

УДК 537.533

НОВЫЙ ВИД ВОЛНОВОГО ПАКЕТА — ОБОБЩЕНИЕ КОГЕРЕНТНОГО СОСТОЯНИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА

В. О. Турин

Московский физико-технический институт, Москва, Россия

Матричное уравнение типа Рикатти позволяет рассчитывать изменение параметров трехмерного волнового пакета гауссового типа при его движении во внешнем, достаточно слабо меняющемся в пространстве, потенциале. В работе показано, что одномерный аналог этого уравнения описывает динамику параметров одномерного волнового пакета не только определяемого гауссовой волновой функцией, соответствующей координатному представлению когерентного (а в частности основного) состояния квантового гармонического осциллятора, но и волновой функцией, получаемой умножением гауссовой функции на полином Эрмита n -й степени, что соответствует волновой функции осциллятора в стационарном состоянии с главным квантовым числом n . Отметим, что если осциллятор находится в когерентном состоянии, но при этом ширина гауссового волнового пакета осциллирует, то вместо термина "когерентное состояние" часто употребляют термин "сжатое состояние". Таким образом, сделано обобщение когерентного (сжатого) состояния осциллятора. В случае квадратичного потенциала это уравнение проинтегрировано аналитически. Получены зависимости от времени параметра, определяющего размеры пакета, для отталкивающего и притягивающего квадратичных потенциалов, а также для случая однородного поля. Выведено несколько полезных соотношений.

Введение

Теория когерентных (сжатых) состояний является современным и активно развивающимся разделом теоретической физики обладает широкой общностью применения, так как по сути является разделом абстрактной теории квантового гармонического осциллятора. В основном, ее приложением является квантовая оптика. Как правило, теория когерентных (сжатых) состояний рассматривается в представлении вторичного

квантования [1]. В данной работе развивается и обобщается теория когерентных (сжатых) состояний в координатном представлении. Координатный подход обладает большой наглядностью и позволяет составить качественные представления о динамике волновой функции. В координатном представлении когерентное состояние описывается волновой функцией гауссового типа, совпадающей по виду с волновой функцией основного состояния квантового гармонического осциллятора [2]. В случае, когда ширина волнового пакета осциллирует, вместо термина "когерентное состояние" часто употребляют термин "сжатое состояние". Основным уравнением теории когерентных (сжатых) состояний в координатном представлении является уравнение типа Рикатти. В работах [3—7] это уравнение использовалось для расчета динамики гауссовых волновых пакетов электронов и других частиц во внешних потенциалах. В работе [8] подобное уравнение приводится для движения электронного волнового пакета в произвольных электромагнитных полях. Ниже показано, что это уравнение описывает динамику параметров одномерного волнового пакета не только определяемого гауссовой волновой функцией, соответствующей когерентному (сжатому) (в частности основному) состоянию квантового гармонического осциллятора, но и волновой функцией, получаемой умножением гауссовой функции на полином Эрмита n -й степени, что соответствует стационарному состоянию осциллятора с главным квантовым числом n и является обобщением когерентного (сжатого) состояния. Уравнение типа Рикатти интегрируется аналитически в случае притягивающего и отталкивающего квадратичных потенциалов, а также в случае однородного поля.

Вид волновой функции обобщенно-когерентного состояния в координатном представлении

Одномерное движение частицы в квадратичном потенциале

$$U(x) = \frac{U''x^2}{2}, \quad U'' = \pm m\omega^2, \quad (1)$$

где (+) соответствует случаю притягивающего потенциала $U'' > 0$; (—) соответствует случаю отталкивающего потенциала $U'' < 0$ можно описать волновым пакетом вида:

$$\Psi(x, t) a(x, t) \exp\left\{i \frac{S(x, t)}{\hbar}\right\}, \quad (2)$$

где

$$a(x, t) = C(t) H_n \left[\sqrt{\frac{2F_1(t)}{\hbar}} (x - x_0(t)) \right] \exp\left\{-\frac{F_1(t)}{\hbar} (x - x_0(t))^2\right\}, \quad (3)$$

$$S(x, t) = -F_2(t) (x - x_0(t))^2 + p_0(t) (x - x_0(t)) - E(t)t, \quad (4)$$

H_n — полином Эрмита степени n . Отметим, что модуль волновой функции получается умножением гауссовой функции на полином Эрмита n -й степени, что по виду совпадает с модулем волновой функции стационарного состояния осциллятора с главным квантовым числом n . Проверку правильности выражений (3), (4) и вид уравнений определяющих динамику параметров волнового пакета F_1 и F_2 нетрудно получить прямой подстановкой выражения (2), с учетом (3) и (4), в нестационарное уравнение Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \pm \frac{m\omega^2 x^2}{2} \Psi. \quad (5)$$

Заметим, что вместо параметра волнового пакета F_1 , можно ввести полуширину волнового пакета a_1 по формуле

$$F_1 = \frac{\hbar}{2a_1^2}.$$

Введем обозначения, используемые в дальнейшем:

$$F_{1c} = \frac{m\omega}{2} = \frac{\hbar}{2a_c^2}, \quad F_{1\min} = \frac{\hbar}{2a_{\max}^2}, \quad F_{1\max} = \frac{\hbar}{2a_{\min}^2}. \quad (6)$$

Отметим, что a_c соответствует полуширине основного состояния осциллятора с собственной частотой ω .

Подстановка (2) в уравнение Шредингера (5) дает вместо одного уравнения в частных производных несколько обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих изменение со временем параметров волнового пакета.

Величины $x_0(t)$ и $p_0(t)$, соответствующие координате и импульсу центра масс пакета (2), подчиняются классическим гамильтоновым уравнениям:

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{p_0}{m}, \quad \frac{dp_0}{dt} = \mp m\omega^2 x_0.$$

Величины $E(t)$ и $C(t)$ в (3) и (4) определяются как:

$$E(t) = \frac{1}{i} \int_0^t dt' \left(U_0 - \frac{p_0^2}{2m} + \frac{2\hbar F_1}{m} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right), \quad \text{где } U_0 = \frac{m\omega^2 x_0^2}{2},$$

$$C(t) = \left(\frac{m\omega_0}{\pi \hbar} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \exp \left\{ \frac{1}{m} \int_0^t F_2 dt' \right\}, \quad \text{где } \omega_0 = \frac{2F_1(t=0)}{m}.$$

Вместо действительных параметров F_1 и F_2 , определяющих продольные распределения модуля и фазы волнового пакета, можно ввести комплексный параметр F

$$F = F_1 + iF_2.$$

Параметр F подчиняется уравнению типа Рикатти.

$$i \frac{dF}{dt} = \frac{2}{m_e} F^2 \mp \frac{1}{2} m\omega^2. \quad (7)$$

Уравнение (7) эквивалентно системе из двух уравнений относительно действительных переменных F_1 и F_2 :

$$\begin{cases} \frac{dF_1}{dt} = \frac{4}{m} F_1 F_2 \\ \frac{dF_2}{dt} = \frac{2}{m} (F_2^2 - F_1^2) \pm \frac{1}{2} m \omega^2 \end{cases} \quad (8)$$

Уравнения (8) полностью определяют динамику параметров F_1 и F_2 одномерного волнового пакета (2) в квадратичном потенциале (1).

Связь между параметрами F_1 и F_2

Замечательным оказывается тот факт, что система уравнений (8) интегрируется аналитически. Эти уравнения можно переписать как

$$\begin{cases} \frac{d \ln(F_1 / A)}{dt} = \frac{4}{m_e} F_2 \\ \frac{d(F_2 / A)^2}{dt} = \frac{4}{m_e} F_2 \left((F_2 / A)^2 - \exp[2 \ln(F_1 / A)] \right) \pm F_2 \frac{m \omega^2}{A^2}, \end{cases}$$

где A — неиграющая роли, обезразмеривающая константа. Поделив второе уравнение на первое, получим:

$$\frac{d(F_2/A)^2}{d \ln(F_1/A)} = (F_2/A)^2 - \exp[2 \ln(F_1/A)] \pm \left(\frac{m \omega / 2}{A} \right)^2.$$

Получено уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = y - e^{2x} \pm \left(\frac{m \omega / 2}{A} \right)^2,$$

где

$$y = (F_2/A)^2, \quad x = \ln(F_1/A).$$

Это уравнение имеет общее решение:

$$y = C e^x - e^{2x} \mp \left(\frac{m \omega / 2}{A} \right)^2. \quad (9)$$

Или, возвращаясь к F_1 и F_2 , из (9) можно получить связь между ними:

$$(F_1 - F_{10})^2 + F_2^2 = F_{10}^2 \mp \left(\frac{m \omega}{2} \right)^2, \quad (10)$$

где $F_{10} = AC/2$ некоторая константа. Это ни что иное, как уравнение окружности. Знак (+) соответствует $U'' < 0$, а знак (-) соответствует $U'' > 0$.

Рассмотрим случай $U'' < 0$. Уравнение окружности имеет вид

$$(F_1 - F_{10})^2 + F_2^2 = F_{10}^2 + \left(\frac{m\omega}{2}\right)^2,$$

где $F_1 = F_{10}$, $F_2 = 0$ — центр окружности; $R = \sqrt{F_{10}^2 + \left(\frac{m\omega}{2}\right)^2}$ — радиус окружно-

сти (рис. 1, а). Заметим, что $R > F_{10}$. При $F_1 = 0$ получаем $F_2 = m\omega/2$ вне зависимости от значения F_{10} . Заметим, что F_1 по своему физсмыслу не может быть отрицательной величиной, а нулевое значение F_1 соответствует бесконечно большому размеру пакета. Стрелкой показано направление, в котором происходит изменение F_1 и F_2 с течением времени. Убедиться в правильности указанного направления можно рассмотрев систему уравнений (8).

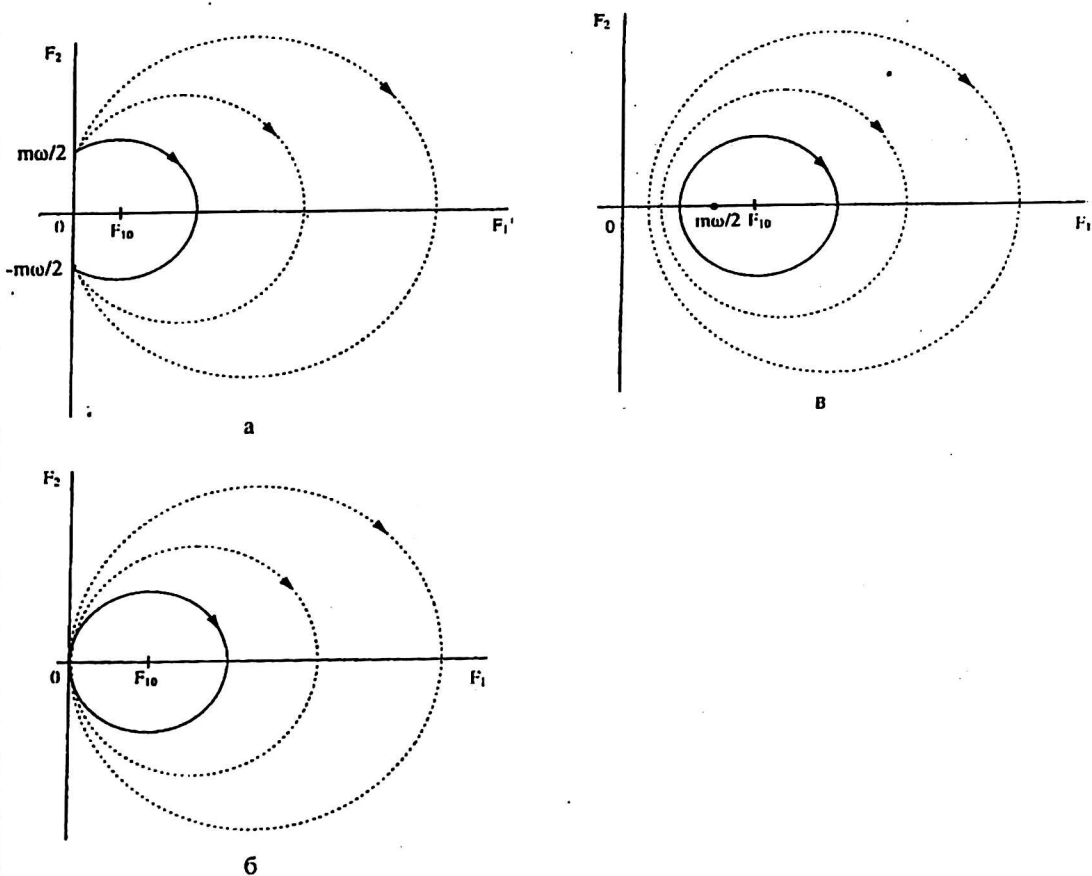


Рис. 1. Модуль F_1 и фаза F_2 волнового пакета:
 а — $U'' < 0$; б — $U'' = 0$; в — $U'' > 0$

Рассмотрим случай $U'' = 0$. Уравнение окружности имеет вид

$$(F_1 - F_{10})^2 + F_2^2 = F_{10}^2,$$

где $F_1 = F_{10}$, $F_2 = 0$ — центр окружности; $R = F_{10}$ — радиус окружности (рис. 1, б). При $F_2 = 0$ имеем $F_1 = 0$ или $F_1 = 2F_{10}$.

Рассмотрим случай $U'' > 0$. Уравнение окружности имеет вид:

$$(F_1 - F_{10})^2 + F_2^2 = F_{10}^2 - \left(\frac{m\omega}{2}\right)^2,$$

где $F_1 = F_{10}$, $F_2 = 0$ — центр окружности; $R = \sqrt{F_{10}^2 - \left(\frac{m\omega}{2}\right)^2}$ — радиус окружности (рис. 1, в). Заметим, что $R < F_{10}$. При $F_2 = 0$ получаем $F_1 = F_{10} \pm \sqrt{F_{10}^2 - \left(\frac{m\omega}{2}\right)^2}$. Таким образом, в этом случае значения F_1 не обращаются в нуль ни при каких значениях F_2 . Заметим, что при $F_{10} = m\omega/2$ радиус $R = 0$, т. е. в этом случае всегда $F_1 = F_{10}$, а $F_2 = 0$, т. е. осцилляции ширины пакета отсутствуют.

Зависимость размеров пакета от времени

Из уравнения (8) можно выразить F_2 через F_1 :

$$F_2 = \pm \sqrt{-F_1^2 + 2F_{10}F_1 \mp \left(\frac{m\omega}{2}\right)^2}.$$

Знак (+) перед корнем соответствует верхней части окружности, (-) — нижней. Знак (-) под корнем соответствует $U'' > 0$, т. е. притягивающему квадратичному потенциалу. Знак (+) под корнем соответствует $U'' < 0$, т. е. отталкивающему квадратичному потенциалу. Используя первое уравнение из системы (13), можно записать:

$$\int_{F_0}^{F_1} \frac{dF_1}{F_1 \sqrt{-F_1^2 + 2F_{10}F_1 \mp \left(\frac{m\omega}{2}\right)^2}} = \pm \frac{4}{m} \int_0^t dt.$$

Интеграл

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad (11)$$

является табличным и принимает различные значения в зависимости от параметра $\Delta = 4ac - b^2$ и знака c .

Рассмотрим случай расталкивающего потенциала $U'' < 0$. Пусть в начальный момент времени $F_2 = 0$, а $F_1 = F_{1\max}$, т. е. положим, что в начальный момент времени размеры волнового пакета минимальны. Интеграл приобретает вид

$$\int_{F_{1\max}}^{F_1} \frac{dF_1}{F_1 \sqrt{-F_1^2 + 2F_{10}F_1 + \left(\frac{m\omega}{2}\right)^2}} = -\frac{4}{m} t. \quad (12)$$

Имеем $\Delta = -4\left(F_{10}^2 + (m\omega/2)^2\right) < 0$, $c = (m\omega/2)^2 > 0$. Для этого случая интеграл (12) имеет вид

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left(\frac{2\sqrt{c(ax^2 + bx + c)}}{x} + \frac{2c}{x} + b \right) + C.$$

После некоторых преобразований получаем:

$$\begin{aligned} \frac{m\omega/2}{F_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{F_{1\max}}{m\omega/2} - \frac{m\omega/2}{F_{1\max}} \right) + \sqrt{\left(\frac{m\omega/2}{F_1}\right)^2 + \frac{m\omega/2}{F_1} \left(\frac{F_{1\max}}{m\omega/2} - \frac{m\omega/2}{F_{1\max}} \right)} - 1 = \\ = \frac{1}{2} \left[\frac{F_{1\max}}{m\omega/2} + \frac{m\omega/2}{F_{1\max}} \right] \exp\{2\omega t\}. \end{aligned}$$

Переходя от параметров F к полуширине пакета, получаем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_1}{a_c}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{a_c}{a_{\min}}\right)^2 - \left(\frac{a_{\min}}{a_c}\right)^2 \right) + \sqrt{\left(\frac{a_1}{a_c}\right)^4 + \left(\frac{a_1}{a_c}\right)^2 \left(\left(\frac{a_c}{a_{\min}}\right)^2 - \left(\frac{a_{\min}}{a_c}\right)^2 \right)} - 1 = \\ = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{a_c}{a_{\min}}\right)^2 + \left(\frac{a_{\min}}{a_c}\right)^2 \right) \exp(2\omega t). \end{aligned}$$

Видно, что при больших временах это выражение переходит в

$$\frac{a_1}{a_c} \cong \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{a_c}{a_{\min}}\right)^2 - \left(\frac{a_{\min}}{a_c}\right)^2 \right]} \exp(\omega t).$$

Рассмотрим случай однородного поля $U'' = 0$. Пусть в начальный момент времени $F_2 = 0$, а $F_1 = F_{1\max}$, т. е. положим, что в начальный момент времени размеры волнового пакета минимальны. Имеем:

$$\int_{F_{1\max}}^{F_1} \frac{dF_1}{F_1 \sqrt{-F_1^2 + 2F_{10}F_1}} = -\frac{4}{m} t.$$

Это табличный интеграл

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{ax^2 + bx}} = -\frac{2}{bx} \sqrt{ax^2 + bx}.$$

Получаем

$$\frac{1}{F_1} = \frac{1}{F_{1\max}} + F_{1\max} \frac{4}{m^2} t^2$$

или

$$a_1 = a_{\min} \sqrt{1 + \frac{t^2}{\tau^2}}, \text{ где } \tau = \frac{ma_{\min}^2}{\hbar}.$$

Отметим, что τ является характерным временем для квантово-механического расширения свободного одноэлектронного волнового пакета. При больших временах имеем

$$a_1 \cong a_{\min} \frac{t}{\tau},$$

т. е. скорость естественного квантово-механического расширения волнового пакета, при достаточно больших временах, постоянна и равна:

$$v = \frac{da_1}{dt} \cong \frac{\hbar}{ma_{\min}}.$$

Рассмотрим случай притягивающего потенциала $U'' > 0$. Пусть в начальный момент времени $F_2 = 0$, а $F_1 = F_{1\min}$, т. е. положим, что в начальный момент времени размеры волнового пакета максимальны. Интеграл приобретает вид

$$\int_{F_{1\min}}^{F_1} \frac{dF_1}{F_1 \sqrt{-F_1^2 + 2F_{10}F_1 - \left(\frac{m\omega}{2}\right)^2}} = \frac{4}{m} t.$$

Имеем $\Delta = -4(F_{10}^2 - (m\omega/2)^2) < 0$, $c = -(m\omega/2)^2 < 0$. Для этого случая интеграл (11) имеет вид

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{bx + 2c}{x\sqrt{-\Delta}}.$$

После некоторых преобразований, получаем:

$$\frac{1}{F_1} = \frac{1}{m\omega/2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{F_{1\min}}{m\omega/2} - \frac{m\omega/2}{F_{1\min}} \right) + \left(\sqrt{\left(\frac{1}{2} \left(\frac{F_{1\min}}{m\omega/2} - \frac{m\omega/2}{F_{1\min}} \right) \right)^2 - 1} \right) \cos 2\omega t \right).$$

Переходя к полуширинам, получаем:

$$\left(\frac{a_1}{a_c} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{a_{\max}}{a_c} \right)^2 + \left(\frac{a_c}{a_{\max}} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{a_{\max}}{a_c} \right)^2 - \left(\frac{a_c}{a_{\max}} \right)^2 \right) \cos 2\omega t.$$

Отметим, что период изменения полуширины волнового пакета в два раза меньше периода изменения координаты центра волнового пакета в соответствующем квадратичном потенциале.

Для F_2 получим соотношение:

$$F_2 = F_1 \left(\sqrt{\left(\frac{1}{2} \left(\frac{F_{1\min}}{m\omega/2} - \frac{m\omega/2}{F_{1\min}} \right) \right)^2 - 1} \right) \sin 2\omega t.$$

Таким образом, получены временные зависимости параметра F_1 и полуширины волнового пакета a_c от времени в случае отталкивающего и притягивающего потенциалов, а также в случае однородного поля.

Выведем для случая $U'' > 0$ одно важное соотношение. Заметим, что

$$F_{1\max} = F_{10} + R = F_{10} + \sqrt{F_{10}^2 - (m\omega/2)^2},$$

$$F_{1\min} = F_{10} - R = F_{10} - \sqrt{F_{10}^2 - (m\omega/2)^2}.$$

Теперь нетрудно получить выражение

$$F_{1\min} F_{1\max} = \left(\frac{m\omega}{2} \right)^2.$$

Используя соотношения (6), это выражение можно переписать в виде

$$a_{\min} a_{\max} = a_c^2, \tag{13}$$

т. е. произведение минимальной и максимальной полуширин пакета в случае притягивающего квадратичного потенциала равно квадрату полуширины гауссовой волновой функции основного состояния осциллятора.

На рис. 2, а показана осцилляция ширины квадрата модуля волновой функции осциллятора в когерентном (сжатом) состоянии ($n = 0$). Осцилляция центра масс пакета отсутствует. Волновая функция гауссового типа, совпадает по виду с волновой функцией основного состояния осциллятора и соответствует "сжатому вакууму". На рис. 2, б показана осцилляция ширины квадрата модуля волновой функции осциллятора в обобщенно-когерентном (сжатом) состоянии. Осцилляция центра масс пакета также отсутствует. Представлена волновая функция, совпадающая по виду со стационарным состоянием осциллятора с главным квантовым числом $n = 1$.

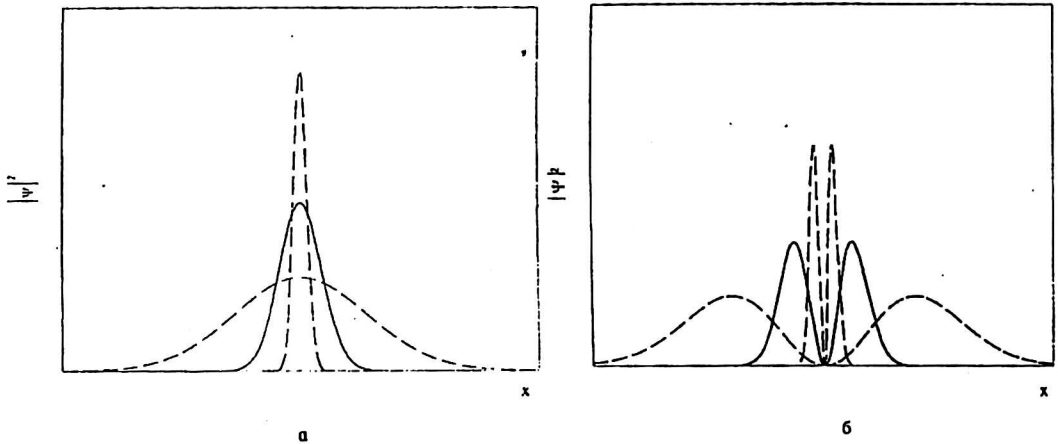


Рис. 2. Осцилляция ширины квадрата модуля волновой функции осциллятора: а — в когерентном (сжатом) состоянии ($n = 0$); б — в обобщенно-когерентном (сжатом) состоянии. Представлена волновая функция, совпадающая по виду со стационарным состоянием осциллятора с главным квантовым числом $n = 1$

Гидродинамическая аналогия

Проанализируем вид пакета (2) с точки зрения гидродинамической аналогии для одноэлектронной системы [9]. Гидродинамическая модель дает адекватное описание одноэлектронной квантово-механической системы и позволяет сформировать качественные представления о динамике одноэлектронной волновой функции. В гидродинамической модели квадрату модуля волновой функции соответствует плотность среды, градиент фазы волновой функции вместе с векторным потенциалом определяют распределение скорости в ней:

$$\rho(\vec{r}) = m a^2(\vec{r}), \quad v(\vec{r}) = \frac{\vec{p}}{m} = \frac{1}{m} \left(\nabla S + \frac{e}{c} \vec{A} \right).$$

Нестационарное уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi,$$

с гамильтонианом:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - e\varphi,$$

учитывающим взаимодействие электрона с электромагнитным полем, без учета спина, эквивалентно двум уравнениям:
уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

и уравнению типа Эйлера для идеальной сжимаемой жидкости

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e}{m} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi \right) - \frac{1}{c} \frac{e}{m} \vec{v} \operatorname{rot} \vec{A} + \frac{\hbar^2}{4m^2} \nabla \left[\frac{\Delta \rho}{\rho} - \frac{1}{2} \left(\frac{\nabla \rho}{\rho} \right)^2 \right],$$

которое выражает второй закон Ньютона для элемента среды, и которое, с учетом известных соотношений, может быть переписано в виде

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{m} e \vec{E} - \frac{1}{m} \frac{e}{c} \vec{v} \vec{H} + \frac{\hbar^2}{4m^2} \nabla \left[\frac{\Delta \rho}{\rho} - \frac{1}{2} \left(\frac{\nabla \rho}{\rho} \right)^2 \right].$$

В уравнении типа Эйлера, помимо классических удельных сил, появляется сила пропорциональная градиенту удельной квантово-механической энергии не имеющей классического аналога:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{m} e \vec{E} - \frac{1}{m} \frac{e}{c} \vec{v} \vec{H} + \frac{\hbar^2}{4m^2} \nabla \left[\frac{\Delta \rho}{\rho} - \frac{1}{2} \left(\frac{\nabla \rho}{\rho} \right)^2 \right].$$

Видно, что эта удельная энергия пропорциональна квадрату отношения постоянной Планка к массе электрона и зависит от плотности среды.

Для распределения скорости в пакете (2) получаем

$$v(x) = \frac{p_0(t)}{m} - \frac{2F_2(t)}{m} (x - x_0(t)).$$

В системе отсчета, связанной с центром масс пакета, скорость распределена линейно

$$v(x') = -\frac{2F_2(t)}{m} x'. \quad (14)$$

Видно, что при $F_2 > 0$ пакет сжимается, а при $F_2 < 0$ пакет расширяется. Нетрудно получить выражение для распределения удельной квантово-механической энергии (16) в пакете вида (2):

$$\varepsilon_q = -\frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{a''_{xx}}{a} = \frac{\hbar \omega_1}{m} \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{\hbar \omega_1}{2m} (x - x_0)^2, \text{ где } \omega_1 = \frac{2F_1}{m}. \quad (15)$$

Отметим, что в системе связанной с центром масс имеем отрицательное и квадратичное распределение. Отметим также, что в случае основного состояния осциллятора, квадратичный член в распределении удельной энергии (15) компенсирует квадратичное распределение удельной потенциальной энергии, что и обеспечивает стационарность основного состояния. Распределение скорости (14) и удельной энергии (15) для расширяющегося гауссового пакета показано на рис. 3.

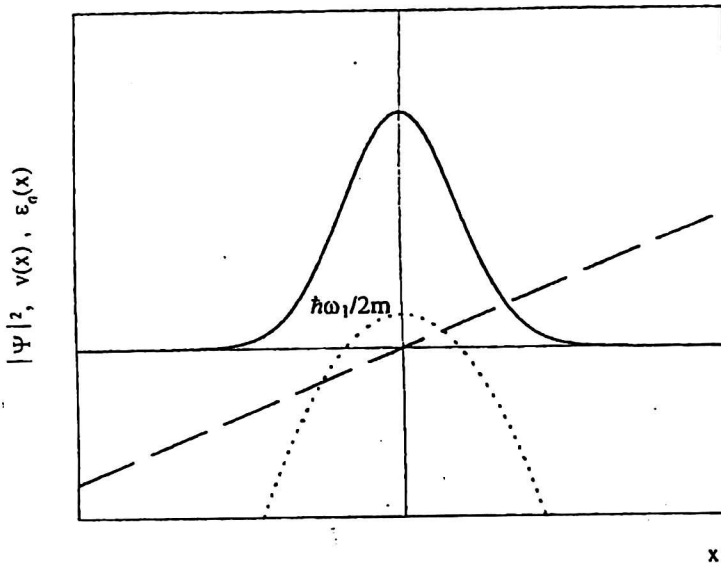


Рис. 3. В системе отсчета, связанной с центром масс пакета, скорость распределена линейно, а квантово-механическая удельная энергия — отрицательна и распределена квадратично

Заклучение

Таким образом, в работе показано, что одномерное уравнение типа Рикатти, являющееся основным уравнением теории когерентных (сжатых) состояний в координатном представлении, описывает динамику параметров одномерного волнового пакета не только определяемого гауссовой волновой функцией, соответствующей когерентному (сжатию) (в частности основному) состоянию квантового гармонического осциллятора, но и волновой функцией получаемой умножением гауссовой функции на полином Эрмита n -й степени, что соответствует волновой функции осциллятора с главным квантовым числом n . Таким образом, сделано обобщение когерентного (сжатого) состояния одномерного осциллятора и получена картина динамики осциллятора в когерентном (сжатом) и обобщенно-когерентном (обобщенно-сжатом) состоянии в координатном представлении. Показано, что в случае квадратичного потенциала это уравнение интегрируется аналитически. Получены зависимости от времени параметра, определяющего размеры пакета, для отталкивающего и притягивающего квадратичных потенциалов, а также для случая однородного поля. Приведем здесь асимптотики. В случае притягивающего квадратичного потенциала ($U'' > 0$):

$$a(t) \sim \left[1 + \delta^2 \cos(2\omega t) \right], \text{ где } \omega = (U''/m)^{1/2}. \quad (16)$$

Для однородного поля ($U'' = 0$) и для $t \gg \tau$, имеем:

$$a(t) \sim a_{\min} t/\tau, \text{ где } \tau = m a_{\min}^2/\hbar.$$

Для отталкивающего квадратичного потенциала ($U'' < 0$) и для $t \gg \omega^{-1}$ имеем:

$$a(t) \sim \exp(\omega t), \text{ где } \omega = (|U''|/m)^{1/2}.$$

С точки зрения гидродинамической аналогии проанализирован вид волнового пакета, соответствующего обобщенно-когерентному состоянию. Сформированы качественные представления о координатном представлении волновой функции и о ее динамике в когерентном (сжатом) и обобщенно-когерентном состоянии. Согласно этим представлениям, волновая функция обобщенно-когерентного состояния осциллятора в координатном представлении представляет собой волновой пакет, совпадающий по виду с волновой функцией стационарного состояния осциллятора с главным квантовым числом n . В случае притягивающего квадратичного потенциала центр пакета может осциллировать вокруг положения равновесия с частотой гармонического осциллятора, подобно точечной классической частице. Ширина пакета при этом может осциллировать с удвоенной частотой. Осцилляции координаты центра пакета и осцилляции его ширины происходят независимо и могут иметь произвольный сдвиг по фазе. Минимальный и максимальный размеры пакета связаны между собой соотношением (45), где a_c соответствует размеру основного или когерентного (без осцилляции ширины, но с осцилляцией координаты центра) состояния осциллятора.

Литература

1. В у к о в В. Р. // Usp. Fiz. Nauk. 1993. V. 163, № 9. P. 89.
2. Л о н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. 1989.
3. H e l l e r E. J. // J. Chem. Phys. 1975. V. 62. P. 1544.
4. H e l l e r E. J. // J. Chem. Phys. 1978. V. 68. P. 2066.
5. Б у к о в В. П. Сжатый свет и неклассические движения в механике // УФН. 1993. Т. 163. Вып. 9. С. 89—99.
6. В у к о в В. Р., P r o k h o r o v A. M., T u r i n V. O., C h i n S. L. Electronic wave packets in vacuum photodetectors and the possibility of observing them // JETP Lett. 1996. V. 63. № 6. P. 429—432.
7. В у к о в В. Р., T u r i n V. O. The motion of electron wave packets in vacuum devices and the sharpening of these wave packets due to coulomb interaction // Laser Physics. 1997. V. 7. № 4. P. 1—5.
8. В у к о в В. Р. Motion of an electronic wave packet in an electromagnetic field // JETP Lett. 1996. V. 64. № 8. P. 561—566.
9. А л е к с е в Б. В., А б а к у м о в А. И. Об одном подходе к решению уравнения Шредингера // ДАН СССР. 1982. Т. 262. Вып. 5. С. 1100—1102.

NEW TYPE OF THE WAVE PACKET — GENERALIZATION OF THE OSCILLATOR COHERENT STATE

V. O. Turin

Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia

In coordinate representation the coherent state of oscillator is the wave packet with shape similar to the general state. If its width oscillated they say that this is the squeezed state. The time evolution of such packet is given by an equation of the Riccati type. It is shown that the packet with the shape similar to the n -state of oscillator described by this equation to. That analitically integrated for attractive and repulsive potentials. Hidrodynamics analogy is applied to analyse such type of wave packet.