УДК 530.1+536.75

О возможности возникновения энтропийных колебаний в нелинейных процессах

В. И. Шаповалов

Для систем, находящихся под воздействием энтростата, показана возможность возникновения энтропийных колебаний в нелинейных процессах.

PACS: 05.65.+b; 05.70.Ln

Ключевые слова: система, энтропийные колебания, нелинейные процессы.

Введение

В рамках представлений об энтропии как о количественной мере беспорядка в работах [1—3] теоретически была показана возможность возникновения энтропийных колебаний в линейных процессах. Ниже подход, изложенный в указанных работах, будет расширен на нелинейные процессы.

Вывод о возможности энтропийных колебаний нельзя отнести к разряду очевидных. Действительно, в соответствии с известной теоремой о минимальном производстве энтропии в линейных процессах имеет место неравенство:

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} \le 0, \qquad (1)$$

где $P_i = \int \sigma_i dV$ — производство энтропии в системе;

σ_i — локальное производство энтропии;

V — объем системы.

Напомним, что согласно уравнению баланса σ_i является частью σ — скорости изменения локальной энтропии:

$$\sigma = \frac{ds}{dt} = -\mathrm{div}J + \sigma_i = \sigma_e + \sigma_i, \qquad (2)$$

где $s = dS/dV$ — локальная энтропия;

S — энтропия системы;

J — поток энтропии через площадку поверхности системы;

σ_e — часть скорости изменения локальной энтропии, обусловленного взаимодействием системы с внешней средой.

Проблема состоит в том, что предполагаемое уравнение энтропийных колебаний должно включать в себя производную от энтропии второго, как

Шаповалов Виктор Иванович, доцент, зав. кафедрой.
Волгоградский филиал Московского гуманитарно-экономического института.
Россия, 400048, г. Волгоград, шоссе Авиаторов, 8.
Тел. (8442) 71-67-98. E-mail: shavi@rol.ru

Статья поступила в редакцию 14 мая 2009 г.

минимум, порядка ($\partial^2 S/\partial t^2$). Известно, что в уравнении колебаний вторая производная должна периодически изменять знак с течением времени. Однако неравенство (1), казалось бы, запрещает это: знак второй производной от энтропии, изменение которой обусловлено внутренними процессами в системе, ($\partial P_i/\partial t = \partial_i^2 S/\partial t^2$) должен быть всегда "≤ 0".

В работах [3, 4] для систем, взаимодействующих с энтростатом*, была доказана теорема, согласно которой в линейных процессах неравенство (1) может быть заменено более общим неравенством:

$$\frac{\partial |P|}{\partial t} \le 0, \tag{3}$$

где

$$P = \int \sigma dV = \frac{dS}{dt} \text{ —} \tag{4}$$

скорость изменения энтропии системы; σ определено в уравнении (2).

Как видим, выражение (3) допускает возможность изменения знака второй производной от энтропии ($\partial P/\partial t = \partial^2 S/\partial t^2$). В результате для систем, находящихся под воздействием энтростата, было получено следующее уравнение энтропийных колебаний [1—4]:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial\ t^2} + \beta\frac{\partial S}{\partial t} + \eta S = \eta S_\alpha, \tag{5}$$

где β и η — коэффициенты линейного разложения;
S_α — стационарное значение энтропии системы, имеющей степень открытости α**.

При выводе уравнения (5) существенным являлось предположение о линейности процессов, происходящих в системе. В настоящей работе будет показано, что и в нелинейных процессах вблизи стационарного состояния могут возникать энтропийные колебания.

Энтропийные колебания в нелинейных процессах

Запишем известные соотношения [7]:

$$\sigma = \sum_k X_k I_k; \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial t} = \frac{\partial_X \sigma}{\partial t} + \frac{\partial_J \sigma}{\partial t}, \tag{6}$$

где

$$\frac{\partial_X \sigma}{\partial t} = \sum_k \frac{\partial X_k}{\partial t} J_k; \quad \frac{\partial_J \sigma}{\partial t} = \sum_k X_k \frac{\partial J_k}{\partial t}.$$

Здесь $X_k = \partial s/\partial a_k$ — обобщенная термодинамическая сила;
$I_k = da_k/dt$ — обобщенный термодинамический поток;
a_k — некоторый параметр системы;
$\sigma = ds/dt$ (см. (2)).

Под нелинейным процессом мы будем понимать процесс, в котором в разложении функции $I_k(X_k)$ нельзя пренебречь высшими степенями по X_k, т. е. $I_k(X_k)$ является нелинейной функцией.

Для системы, состоящей из нескольких компонент ($\gamma = 1, 2, \ldots, n$), запишем формулу Гиббса:

$$T\, d\hat{s}/dt = de/dt + p\, dv/dt - \sum_\gamma \mu_\gamma \frac{dN_\gamma}{dt}, \tag{7}$$

где $\hat{s} = \rho^{-1}s$ — удельная энтропия;
ρ — плотность;
e — удельная внутренняя энергия;
$v = \rho^{-1}$ — удельный объем;
p — давление;
μ_γ — удельный химический потенциал компоненты;
N_γ — концентрация компоненты ($\sum_\gamma N_\gamma = 1$).

Воспользуемся уравнением непрерывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\dot{x}_j)}{\partial x_j} = 0, \tag{8}$$

где x_j — координата;
$\dot{x}_j = dx_j/dt$.

Нетрудно убедиться, что

$$\rho\frac{d\hat{s}}{dt} = \frac{\partial(\rho\hat{s})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\hat{s}\dot{x}_j)}{\partial x_j}.$$

Пусть система является неподвижной и в ней отсутствует конвекция: $\dot{x}_j = 0,\ d/dt = \partial/\partial t$.

Тогда

$$\rho\frac{d\hat{s}}{dt} = \frac{\partial(\rho\hat{s})}{\partial t} = \sigma,$$

и (7) преобразуется к виду

$$\sigma = \rho\left(T^{-1}\frac{\partial e}{\partial t} - \sum_\gamma \mu_\gamma T^{-1}\frac{\partial N_\gamma}{\partial t}\right).$$

---

* *Энтростатом* называется внешняя среда, изменением энтропии которой можно пренебречь по сравнению с изменением энтропии исследуемой системы [1, 3, 5].

** *Степенью открытости* α называется феноменологический параметр, количественно характеризующий величину воздействия энтростата на систему [5, 6].

Здесь мы учли, что $\partial v/\partial t = \rho^{-2}\,\partial\rho/\partial t = 0$ (см. (8) при $\dot{x}_j = 0$).

Далее мы воспользуемся приведенной в [7] методикой вычислений. В указанной работе эта методика была применена для вычислений производства энтропии (локального и полного, обозначенных здесь как σ_i и P_i, соответственно). Мы же применим ее для величин σ и P, определенных в (2) и (4).

С учетом (6) найдем

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = \underbrace{\rho\frac{\partial T^{-1}}{\partial t}\frac{\partial e}{\partial t} - \rho\sum_{\gamma}\frac{\partial(\mu_\gamma T^{-1})}{\partial t}\frac{\partial N_\gamma}{\partial t}}_{\sum\frac{\partial X_k}{\partial t}J_k} +$$

$$\underbrace{+\rho T^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial e}{\partial t}\right) - \rho\sum_{\gamma}(\mu_\gamma T^{-1})\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial N_\gamma}{\partial t}\right)}_{\sum X_k\frac{\partial J_k}{\partial t}} =$$

$$= -\frac{\rho}{T}\left[\frac{c_v}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^2 + \sum_{\gamma\beta}\mu_{\gamma\beta}\frac{\partial N_\gamma}{\partial t}\frac{\partial N_\beta}{\partial t}\right] +$$

$$+\sum_k X_k\frac{\partial J_k}{\partial t} = \frac{\partial_X\sigma}{\partial t} + \frac{\partial_J\sigma}{\partial t},$$

где $\mu_{\gamma\beta} = (\partial\mu_\gamma/\partial N_\beta)_{T,p}$ [7];

$$\frac{\partial_X\sigma}{\partial t} = -\frac{\rho}{T}\left[\frac{c_v}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^2 + \sum_{\gamma\beta}\mu_{\gamma\beta}\frac{\partial N_\gamma}{\partial t}\frac{\partial N_\beta}{\partial t}\right].$$

Откуда (см. (4))

$$\frac{\partial_X P}{\partial t} = \int\frac{\partial_X\sigma}{\partial t}dV =$$
$$= -\int\frac{\rho}{T}\left[\frac{c_v}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^2 + \sum_{\gamma\beta}\mu_{\gamma\beta}\frac{\partial N_\gamma}{\partial t}\frac{\partial N_\beta}{\partial t}\right]dV. \quad (9)$$

В (9) выражение, стоящее в квадратных скобках, представляет собой квадратичную форму. Следовательно, знак $\partial_X P/\partial t$ зависит только от знаков c_v и $\mu_{\gamma\beta}$. Если состояние системы является устойчивым, то $c_v > 0$ и $\mu_{\gamma\beta} > 0$ [7].

Для систем, находящихся под воздействием энтростата, можно воспользоваться выводами, полученными в работах [1, 6]. В частности, для таких систем было введено понятие критического уровня организации $|\Delta S_\alpha^-|$ — количественной меры организации системы в стационарном состоянии (α — степень открытости системы). При этом было показано, что если система организована выше своего критического уровня, то в ней преобладают процессы, увеличивающие энтропию, если ниже – процессы, уменьшающие энтропию (чтобы увеличить или уменьшить величину критического уровня, необходимо, соответственно, увеличить или уменьшить степень открытости системы).

Итак, мы имеем два случая.

1. Система организована выше своего критического уровня $|\Delta S_\alpha^-|$. В ней преобладают процессы, увеличивающие энтропию ($dS > 0$), и, следовательно, $P > 0$. В этом случае, согласно (9),

$$\frac{\partial_X P}{\partial t} \le 0 \quad (10)$$

(знак “=” выполняется в стационарном состоянии).

2. Система организована ниже $|\Delta S_\alpha^-|$. В ней преобладают процессы, уменьшающие энтропию ($dS < 0$), и, следовательно, $P < 0$. В этом случае в (10) знак неравенства изменится на противоположный:

$$\frac{\partial_X P}{\partial t} \ge 0.$$

Легко увидеть, что оба случая обобщаются неравенством

$$\frac{\partial_X |P|}{\partial t} \le 0 \quad (11)$$

(знак “=” выполняется в стационарном состоянии).

Обратим внимание на то, что если заменить P (скорость изменения энтропии системы) на P_i (производство энтропии в системе), которое всегда неотрицательное, и опустить знак модуля, то (11) перейдет в известное неравенство Гленсдорфа—Пригожина [7].

Прежде чем перейти к выводу уравнения энтропийных колебаний, заметим, что в стационарном состоянии (в отличие от равновесного) обобщенные силы X_k могут быть не равны нулю. Более того, они могут принимать значения существенно больше единицы (с учетом размерности). В последнем случае в точках, сколь угодно близких к стационарному состоянию, функция $I_k(X_k)$ будет нелинейной. Дальнейшие рассуждения проведем именно для этого случая.

К левой части (11) добавим некоторую функцию $F(P, S)$:

$$\frac{\partial_X P}{\partial t} + F(P,S) = 0. \quad (12)$$

Мы опустили знак модуля, так как для нас имеет принципиальное значение то, что $\partial_X P/\partial t$ может менять знак (в отличие от $\partial_X P_i/\partial t$, которая всегда ≤ 0 [7]). Функцию F разложим в окрестности стационарного состояния, степень открытости которого равна α:

$$F(P,S) = F(P_\alpha, S_\alpha) + \beta_1(P - P_\alpha) + \beta_2(P - P_\alpha)^2 + ...$$
$$... + \eta_1(S - S_\alpha) + \eta_2(S - S_\alpha)^2 + ...,$$

$$\beta_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial^k F}{\partial P^k}\right)_{P_\alpha}; \quad \eta_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial^k F}{\partial S^k}\right)_{S_\alpha},$$

где β_k и η_k — коэффициенты разложения.

В точках, близких к стационарному состоянию, разности $P - P_\alpha$ и $S - S_\alpha$ являются малыми величинами (при этом в этих же точках $I_k(X_k)$ — по-прежнему нелинейная функция). Следовательно,

$$F(P,S) \approx \beta_1 P + \eta_1 S - \eta_2 S_\alpha$$

(учтено, что в стационарном состоянии $F(P_\alpha, S_\alpha) = 0$ и $P_\alpha = 0$). Подставив $F(P, S)$ в (12), придем к уравнению колебаний, совпадающему с (5) с точностью до постоянных:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} + \beta_1 \frac{\partial S}{\partial t} + \eta_1 S = \eta_1 S_\alpha. \quad (13)$$

Нетрудно убедиться, что:

а — при $\eta_1 < 0$ данное уравнение имеет только неустойчивые стационарные решения;

б — при $0 < \eta_1 \le \beta_1^2/4$ стационарное решение является апериодическим;

в — при $\eta_1 > \beta_1^2/4$ стационарные решения представляют собой колебания вокруг S_α.

При $\beta_1 > 0$ энтропийные колебания являются затухающими. При $\beta_1 < 0$ амплитуда колебаний увеличивается с течением времени.

Таким образом, мы показали, что в нелинейном процессе вблизи стационарного состояния могут возникнуть энтропийные колебания линейного вида (13). Отличие (13) от (5) состоит в том, что для нелинейных процессов причиной возникновения энтропийных колебаний является изменение обобщенных сил X_k при постоянных обобщенных потоках I_k (см. (11)).

Подчеркнем еще раз, что поскольку вблизи стационарного состояния разности $P - P_\alpha$ и $S - S_\alpha$ являются малыми параметрами, то энтропийные колебания будут описываться линейным уравнением. При этом если в стационарном состоянии силы X_k имеют значения существенно больше нуля, то в окрестности этого состояния $I_k(X_k)$ будет нелинейной функцией. Именно в таких случаях нелинейные процессы сопровождаются линейными энтропийными колебаниями. По мнению автора настоящей работы, данное положение может быть даже усилено следующим утверждением: в системе вблизи стационарного состояния нелинейные процессы идут в направлении, заданном линейным уравнением колебаний энтропии. Иначе говоря, в зависимости от знака амплитуды энтропийного колебания в системе преобладают либо процессы самоорганизации и упорядочения, либо процессы дезорганизации.

Заключение

Показано, что в нелинейных процессах вблизи стационарного состояния могут возникнуть энтропийные колебания, этот вывод доказан только для систем, находящихся под воздействием энтростата.

Строгое обоснование данного явления оказалось возможным дать только на основе неравенства (11), поскольку известное неравенство Гленсдорфа—Пригожина ($\partial_X P_i / \partial t \le 0$) не разрешает менять знак P_i и, следовательно, уравнение колебаний из него получить нельзя.

По-видимому на практике появление энтропийных колебаний в нелинейных процессах можно ожидать в системах, имеющих сравнительно сложную структуру, т. е. когда стационарное состояние системы обусловлено разными по природе обобщенными силами X_k. Но даже в относительно простых системах какая-либо неоднородность может привести к появлению нелинейных процессов, которые вблизи стационарного состояния могут сопровождаться энтропийными колебаниями.

Возможно, одним из наглядных примеров энтропийных колебаний может служить следующее известное явление. В процессе кристаллизации кристалл периодически то растет, то плавится (обычно это связывают с колебаниями температуры расплава [8]). К концу кристаллизации амплитуда этих процессов затухает. При этом растущий кристалл имеет неоднородное распределение температуры, и в его разные грани входит неодинаковое количество компонентов расплава (имеются и другие неоднородности). Тем самым создаются условия для возникновения разных по природе термодинамических сил. Последнее, вероятно, и нашло свое проявление в виде колебаний структуры растущего кристалла, т.е. колебаний энтропии.

Представление об энтропийных колебаниях, по-видимому, открывает новое направление изучения фундаментальных причин формирования целого ряда глобальных тенденций. По мнению авторов работ [2, 3, 9, 10], именно эти тенденции могут быть ответственны за глобальные проблемы, вставшие перед человечеством в последнее время. В частности, если по какой-либо причине (например, в результате созидательной человеческой деятельности) критический уровень организации на планете будет превышен, то могут возникнуть энтропийные колебания. Причем при положительной амплитуде колебания ($dS > 0$)

должны преобладать процессы, увеличивающие беспорядок на планете. На практике это должно проявиться в виде роста интенсивности стихийных бедствий, повышения вероятности техногенных катастроф, несчастных случаев, военных конфликтов, непредсказуемых колебаний климата и других событий, способствующих увеличению энтропии.

Литература

1. *Шаповалов В. И.*// Прикладная физика. 2004. № 5. С. 25.
2. *Шаповалов В. И.*// Проблемы управления. 2005. № 2. С. 2.
3. *Шаповалов В. И.* Основы теории упорядочения и самоорганизации. — М.: Фирма "Испо-Сервис", 2005.
4. *Шаповалов В. И.*// Известия ТРТУ. 2006. № 4. С. 104.
5. *Шаповалов В. И.* Энтропийный мир. — Волгоград: Перемена, 1995.
6. *Шаповалов В. И.*// Автоматика и телемеханика. 2001. № 6. С. 57.
7. *Гленсдорф П., Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. — М.: Едиториал УРСС, 2003.
8. *Чернов А. А.* Физика кристаллизации. — М.: Знание, 1983.
9. *Шаповалов В. И., Казаков Н. В.*// Общественные науки и современность. 2002. № 3. С. 141.
10. *Прангишвили И. В.*// Синергетика и проблемы теории управления/ Под ред. А. А. Колесникова. — М.: Физматлит, 2004. С. 398.

About possibility of occurrence of entropy oscillations in nonlinear processes

V. I. Shapovalov
The Volgograd Branch of Moscow Humanities and Economics Institute,
8 Aviators road, 400048, Volgograd, Russia
E-mail: shavi@rol.ru

The opportunity of occurrence of entropy oscillations is shown in nonlinear processes for systems which are under influence entrostat.

PACS: 05.65.+b; 05.70.Ln

Keywords: system, entropy oscillations, nonlinear processes.

Bibloigraphy — 10 references. *Received 14 May 2009*