отсутствуют как завуалированное в общепринятой теории воздействие заряда самого на себя, так и (считающаяся общепринятой в классической электродинамике) бесконечно большая энергия поля точечного заряда. Показано, что такое видоизмененное действие позволяет (с самого начала для точечных зарядов) получить уравнения Максвелла.

PACS: 03.50.De

Ключевые слова: точечные электрические заряды, тензор энергии-импульса, электромагнитное поле, тензор напряжений, энергия, поток.

Введение

В настоящее время не подлежит сомнению то, что одной из фундаментальных величин современной физики и, в частности, классической электродинамики является элементарный электрический заряд точечной частицы. Отсюда, казалось бы, что основные результаты и понятия классической электродинамики, а именно, тензор энергии-импульса T^{ik} и уравнения Максвелла должны были быть получены для системы точечных зарядов. Однако хорошо известные (см., например [1—3]) выводы T^{ik} и второй пары уравнений Максвелла проводятся для непрерывно распределенных зарядов, а при внимательном рассмотрении можно заметить, что в процессе "трехмерного" нахождения T^{ik} происходит неаккуратный переход от непрерывно распределенных зарядов к точечным, и вследствие этого теория становится внутренне противоречивой.

Действительно, несмотря на то, что в литературе, в которой электродинамика строится на основе принципа наименьшего действия [1–3], в качестве первоначального выбирают действие в форме, соответствующей системе точечных частиц:

$$S = -\sum_a m_a c \int_{1a}^{2a} \sqrt{dx_{ai} dx_a^i} - \sum_a \frac{e_a}{c} \int_{1a}^{2a} A_i(x_a^0, x_a^1, x_a^2, x_a^3) dx_a^i - \frac{1}{16\pi c} \iiiint F^{ik} F_{ik} d^4 x, \quad (1)$$

здесь A_i — 4-мерный потенциал, $F_{ik} = \partial A_k / \partial x^i - \partial A_i / \partial x^k$ — тензор электромагнитного поля; m_a, e_a, x_a^i — масса, заряд, 4-мерные координаты a-той частицы; $(d^4 x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3)$, но реальные результаты — вторую пару уравнений Максвелла, тензор энергии-импульса — получают после перехода в (1) к непрерывно пространственно-распределенным зарядам. Само же выражение (1) использовать нельзя, потому что A_i определяется полем всех N зарядов рассматриваемой физической системы: $A_i = \sum_{b=1}^{N} A_{b\,i}$, в том числе и a-тым, причем хорошо известно, что $A_{a0}(\vec{r}_a) = \infty$ для любого a. Но даже если бы значение потенциала $A_{a0}(\vec{r}_a)$ было конечным, то имеется еще более важное обстоятельство, делающее бессмысленным использование выражения (1) и связанное с физическими соображениями: входящие во вторую сумму этого выражения слагаемые вида $e_a A_{ai}(\vec{r}_a)$ определяют воздействие заряда самого на себя, что совершенно недопустимо в соответствии с фундаментальными принципами физики.

При переходе же в (1) к непрерывно распределенной 4-мерной плотности тока (в литературе это обычно обосновывается банальным "математическим удобством") эти трудности становятся завуалированными, но при использовании полученных из видоизмененного действия результатов к полю

Крылов Владимир Иванович, профессор.
Тихоокеанский государственный университет.
Россия, 680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.
Тел. 8 (4212) 72 –06-84, 37-51-86. Факс 8 (4212) 72-06-84.
E-mail: krylov_vladimir@mail.ru

Статья поступила в редакцию 24 февраля 2010 г.

точечных зарядов проявляются в появлении бесконечно больших слагаемых в его энергии и воздействии частицы самой на себя. Такая же ситуация возникает, когда в основу теории [4] кладут эмпирические законы Кулона, Био—Савара и т. п.

Особенно явно проявляется "введение руками" — воздействие заряда самого на себя в результате перехода от непрерывно распределенных зарядов к точечным при общепринятом [1, 2] "трехмерном" выводе компонент T^{ik} (подробнее см. раздел настоящей статьи, где обсуждаются плотность энергии, плотность потока энергии и тензор напряжений электромагнитного поля системы точечных зарядов).

По этому поводу отметим следующее. Выражения для вектора Пойнтинга, максвелловского тензора напряжений и плотности энергии электромагнитного поля, являющимися трехмерными аналогами компонент общепринятого тензора энергии-импульса, получают в литературе с использованием уравнений Максвелла и уравнений движения точеных зарядов. Однако вторая пара уравнений Максвелла, выведенная для непрерывного 4-мерного тока, содержит частные производные от $\vec{E}_P = \sum\limits_b \vec{E}_b$ и $\vec{H}_P = \sum\limits_b \vec{H}_b$ (т. е. суперпозиции полей всех рассматриваемых зарядов), появившихся как $\partial F^{ik} / \partial x^k$.

В плотности же токов и зарядов точечных частиц для a-той частицы должны входить $\vec{E} = \sum\limits_b{}' \vec{E}_b$ и $\vec{H} = \sum\limits_b{}' \vec{H}_b$ (символ $\sum\limits_b{}'$ означает суммирование соответствующих величин всех зарядов, кроме a-того). Связано это с тем, что в соответствии с основными принципами механики при определении уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном поле (при варьировании действия в виде (1), но записанное для одной частицы и без слагаемого, содержащего интеграл с $F^{ik}F_{ik}$), поле, определяемое потенциалом A_i, не включает в себя поле рассматриваемого заряда. В результате такой процедуры выводится хорошо известное уравнение движения для точечного заряда, в котором, очевидно, отсутствует самовоздействие частицы:

$$d\vec{p}_a / dt = e_a \vec{E} + (e_a / c)[\vec{\mathrm{v}}_a, \vec{H}], \qquad (2)$$

и из него получается также известная формула

$$d\varepsilon_a / dt = e_a \vec{\mathrm{v}}_a \vec{E}, \qquad (3)$$

где $\varepsilon_a = m_a c^2 / \sqrt{1 - \mathrm{v}_a^2 / c^2}$;

$\vec{\mathrm{v}}_a$ — вектор скорости a-той частицы.

Нетрудно проверить, что (с учетом отличий $\vec{E}_P$ и $\vec{H}_P$ от $\vec{E}$ и $\vec{H}$) использование общеизвестной процедуры "трехмерного" вывода компонент тензора энергии-импульса ни к чему не приводит, и получить его в общепринятом виде невозможно. Но в литературе это игнорируется, и считается, что $\vec{E}$ и $\vec{H}$ для всех частиц одни и те же и совпадают с напряженностями, входящими в частные производные уравнения Максвелла, т. е. с $\vec{E}_P$ и $\vec{H}_P$ (см., например [1—3]), что равносильно введению воздействия точечного заряда самого на себя.

В соответствии с вышеизложенным возникает вопрос — можно ли построить действие системы точечных зарядов и их поля, в котором отсутствовало бы самовоздействие частиц?

Именно такое действие и построено в настоящей работе, из которого получен тензор энергии-импульса, заметно отличающийся от подобного тензора поля непрерывно распределенных зарядов, но переходящий в него при увеличении числа зарядов с одновременным уменьшением их абсолютной величины. То, что действие выбрано правильно, подтверждается выводом из его вариации уравнений Максвелла для 4-мерного тока и поля точечных частиц.

Действие системы точечных зарядов и тензор энергии-импульса их поля

Для получения тензора энергии-импульса системы точечных частиц поступим аналогично хорошо известной процедуре, изложенной в литературе (см., например [1—3]), начиная с построения действия рассматриваемой системы. Критерием правильности наших построений будем считать вывод (с самого начала для точечных частиц) уравнений Максвелла.

Как уже было отмечено, важнейшим недостатком действия в виде (1) являются входящие в него слагаемые $e_a A_{ai}(\vec{r}_a)$, соответствующие самовоздействию зарядов. В то же время при варьировании записанного для одной частицы и укороченного (без четырехмерного интеграла) выражения (1) со считающимся заданным A_i получается правильное уравнение движения (2) (см. [1—3]).

Исходя из этого, представляется естественным построить укороченное действие для системы точечных зарядов в виде:

$$S = -\sum_a m_a c \int\limits_{1a}^{2a} \sqrt{dx_{ai} dx_a^i} - \sum_a \frac{e_a}{c} \int\limits_{1a}^{2a} \sum_b{}' A_{bi}(\vec{r}_a, t) dx_a^i, \qquad (4)$$

где интегралы берутся по мировым линиям частиц с началами в точках $1a$ и концами в точках $2a$.

Варьируя (4) только по траекториям частиц, получим (если варьировать траекторию только одной частицы, считая остальные заданными, как и их поля – результат будет тот же):

$$\delta S=-\sum_a\left\{\left[m_a c u_a^i+\frac{e_a}{c}\sum{}'A_b^i\right]\delta x_a^i\Bigg|_{1a}^{2a}\right\}-$$
$$-\int_{1a}^{2a}\left[m_a c\frac{du_{ai}}{ds_a}-\frac{e_a}{c}\sum_b{}'\left(\frac{\partial A_{bk}}{\partial x_a^i}-\frac{\partial A_{bi}}{\partial x_a^k}\right)u_a^k\right]\delta x_a^i ds_a. \qquad (5)$$

Требования $\delta S = 0$ и $\delta x_a^i(2a)=\delta x_a^i(1a)=0$ приводят к уравнениям движения

$$m_a c\frac{du_{ai}}{ds_a}=\frac{e_a}{c}\sum{}'\left(\frac{\partial A_{bk}}{\partial x_a^i}-\frac{\partial A_{bi}}{\partial x_a^k}\right)u_a^k, \qquad (6)$$

где $ds_a=\sqrt{dx_{ai},dx_a^i}$; $u_a^k=dx_a^k/ds_a$.

Из этих уравнений следует, что при выборе действия в виде (4) на a-тую частицу действуют поля только других частиц. Они совпадают с общеизвестными уравнениями движения заряженной частицы в электромагнитном поле, так как в традиционной теории при его получении поле по отношению к частице считается заданным.

Из уравнения (6) следует необходимость введения тензора электромагнитного поля a-той частицы в виде $\sum_b{}'F_{bik}(\vec{r}_a,t)$ с использованием выражения

$$F_{bik}(\vec{r},t)=\left(\frac{\partial A_{bk}}{\partial x^i}-\frac{\partial A_{bi}}{\partial x^k}\right), \qquad (7)$$

компоненты которого обычным образом определяются через напряженности $\vec{E}_b$ и $\vec{H}_b$ b-тых зарядов и позволяют получить первую пару уравнений Максвелла для этих напряженностей.

Учитывая этот результат, построим плотность функции Лагранжа электромагнитного поля в виде следующего выражения:

$$-\frac{1}{16\pi}\sum_a\sum_b{}'F_{bik}F_a^{ik}, \qquad (8)$$

где $F_a^{ik}=\left(\frac{\partial A_a^k}{\partial x_i}-\frac{\partial A_a^i}{\partial x_k}\right)$ определяется 4-мерным потенциалом a-той частицы.

Очевидно, что (8) является инвариантом.

Используя (4) и (8), запишем действие для системы точечных зарядов и их поля в виде:

$$S=-\sum_a m_a c\int_{1a}^{2a}ds_a-\frac{1}{c^2}\times$$
$$\times\int_{x_1^0}^{x_2^0}\iiint\left\{\sum_a\sum_b{}'e_a\upsilon_a^i A_{bi}\delta(\vec{r}-\vec{r}_a)+\frac{c}{16\pi}\sum_a\sum_b{}'F_{bik}F_a^{ik}\right\}d^4x, \qquad (9)$$

где $\upsilon_a^i=dx_a^i/dt$; $e_a\upsilon_a^i\delta(\vec{r}-\vec{r}_a)$ — 4-мерная плотность тока; $x_a^0=ct$ и не зависит от номера частицы.

В (9) использовано очевидное равенство:

$$-\frac{1}{c}\sum_a e_a\int_{1a}^{2a}\sum_b{}'A_{bi}(\vec{r}_a,t)dx_a^i=$$
$$=-\frac{1}{c^2}\int_{x_1^0}^{x_2^0}\iiint\sum_a\sum_b{}'e_a A_{bi}(\vec{r},t)\upsilon_a^i\delta(\vec{r}-\vec{r}_a)d^4x.$$

Отметим, что если бы мы в (1), как это было сделано, например, в [3] на странице 68, часть действия, определяющей взаимодействие заряда с полем, записали в виде:

$$\frac{1}{c^2}\int_{x_1^0}^{x_2^0}\iiint\sum_a e_a\vec{v}_a(t)\delta(\vec{r}-\vec{r}_a)\vec{A}(\vec{r},t)d^4x-$$
$$-\frac{1}{c^2}\int_{x_1^0}^{x_2^0}\iiint\sum_a ce_a\delta(\vec{r}-\vec{r}_a)\Phi(\vec{r},t)d^4x,$$

(здесь $\vec{A}$ — пространственные компоненты 4-мерного потенциала, $\Phi(\vec{r},t)$ — его временная компонента), то избавится от проблем, обсуждаемых во Введении, нам не удалось бы. Последнее выражение фактически бессмысленно, так как $\iiint\Phi(\vec{r},t)\delta(\vec{r}-\vec{r}_a)d^3r=\Phi(\vec{r}_a)$ — бесконечно велико и определяет самовоздействие.

Варьирование (9) по компонентам поля всех частиц — хрестоматийно. Следует только учесть легко проверяемые равенства вида

$$\sum_a\sum_b{}'\delta F_{aik}F_b^{ik}=\sum_a\sum_b{}'F_a^{ik}\delta F_{bik}, \qquad (10)$$

и воспользоваться, как это обычно делается в работе [1], обращением в нуль интегралов от четырехмерных дивергенций

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(F_a^{ik}\delta A_{bi}\right).$$

В результате получим:

$$\delta S=-\frac{1}{c^2}\int_{x_1^0}^{x_2^0}\iiint\sum_a\sum_b{}'M_b^i\delta A_{ai}d^4x, \qquad (11)$$

где

$$M_b^i=e_b\upsilon_b^i\delta(\vec{r}-\vec{r}_b)+\frac{c}{4\pi}\frac{\partial F_b^{ik}}{\partial x^k}. \qquad (12)$$

При $\delta S = 0$ получаем систему однородных уравнений

$$\sum_b{}'M_b^i=0 \qquad (13)$$

для каждого индекса i. Например, для трех частиц из (13) получим:

$$M_1^i + M_2^i = 0;$$
$$M_1^i + M_3^i = 0;$$
$$M_2^i + M_3^i = 0.$$

Определитель этой системы равен 2. Подобная система для любого числа уравнений имеет определитель, отличный от нуля, так как его всегда можно представить состоящим из единичных элементов и одной нулевой диагонали. Очевидно, что строки такого определителя линейно независимы и, следовательно, он не равен нулю. Поэтому система уравнений (13) имеет только тривиальные решения $M_b^i = 0$, или

$$e_b \upsilon_b^i \delta(\vec{r} - \vec{r}_b) + \frac{c}{4\pi} \frac{\partial F_b^{ik}}{\partial x^k} = 0. \quad (14)$$

Уравнение (14) представляет собой записанную в четырехмерном виде вторую пару уравнений Максвелла для каждого точечного заряда e_b.

Отметим, что если бы мы вместо выражения (8) в действии (9) сохранили общепринятое выражение $-(1/16\pi)F^{ik}F_{ik}$, то в уравнение (13) вместо M_b^i вошли бы 4-мерные плотности тока $-(4\pi/c)e_b\upsilon_b^i\delta \times (\vec{r} - \vec{r}_b)$, а справа вместо нулей стояла бы одна и та же величина $\partial F^{ik}/\partial x^k$. Решение такой системы линейных неоднородных уравнений (для N частиц и всех i и b) будет иметь вид (это еще раз доказывает, что определитель системы (13) не равен нулю):

$$-(4\pi/c)e_b\upsilon_b^i\delta(\vec{r} - \vec{r}_b) = (1/(N-1))\partial F^{ik}/\partial x^k. \quad (15)$$

Так как правая часть (15) не зависит от b, то имеющее физический смысл решение этого уравнения возможно только при отсутствии зарядов: $\partial F^{ik}/\partial x^k = 0$, т. е. будет описывать собственные колебания электромагнитного поля.

Выражение (8) для плотности функции Лагранжа после применения к нему стандартной хорошо известной операции построения тензора энергии-импульса T^{ik} [1] приводит к формуле:

$$T^{ik} = -\frac{1}{4\pi}\sum_a\sum_b{}' F_a^{il}F_{bl}^k + \frac{1}{16\pi}g^{ik}\sum_a\sum_b{}' F_a^{ml}F_{b\,ml}. \quad (16)$$

Используя (7), компоненты T^{ik} нетрудно выразить в трехмерном виде через напряженности полей a-тых и b-тых частиц. Покажем, как эти же формулы можно сразу получить в трехмерном виде, используя (2), (3) и уравнения Максвелла.

Плотность энергии, плотность потока энергии и тензор напряжений электромагнитного поля системы точечных зарядов

Для отдельного b-того заряда три компоненты уравнения (14), совпадающих с уравнением Максвелла, запишем следующим образом:

$$\mathrm{rot}\vec{H}_b = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}_b}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}e_b\vec{\mathrm{v}}_b\delta(\vec{r} - \vec{r}_b(t)). \quad (17)$$

Для a-того заряда воспользуемся первым уравнением Максвелла

$$\mathrm{rot}\vec{E}_a = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}_a}{\partial t}. \quad (18)$$

Умножая обе части (17) на $\vec{E}_a$, вычитая из них соответствующие части (18), домноженные на $\vec{H}_b$, и интегрируя по произвольной области пространства объемом V_Σ, охватываемой поверхностью Σ, получим

$$-\frac{c}{4\pi}\iiint_{V_\Sigma}\mathrm{div}\left[\vec{E}_a\vec{H}_b\right]d^3r = \\ = \iiint_{V_\Sigma}\frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}_a\frac{\partial \vec{E}_b}{\partial t} + \vec{H}_b\frac{\partial \vec{H}_a}{\partial t}\right)d^3r + e_b\vec{\mathrm{v}}_b\vec{E}_a. \quad (19)$$

Суммируя (19) по a и b при условии, что $a \neq b$, найдем:

$$-\oint_\Sigma\frac{c}{4\pi}\sum_b\sum_a{}'\left[\vec{E}_a\vec{H}_b\right]d\vec{\Sigma} = \iiint_{V_\Sigma}\frac{1}{4\pi}\sum_b\sum_a{}'\left(\vec{E}_a\frac{\partial \vec{E}_b}{\partial t} + \vec{H}_b\frac{\partial \vec{H}_a}{\partial t}\right)d^3r + \\ + \sum_{b'}\sum_a{}' e_{b'}\vec{\mathrm{v}}_{b'}\vec{E}_a, \quad (20)$$

где штрих над индексом b' означает, что в сумму вошли только заряды частиц, находящихся в объеме V_Σ.

Записав выражение (3) для b-того заряда в виде $d\varepsilon_b/dt = e_b\vec{\mathrm{v}}_b\sum{}'\vec{E}_a$ и просуммировав по b, получим:

$$\sum_b\sum_a{}' e_b\vec{\mathrm{v}}_b\vec{E}_a = \sum_b\frac{d\varepsilon_b}{dt}. \quad (21)$$

Подставляя (21) в (20) и учитывая, что

$$\sum_{a\neq b}\left(\vec{E}_a\frac{\partial \vec{E}_b}{\partial t} + \vec{H}_b\frac{\partial \vec{H}_a}{\partial t}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{a\neq b}\left(\vec{E}_a\vec{E}_b + \vec{H}_b\vec{H}_a\right)$$

(здесь и в дальнейшем для краткости вводим обозначение $\sum_b\sum_a{}' = \sum_{a\neq b}$) запишем (20) в виде:

$$\frac{d}{dt}\left\{\iiint\limits_{V_\Sigma}\sum_{a\neq b}\frac{\left(\vec{E}_a\vec{E}_b+\vec{H}_b\vec{H}_a\right)}{8\pi}d^3r+\sum_{b'}\varepsilon_{b'}\right\}=$$
$$=-\oiint\limits_{\Sigma}\sum_{a\neq b}\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}_a\vec{H}_b\right]d\vec{\Sigma}. \tag{22}$$

Из этого уравнения следует, что плотность энергии электромагнитного поля и плотность потока его энергии определяются выражениями

$$W=\sum_{a\neq b}\frac{\left(\vec{E}_a\vec{E}_b+\vec{H}_b\vec{H}_a\right)}{8\pi} \tag{23}$$

и

$$\vec{P}=\frac{c}{4\pi}\sum_{a\neq b}\left[\vec{E}_a\vec{H}_b\right]. \tag{24}$$

Если формально отбросить условие $a\neq b$, то (22) перейдет в хорошо известное соотношение между энергией частиц $\sum\limits_{b'}\varepsilon_{b'}$ общепринятым выражением для энергии электромагнитного поля с плотностью $\left(E_P^2+H_P^2\right)/8\pi$ и вектором Пойнтинга $c\left[\vec{E}_P\vec{H}_P\right]/4\pi$, в которые перейдут (23), (24).

Однако подчеркнем, что отказ от условия $a\neq b$ делает либо невозможным использовать формулу (21), либо ее надо заменить выражением

$$\frac{d\varepsilon_b}{dt}=e_b\vec{\mathrm{v}}_b\sum_a\vec{E}_a,$$

где суммирование $\sum\limits_a\vec{E}_a=\vec{E}_P$ производится уже по напряженностям поля всех зарядов, включая и $\vec{E}_b$, но тогда мы вводим воздействие заряда e_b самого на себя.

Из (23) практически с очевидностью следует, что энергия электростатического поля системы точечных зарядов конечна (если заряды располагаются на конечном расстоянии друг от друга). Действительно, пусть N неподвижных зарядов e_a находится в конечной области пространства. Тогда учитывая потенциальность поля каждого заряда, $\vec{E}_b=-\mathrm{grad}\Phi_b$, уравнение $\mathrm{div}\vec{E}_a=4\pi e_a\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_a\right)$ и то, что на бесконечности поле исчезает, можно, подобно тому, как это обычно делается, записать:

$$\frac{1}{8\pi}\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\sum_{a\neq b}\vec{E}_a\vec{E}_bd^3r=-\frac{1}{8\pi}\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\sum_{a\neq b}\vec{E}_a\nabla\Phi_bd^3r=$$
$$=-\frac{1}{8\pi}-\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\left(\mathrm{div}\vec{E}_a\Phi_b-\Phi_b\mathrm{div}\vec{E}_a\right)d^3r=\frac{1}{8\pi}\times \tag{25}$$
$$\times\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\sum_{a\neq b}\Phi_b4\pi e_a\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_a\right)d^3r=\frac{1}{2}\sum_{a\neq b}e_a\Phi_b(\vec{r}_a).$$

Последнее выражение конечно для потенциалов точечных зарядов и совпадает с формулой, фактически используемой в научной литературе, когда из правой части соотношения

$$\iiint\frac{E^2}{8\pi}d^3r=\frac{1}{2}\sum_{a\neq b}\frac{e_ae_b}{\left|\vec{r}_a-\vec{r}_b\right|}+\frac{1}{2}\sum_a\frac{e_ae_a}{\left|\vec{r}_a-\vec{r}_a\right|}$$

вручную исключают вторую бесконечную сумму. Здесь же выражение (25) получено только из уравнений и внутренних принципов электродинамики без привлечения внешних соображений.

Если теперь применить (25) к одному заряду, то получим нуль, так как вся энергия одного изолированного заряда есть ε_a, и в соответствии с (3) $d\varepsilon_a/dt=0$.

Поделив выражение (24) на c^2 и продифференцировав его по времени, подобно тому, как это сделано с вектором Пойнтинга, например в [2], нетрудно получить выражения для плотности и потока импульса и соотношение, связывающее их. Обозначая декартовые компоненты векторов греческими индексами α, β, найдем:

$$\frac{d}{dt}\left\{\iiint\limits_{V_\Sigma}\sum_{a\neq b}\frac{1}{4\pi c}\left[\vec{E}_a\vec{H}_b\right]_\alpha d^3r+\sum_{b'}p_{b'\alpha}\right\}=-\oiint\limits_{\Sigma}\frac{1}{4\pi}\sum_{a\neq b}\left\{\frac{1}{2}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\vec{E}_a\vec{E}_b+\vec{H}_a\vec{H}_b\right)\delta_{\alpha\beta}-\left(E_{a\beta}E_{b\alpha}+H_{a\beta}H_{b\alpha}\right)\right\}d\Sigma_\beta, \tag{26}$$

где $\vec{p}_a=m_a\vec{\mathrm{v}}_a\Big/\sqrt{1-\mathrm{v}_a^2/c^2}$.

При выводе выражения (26) мы учли, что в соответствии с (2)

$$\iiint\limits_{V_\Sigma}\sum_{a\neq b}\left\{E_{b\alpha}e_a\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_a(t)\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{c}\left[e_a\vec{\mathrm{v}}_a\delta(\vec{r}-\vec{r}_a),\vec{H}_b\right]_\alpha\right\}d^3r=\sum_{b'}\frac{dp_{b'\alpha}}{dt}.$$

Из этого соотношения следует, что формула

$$\sum_{a\neq b}\frac{1}{4\pi c}\left[\vec{E}_a\vec{H}_b\right] \tag{27}$$

и правая часть (26) определяют плотность импульса и поток импульса.

Тензор

$$\sigma_{\alpha\beta}=\frac{1}{4\pi}\sum_{a\neq b}\left\{\frac{1}{2}\left(\vec{E}_a\vec{E}_b+\vec{H}_a\vec{H}_b\right)\delta_{\alpha\beta}-\left(E_{a\beta}E_{b\alpha}+H_{a\beta}H_{b\alpha}\right)\right\} \tag{28}$$

очевидно является аналогом максвелловского тензора напряжений.

Выражения (26)—(28) так же как и (22)—(24) переходят в соответствующие общепринятые соотношения, если снять условие $a\neq b$.

Нетрудно проверить, что, как и в общеизвестной теории [1], найденные здесь $T^{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}$, $T^{00} = W$, $T^{0\alpha} = \vec{P}/c$.

В заключение остановимся на вопросе об энергии и потоке энергии поля, соответствующего решениям однородных уравнений Максвелла

$$\mathrm{rot}\vec{\tilde{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\tilde{H}}}{\partial t}; \quad \mathrm{rot}\vec{\tilde{H}} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\tilde{E}}}{\partial t}. \tag{29}$$

Это можно сделать либо воспользовавшись найденными формулами, положив один из зарядов равным нулю, либо введя в уравнения движения $\vec{\tilde{E}}$ и $\vec{\tilde{H}}$:

$$\frac{d\vec{p}_b}{dt} = e_b\Big({\sum_a}'\vec{E}_a + \vec{\tilde{E}}\Big) + \frac{e_b}{c}[\vec{v}_b, \Big({\sum_a}'\vec{H}_a + \vec{\tilde{H}}\Big)], \tag{30}$$

и используя (30) вместе с (17), (18), (20), (29).

После вычислений, подобных вышеприведенным, т. е. сводящихся к "организации" производной по времени от одной части уравнения (с обязательным включением $d(\sum_b \varepsilon_b)/dt$) и дивергенции от другой, получим:

$$\frac{d}{dt}\left\{\iiint_{V_\Sigma}\left[\sum_{a\neq b}\frac{\left(\vec{E}_a\vec{E}_b + \vec{H}_b\vec{H}_a\right)}{8\pi} + \sum_b \frac{\left(\vec{E}_b\vec{\tilde{E}} + \vec{H}_b\vec{\tilde{H}}\right)}{4\pi}\right]d^3r + \sum_{b'}\varepsilon_{b'}\right\} = \tag{31}$$

$$= -\oint_\Sigma \frac{c}{4\pi}\left\{\sum_{a\neq b}\left[\vec{E}_a\vec{H}_b\right] + \sum_a\left[\vec{E}_a\vec{\tilde{H}}\right] + \sum_b\left[\vec{\tilde{E}}\vec{H}_b\right]\right\}d\vec{\Sigma}.$$

Выражение в фигурной скобке левой части (31), очевидно, является энергией системы, а правая часть определяет поток энергии через поверхность Σ.

Обратим внимание, что в (31) не вошли выражения

$$\frac{\tilde{E}^2 + \tilde{H}^2}{8\pi} \quad \text{и} \quad \frac{c}{4\pi}\left[\vec{\tilde{E}}\vec{\tilde{H}}\right], \tag{32}$$

которые традиционно считаются плотностью энергии и плотностью потока энергии электромагнитной волны. Формально выражения (32) можно включить в (31), сложив последнее с известным равенством

$$\frac{d}{dt}\left\{\iiint_{V_\Sigma}\frac{\tilde{E}^2 + \tilde{H}^2}{8\pi}d^3r\right\} = -\oint_\Sigma \frac{c}{4\pi}\left[\vec{\tilde{E}}\vec{\tilde{H}}\right]d\vec{\Sigma}. \tag{33}$$

Однако естественным образом связать первое выражение в (32) с $\sum_b \varepsilon_b$ в рамках излагаемой теории, по-видимому, нельзя, и этому можно дать следующее обоснование. В классической электродинамике, включающей в себя основные принципы классической механики, понятия энергии и импульса электромагнитного поля вводятся из тех выражений, которые содержат эти же величины, но только для частиц. Такие формулы могут возникнуть только при описании взаимодействия поля и частиц, что и демонстрирует выражение (31). Если же поле существует без зарядов, то и проявиться оно (подчеркнем, в классической теории) никак и не может. В общепризнанной теории такой проблемы не возникает из-за случайного совпадения правой и левой частей формулы (33) с соответствующими ошибочными выражениями формулы

$$\frac{d}{dt}\left\{\iiint_{V_\Sigma}\frac{\left(E_P{}^2 + H_P{}^2\right)}{8\pi}d^3r + \sum_b \varepsilon_b\right\} = -\oint_\Sigma \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}_P\vec{H}_P\right]d\vec{\Sigma}, \tag{34}$$

которая, как здесь было показано, получена при нарушении закона сохранения импульса.

Как следует из всего вышеизложенного, полученные здесь выражения должны быть близкими к общепринятым, когда распределение точечных зарядов становится близким к непрерывному. Такое возможно, когда в системе находится большое число приблизительно равных по модулю зарядов, и для поля каждого из них выполняются неравенства $E_a \ll \sum_b E_b$, $H_a \ll \sum_b H_b$. Если теперь переписать выражение плотности энергии (23) в виде $W = (1/(8\pi))\left\{E_P^2 + H_P^2 - \sum_a (E_a^2 + H_a^2)\right\}$, то легко понять, что число примерно одинаковых слагаемых в $E_P^2 + H_P^2$ близко к N^2, тогда как в сумме по *a* их только *N*. Как следствие, эта сумма мала по сравнению с первыми двумя слагаемыми. Это же относится и к остальным формулам (24), (27), (28).

Заключение

Таким образом, мы видим, что из предложенного здесь действия (9) для системы точечных зарядов автоматически получаются уравнения движения без самовоздействия, и этот же функционал позволяет получить уравнения Максвелла с 4-мерными токами точечных частиц и компоненты тензора энергии-импульса, не содержащих бесконечных слагаемых. Для большого числа зарядов, находящихся в ограниченной области пространства, известные в литературе формулы близки к найденным в настоящей работе выражениям. Однако полученные результаты существенно отличаются от общепризнанных для системы, состоящей из малого числа точечных частиц.

Можно ожидать, что подобное видоизменение соответствующих выражений в квантовой теории приведет к ее упрощению, но подтвердить или опровергнуть это предположение могут только дальнейшие исследования.

В заключение отметим, что настоящая работа в какой-то степени носит методический характер, смысл которого в том, что вскрыта причина появления расходимостей, обязанных неаккуратному предельному переходу.

Автор выражает глубокую благодарность А. А. Рухадзе за обсуждение результатов.

Литература

1. *Ландау Л. Д.* Теория поля/Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц — М.: Наука, 1988.
2. *Ландау Л. Д.* Краткий курс теоретической физики. Кн. 1/Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М.: Наука, 1969.
3. *Бредов М. М.* Классическая электродинамика / М. М. Бредов, В. В. Румянцев, И. Н. Топтыгин. — СПб.: Изд-во "Лань", 2003.
4. *Джексон Дж.*//Классическая электродинамика. — М.: Мир, 1965.

Energy-momentum tensor of an electromagnetic field for the classical system of point charges

V. I. Krylov
Pacific State University, 136 Pacific str., Khabarovsk, 680035, Russia
E-mail: krylov_vladimir@mail.ru

Action for the system of point-charges is constructed, and energy-momentum tensor of electromagnetic field of point-charges is found. The influence of a charge on itself and the infinite energy of point-charge field are absent in this action. It is shown that such modified action allows to obtain Maxwell's equations (for point-charges).

PACS: 03.50.De

Keywords: point-charges, energy-momentum tensor, electromagnetic field, electromagnetic stress tensor, energy, energy flux.

Bibliography — 4 references. *Received February 24, 2010*