Общая физика

УДК 539.12

К вопросу о рассеянии фотонов на электронах в однородном электрическом поле

В. И. Крылов

Определены сечения комптоновского рассеяния во внешнем однородном и стационарном электрическом поле в нерелятивистском (по движению электронов) борновском приближении. Показано, что найденные сечения могут заметно отличаться от сечения рассеяния фотонов на изолированном электроне и зависят от взаимного расположения точки отражения электрона от потенциального барьера внешнего поля и области пространства, где происходит рассеивание фотонов.

PACS: 13.60.Fz

Ключевые слова: комптоновское рассеяние, сечение рассеяния, однородное стационарное электрическое поле, точка поворота.

Введение

В работах [1, 2] показано, что при фоторасщеплении квантовой системы (например, дейтрона), обладающей электрическим зарядом в квазиоднородном квазистационарном электрическом поле, может происходить заметное (связанное с движением квантовой системы как целого) изменение сечения по сравнению с сечением расщепления такой системы в отсутствие внешнего электрического поля.

Естественно ожидать, что и сечение рассеяния фотонов на бесструктурной заряженной частице (в дальнейшем считаем, что это — электрон), находящейся в однородном электрическом поле, может заметно отличаться от хорошо известного (например, [3], [4]) сечения рассеяния фотонов на изолированном электроне. Действительно, при рассеянии фотона электроном и в начальном, и в конечном состоянии имеется по одной нейтральной и одной электрически заряженной частице, так же, как и при фоторасщеплении дейтрона на протон и нейтрон. Вследствие этого в обоих процессах взаимодействие квантовых систем с внешним электрическим полем будет практически одинаковым, что и должно приводить к похожему изменению сечений.

С другой стороны, эксперименты по комптоновскому рассеянию обычно проводятся на электронах твердого тела (например, графита), находящихся в поле кристаллической решетки, и результаты эксперимента достаточно хорошо согласуются с расчетом сечения рассеяния на изолированном электроне (в дальнейшем для краткости такое сечение называем "обычным сечением").

В настоящей работе такое противоречие, на наш взгляд, разрешено, по крайней мере, в рамках двух предельных случаев, допускающих достаточно простое аналитическое решение. Оказывается, что вид сечения может сильно зависеть от положения точки отражения электрона (от потенциального барьера внешнего электрического поля) по отношению к области пространства, где происходит взаимодействие фотонов с электроном. Математически это означает, что эта точка либо принадлежит нормировочному объему фотона, который одновременно должен совпадать с нормировочным объемом волновой функции электрона (обе частицы, очевидно, должны находиться в этой области пространства), либо не принадлежит.

В первом случае сечение будет сильно отличаться от обычного сечения, во втором — состоит из двух слагаемых, одно из которых с точностью до множителя совпадает с сечением рассеяния фотона на электроне, имеющем положительную продольную (вдоль поля) составляющую "локального импульса", другое — такое же сечение, но определяющее рассеяние на электроне с отрицательной продольной компонентой импульса. Сумма этих слагаемых (при малом изменении модуля волнового вектора фотона при его рассеянии — нерелятивистское приближение) совпадает с обычным сечением рассеяния на электроне с нулевым импульсом.

Крылов Владимир Иванович, профессор.
Дальневосточный гуманитарный государственный университет,
Россия, 680035, г. Хабаровск, ул. К. Маркса, 68.
Тел. (4212) 30-45-04. E-mail: krylov_vladimir@mail.ru.

Статья поступила в редакцию 28 мая 2009 г.

Постановка задачи и основные результаты

Пусть в однородном и стационарном электрическом поле с напряженностью $\boldsymbol{\varepsilon} = (0, 0, -\varepsilon)$ (в декартовой системе координат x, y, z), индуцированном в полупространстве с $z < L$ — макроскопической величиной, создается стационарный моноэнергетический поток электронов, источником которого является ортогональная к $\boldsymbol{\varepsilon}$ плоскость $z = L$. Эта же плоскость полностью поглощает электроны после их отражения от потенциального барьера внешнего электрического поля.

Будем считать, что в некоторой области этого полупространства существует монохроматический поток фотонов с волновым вектором $\mathbf{k}_{\Phi_i}$, частотой ω_i и поляризацией $\mathbf{e}_i$.

Известно, что в нерелятивистском приближении рассеяние фотонов на электроне можно рассматривать как уничтожение одного из них при взаимодействии с электроном и рождение другого фотона с поляризацией $\mathbf{e}_f$, волновым вектором и частотой, лежащими в интервалах ($\mathbf{k}_{\Phi_f}$, $\mathbf{k}_{\Phi_f} + d\mathbf{k}_{\Phi_f}$) и ($\omega_f$, $\omega_f + d\omega_f$).

Для нерелятивистского движения электронов дифференциальное сечение рассеяния на них фотонов определяется выражением

$$d\sigma = \frac{L_x L_y L_z}{c}\frac{2\pi}{\hbar}\left|V_{\Phi_{fi}}\right|^2 \times$$
$$\times\delta\left(\frac{\hbar^2(k_{f\perp}^2 - k_{i\perp}^2)}{2m} + E_{zf} + \hbar(\omega_f - \omega_i) - E_{zi}\right)\times \quad (1)$$
$$\times dn_{ef}\,dn_{\Phi_f},$$

где L_x, L_y, L_z — длины ребер (вдоль осей x, y, z) нормировочного параллелепипеда фотонов;

$V_{\Phi_{fi}}$ — матричный элемент оператора возмущения:

$$\hat{V}_\Phi = \frac{2\pi\hbar e^2}{L_x L_y L_z mc\sqrt{k_{\Phi_i} k_{\Phi_f}}}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_f^* e^{i\left(\mathbf{k}_{\Phi_i} - \mathbf{k}_{\Phi_f}\right)\mathbf{r}},$$

где e, m — масса и заряд электрона, соответственно;

$\hat{\mathbf{p}}$ — оператор импульса;

$E_{zi,f}$, $\dfrac{\hbar^2 k_{i,f\perp}^2}{2m}$ — энергии продольного (вдоль $\boldsymbol{\varepsilon}$) и поперечного невозмущенных движений электрона (в начальном и конечном состояниях);

dn_e — число состояний, в которые переходит электрон в результате взаимодействия с фотоном;

$dn_{\Phi f}$ — число конечных состояний фотона, отнесенных к бесконечно малому элементу $\mathbf{k}_{\Phi_f}$ — пространства объемом $d^3\mathbf{k}_{\Phi_f}$:

$$dn_{\Phi_f} = \frac{L_x L_y L_z}{8\pi^3} d^3\mathbf{k}_{\Phi_f}. \quad (2)$$

Матричный элемент $V_{\Phi_{fi}}$ должен быть вычислен по собственным ортонормированным функциям невозмущенного гамильтониана

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} - |e\varepsilon| z.$$

Известно, что такие функции $\psi_{k_\perp, E_z}$ определяются выражением [5]:

$$\psi_{\mathbf{k}_\perp, E_z} = \frac{A\sqrt{\pi}}{\sqrt{L_x L_y}} e^{i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}} Ai(s), \quad (3)$$

где $\sqrt{\pi}Ai(s)$ — функция Эйри, имеющая интегральное представление:

$$\sqrt{\pi}Ai(s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-i\left(s\eta + \frac{\eta^3}{3}\right)\right\}d\eta, \quad (4)$$

и асимптотическое поведение — экспоненциальное стремление к нулю, если $s \to \infty$,

$$\text{и} \quad — \quad (-s)^{-1/4}\sin\left(\frac{2}{3}(-s)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right), \quad (5)$$

при $-s >> 1$;

$-s = z/\ell + E_z/|e\varepsilon|\ell$;

$\ell = \left(\hbar^2/2m|e\varepsilon|\right)^{1/3}$;

$\mathbf{k}_\perp$ — поперечный волновой вектор электрона.

Постоянная A и ее связь с dn_e определяются ортонормированностью волновых функций при их интегрировании по выбранному нормировочному объему электрона. В задачах, где поле, определяющее взаимодействие частиц, находится в микроскопической области пространства, выбор нормировочного объема и определение его связи с плотностью состояний обычно не вызывают трудностей, так как невозмущенное пространственное распределение частиц однородно и не зависит от параметров сталкивающихся частиц.

В рассматриваемой же задаче, когда столкновения частиц происходят во внешнем поле, индуцированном в макроскопической области пространства, функциональные связи A с dn_e, как и сами выражения для числа состояний электрона, будут различны при сильно отличающихся значениях энергии продольного движения электронов.

Действительно, пусть вдоль оси z нормировочный объем ограничен точками $-L_z/2,\ L_z/2$. Тогда при $|E_z| << L_z|e\varepsilon|/2$ точка отражения лежит в нормировочном объеме далеко от его границы, а нормировочная постоянная $A = 1/(L\ell)^{1/4}$ и связана с dn_e, отнесенного к площади (в $\mathbf{k}_\perp$ пространстве) $d^2\mathbf{k}_\perp$ и интервалу dE_z следующим образом (см. Приложение)

$$dn_e = \frac{L_x L_y d^2\mathbf{k}_\perp dE_z}{4\pi^3 |e\varepsilon| \ell^2 |A|^2}. \qquad (6)$$

Если же $E_z >> L_z|e\varepsilon|/2$, то точка отражения уже не принадлежит нормировочному объему, и для волновой функции можно воспользоваться асимптотой (5), разлагая $(-s)^{3/2}$ в ряд по степеням z/ℓ до первого порядка. В этом случае $A = \sqrt{2/L_z}$ и

$$dn_e = 2L_x L_y L_z dk_x dk_y dk_z/(2\pi)^3, \qquad (7)$$

где $k_z = \sqrt{2mE_z}/\hbar$, причем знак этой величины не может изменяться (естественно выбрать его положительным).

В случае, когда $|E_z| << |e\varepsilon| L_z$, определить матричный элемент $V_{\Phi_{fi}}$ по функциям (3) нетрудно, используя (4) и выражение:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} Ai(-(\xi+b))Ai(-(\xi+d))e^{-iq\xi}d\xi =$$
$$= \begin{cases} \delta(b-d), & \text{если} \quad q = 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{\pi|q|}}\exp\left[-i\left(\dfrac{q^3}{12} - \dfrac{1}{2}q(b+d) - \dfrac{(b-d)^2}{4q} + \dfrac{\pi q}{4|q|}\right)\right], & \\ \text{если} \quad q \neq 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Применяя (6)—(8), устраняя дельта-функции, усредняя по начальным и суммируя по конечным поляризациям фотонов, получим из (1) выражение для дифференциального сечения $d\sigma_{\mathbf{k}_{\Phi_f}}$ рассеяния на электроне фотона, отнесенного к $d^3\mathbf{k}_{\Phi_f}$:

$$d\sigma_{\mathbf{k}_{\Phi_f}} = r_e^2 \frac{1}{2\alpha\sqrt{2\bar{U}}} \frac{1 + (\mathbf{n}_f \mathbf{n}_i)^2}{k_{\Phi_i} k_{\Phi_f} \left|k_{\Phi_{fz}} - k_{\Phi_{iz}}\right|} d^3\mathbf{k}_{\Phi_f}, \qquad (9)$$

где $r_e = e^2/m_e c^2$ — классический радиус электрона;
α — постоянная тонкой структуры;
$\mathbf{n}_{i,f} = \mathbf{k}_{\Phi_{i,f}}/k_{\Phi_{i,f}}$;
$\bar{U} = \varepsilon L_z a/|e|$ — безразмерная (в атомных единицах с пространственным масштабом $a = \hbar/me^2$) разность потенциалов внешнего поля $\boldsymbol{\varepsilon}$ на области локализации электрона и фотона.

Казалось бы, что так как величина $\sqrt{\bar{U}}$ содержит макроскопический параметр L_z, который должен быть устремлен к бесконечности, то выражение (9) должно считаться бесконечно малой величиной (именно такой вывод и был сделан в [1, 2] при рассмотрении фоторасщепления квантовой системы в однородном электрическом поле). Однако необходимо учесть, что $\bar{U}$ определяется произведением двух "конкурирующих" макроскопических величин L_z и ε (с микроскопической точки зрения L_z — физически бесконечно большая величина, а ε — физически бесконечно малая). Физически $\sqrt{\bar{U}}$ определяет продольную скорость электронов (в атомных единицах) на границе нормировочного объема при условии равенства нулю потенциала εz в точке отражения электрона от потенциального барьера внешнего поля, что равносильно $E_{zi} = 0$.

Очевидно, что в эксперименте и данной задаче эта величина не может быть ни физически бесконечно большой, ни физически бесконечно малой.

Выражение (9) получено при условии $k_{\Phi_{fz}} \neq k_{\Phi_{iz}}$. Если же $k_{\Phi_{fz}} = k_{\Phi_{iz}}$, то в дифференциальном сечении (1) исчезает зависимость от параметров ε и L_z; появляется еще одна δ-функция: $\delta(E_{zf} - E_{zi})$, т. е. теперь в него входит столько же δ-функций, как и при $\varepsilon = 0$. Однако из-за дополнительного условия $k_{\Phi_{fz}} = k_{\Phi_{iz}}$ интегрирование $d\sigma_{\mathbf{k}_{\Phi_f}}$ по $\mathbf{k}_{\Phi_f}$ должно проводиться по двухмерной области и поэтому даст нулевой результат.

Отметим также, что рожденный фотон может иметь энергию не только меньше поглощенного, но и больше, так как электрон находится в потенциальной "яме" внешнего электрического поля. Математически это выражается в том, что на

$$E_{zf} = c\hbar[k_{\Phi_i} - k_{\Phi_f} - (\lambda/2)(\mathbf{k}_{\Phi_{i\perp}} - \mathbf{k}_{\Phi_{f\perp}})^2], \qquad (10)$$

где $\lambda = \hbar/(mc)$, не накладываются какие-либо условия.

При интегрировании (9) по сферическим координатам θ, φ вектора $\mathbf{k}_{\Phi_f}$ необходимо учесть, что минимальная величина, на которую $\mathbf{k}_{\Phi_{fz}}$ отличается от $\mathbf{k}_{\Phi_{iz}}$, есть $\pm 2\pi/L_z$. В соответствии с этим, если $\left|k_{\Phi_{iz}}/k_{\Phi_f}\right|<1,$ то область интегрирования переменной $\eta = \cos\theta$ определяется интервалами

$$\left[-1,\ \frac{k_{\Phi_{iz}}}{k_{\Phi_f}}-\frac{2\pi}{k_{\Phi_f}L_z}\right];\quad \left[\frac{k_{\Phi_{iz}}}{k_{\Phi_f}}+\frac{2\pi}{k_{\Phi_f}L_z},\ 1\right].$$

Элементарные вычисления дают

$$d\sigma_{k_{\Phi_f}} \cong \frac{r_e^2}{2\alpha\sqrt{2\bar{U}}k_{\Phi_i}}\left\{4\pi\ln\frac{L_z\sqrt{\left|k_{\Phi_f}^2-k_{\Phi_{iz}}^2\right|}}{2\pi}\right\}dk_{\Phi_f}. \quad (11)$$

Если же $\left|k_{\Phi_{iz}}/k_{\Phi_f}\right|>1,$ то

$$d\sigma_{k_{\Phi_f}} = \frac{r_e^2}{2\alpha\sqrt{2\bar{U}}k_{\Phi_i}}\times$$
$$\times\left\{\left[2\pi+\frac{1}{2}n_{i\perp}^2+\frac{1}{2}\frac{k_{\Phi_{iz}}^2}{k_{\Phi_f}^2}\left(3n_{iz}^2-1\right)\right]\times\right. \quad (12)$$
$$\left.\times\ln\left|\frac{k_{\Phi_f}+\left|k_{\Phi_{iz}}\right|}{k_{\Phi_f}-\left|k_{\Phi_{iz}}\right|}\right|-\left(3n_{iz}^2-1\right)\frac{\left|k_{\Phi_{iz}}\right|}{k_{\Phi_f}}\right\}dk_{\Phi_f}.$$

Наконец, при $\left|k_{\Phi_{iz}}/k_{\Phi_f}\right|=1$ получим

$$d\sigma_{k_{\Phi_f}} \cong \frac{r_e^2}{2\alpha\sqrt{2\bar{U}}k_{\Phi_i}}\times$$
$$\times\left\{\left(2\pi+n_{iz}^2\right)\ln\frac{L_z k_{\Phi_i}}{\pi}-\left(3n_{iz}^2-1\right)\right\}dk_{\Phi_f}. \quad (13)$$

Сравнивая (11)—(13) и помня, что область применимости этих выражений в соответствии с (10) и неравенством $|E_z| << L_z|e\varepsilon|/2$ определяется условием

$$\frac{\alpha}{a}\bar{U} >> \left|k_{\Phi f}-k_{\Phi i}\right|, \quad (14)$$

приходим к выводу, что основной вклад в сечение определяется выражением (11) при его интегрировании от k_{Φ_i} до $\chi\alpha\bar{U}/a$, где величину χ ~0,01—0,1 можно рассматривать как подгоночный параметр.

После несложных вычислений получим

$$\sigma \approx \frac{2\pi\chi r_e^2}{ak_{\Phi_i}}\sqrt{2\bar{U}}\ln\frac{\alpha\chi\bar{U}L_z}{2\pi a} = $$
$$= \frac{2\pi\chi r_e^2}{\alpha\bar{\omega}_i}\sqrt{2\bar{U}}\ln\frac{\alpha\chi\bar{U}\bar{L}_z}{2\pi}, \quad (15)$$

где $\bar{L}_z = L_z/a$, $\bar{\omega}_i = \omega_i a\hbar/e^2$ — безразмерные параметры в атомных единицах, такие же, как и $\bar{U} = \bar{L}_z\bar{\varepsilon}$, $(\bar{\varepsilon} = \varepsilon a^2/|e|)$.

Таким образом, при выполнении выражения (14) величина σ может быть сравнима с обычным сечением или даже значительно больше его.

Действительно, в нерелятивистском приближении $\bar{\omega}_i \sim (100\alpha)^{-1}$; если теперь положить $\bar{L}_z = 10^6$; $\bar{\varepsilon} = 10^{-6}$; $\chi = 10^{-2}$ и подставить эти числа в (15) , то получим $\sigma \approx 10\pi r_e^2$, т. е. величина, сравнимая с обычным комптоновским сечением. При возрастании $\bar{\varepsilon}$ на два порядка сечение, очевидно, возрастает более чем на порядок.

Кратко остановимся на случае, когда $E_z >> |e\varepsilon|L_z$.

Используя асимптотическое представление (5), запишем волновую функцию электрона $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$, нормированную на объем $V = L_xL_yL_z$ в виде

$$\psi_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{2}{V}}\frac{1}{2i}\left\{e^{i(\mathbf{kr}+\gamma)}-e^{i(\mathbf{k}_{-}\mathbf{r}-\gamma)}\right\}, \quad (16)$$

где $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_\perp, k_z)$;

$\mathbf{k}_- = (\mathbf{k}_\perp, -k_z)$;

$k_z = \sqrt{2mE_z}/\hbar > 0$;

$\gamma = \pi/4 + 2\left(E_z/|e\varepsilon|\ell\right)^{3/2}/3.$

Вычисление матричного элемента $V_{\Phi_{fi}}$ по функциям (19) элементарно, и в результате получим

$$V_{\Phi_{fi}} = \frac{(2\pi)^4\hbar e^2 \mathrm{e}_i\mathbf{e}_f^*}{2V^2 m_e c\sqrt{k_{\Phi_i}k_{\Phi_f}}}\times$$
$$\times\left\{e^{-i(\gamma_f-\gamma_i)}\delta(\mathbf{q}+\mathbf{q}_\Phi)-e^{-i(\gamma_f+\gamma_i)}\delta(\mathbf{q}_i+\mathbf{q}_\Phi)-\right. \quad (17)$$
$$\left.-e^{i(\gamma_f+\gamma_i)}\delta(\mathbf{q}_f+\mathbf{q}_\Phi)+e^{i(\gamma_f-\gamma_i)}\delta(\mathbf{q}_{fi}+\mathbf{q}_\Phi)\right\},$$

где индексы i и f относятся к величинам начальных и конечных состояний частиц;

$\mathbf{q}_\Phi = \mathbf{k}_{\Phi_f} - \mathbf{k}_{\Phi_i}$;

$\mathbf{q} = \mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i$;

$\mathbf{q}_i = \mathbf{k}_f - \mathbf{k}_{i-}$;

$\mathbf{q}_f = \mathbf{k}_{f-} - \mathbf{k}_i$;

$\mathbf{q}_{fi} = \mathbf{k}_{f-} - \mathbf{k}_{i-}$.

Отметим, что аргументы входящих в выражение (17) четырех различных одномерных δ-функций от продольных компонент волновых векторов одновременно равняться нулю не могут, поэтому в квадрате модуля матричного элемента можно не учитывать произведение различных δ-функций. После подстановки в (1) выражений

(2) и (7) и $\left|V_{\Phi_{fi}}\right|^2$ и интегрированию по $\mathbf{k}_f$ (причем $k_{fz} \in (0,\ \infty)$), dk_{Φ_i} усреднению и суммированию по поляризациям фотонов, получим (для простоты полагаем $\mathbf{k}_{f\perp} = 0$):

$$d\sigma_{\mathrm{O}} = \frac{r_e^2}{4}\left[1+\left(\mathbf{n}_f\mathbf{n}_i\right)^2\right]\times$$
$$\times\left\{\frac{k_{\Phi_f}}{k_{\Phi_{i+}}\left[1+\lambda\left(k_{\Phi_f}-k_{\Phi_{i+}}\mathbf{n}_f\mathbf{n}_i-k_{iz}n_{fz}\right)\right]}+\right. \quad (18)$$
$$\left.+\frac{k_{\Phi_f}}{k_{\Phi_{i-}}\left[1+\lambda\left(k_{\Phi_f}-k_{\Phi_{i-}}\mathbf{n}_f\mathbf{n}_i+k_{iz}n_{fz}\right)\right]}\right\}d\mathrm{O},$$

где $d\mathrm{O}$ – элемент телесного угла, в котором находится $\mathbf{k}_{\Phi_f}$;

$k_{\Phi_{i+}}$ и $k_{\Phi_{i-}}$ определяются из уравнений

$$k_{\Phi_f}+\frac{\lambda}{2}q_{\Phi_+}^2-\lambda k_{iz}q_{\Phi_{+z}}-k_{\Phi_{i+}}=0,$$

и

$$k_{\Phi_f}+\frac{\lambda}{2}q_{\Phi_-}^2-\lambda k_{iz}q_{\Phi_{-z}}+k_{\Phi_{i-}}=0;$$

где $\mathbf{q}_{\Phi_\pm}=\mathbf{k}_{\Phi_f}-\mathbf{k}_{\Phi_{i\pm}}$.

В линейном приближении по λ слагаемые $\pm\lambda k_{iz}n_{fz}$ в формуле (18) взаимно уничтожаются, и получаем:

$$d\sigma_{\mathrm{O}} = \frac{1}{2}r_e^2\times$$
$$\times\left[1+\left(\mathbf{n}_f\mathbf{n}_i\right)^2\right]\left\{1+2\lambda k_{\Phi_f}\left(1-\mathbf{n}_f\mathbf{n}_i\right)\right\}d\mathrm{O}, \quad (19)$$

что совпадает с выражением дифференциального сечения рассеяния фотонов на покоящемся электроне [3, 4]. После интегрирования в (19) по углам находим:

$$\sigma=\frac{8\pi r_e^2}{3}(1-2\lambda k_{\Phi f}),$$

что также совпадает с обычным сечением.

Заключение

Из вышеизложенного следует, что в однородном электрическом поле значение комптоновского сечения рассеяния может своеобразно зависеть от энергии продольного (вдоль внешнего поля) движения заряженных частиц, т. е. от условий подсветки рассеивающих частиц (например, направления луча источника фотонов, его угловой апертуры и поперечных размеров). Причем имеет большое значение положение (вдоль ε) точки пространства, в которой потенциальная энергия рассеивающей частицы считается равной нулю. Полученные результаты представляют два предельных случая. Общий случай, по-видимому, возможно рассмотреть, если удастся найти связь между энергетическим спектром частицы в однородном поле и геометрическими параметрами произвольно расположенной нормировочной области пространства, на которой волновые функции стационарных состояний будут ортонормированны.

Кроме того, если рассеивающие заряженные частицы имеют сильно отличающиеся значения энергии E_z, то результирующее сечение, очевидно, будет зависеть от их распределения по этой величине, и должно определяться как среднее по сечениям подобным найденным здесь. Но это тема уже другой работы.

Автор выражает глубокую благодарность А. А. Рухадзе за внимание к работе и обсуждение результатов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Так как в настоящей работе существенным является связь между dn_e, dE_z, $L = L_z/2$ и нормировочной постоянной A, то представляется необходимым представить здесь вывод соответствующих выражений.

Пусть действительная функция $\Phi(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\Phi}{d\xi^2}+\xi\Phi=0, \quad (20)$$

и ее асимптотическое поведение при $\xi >> 1$ определяется выражением

$$\Phi(\xi)\approx\xi^{1/4}\sin\left(\frac{2}{3}\xi^{3/2}+\frac{\pi}{4}\right),$$

а если $\xi << -1$, то функция $\Phi(\xi)$ экспоненциально стремится к нулю.

Определим условия, при которых такие функции будут ортонормированными на интервале $(-\infty, L)$ оси z:

$$|A|^2\int_{-\infty}^{L}\Phi\left(\frac{z}{\ell}+d\right)\Phi\left(\frac{z}{\ell}+b\right)dz\equiv$$
$$\equiv|A|^2\,\ell\int_{-\infty}^{L/\ell}\Phi(\eta+d)\Phi(\eta+b)\,d\eta=\delta_{db}. \quad (21)$$

Учитывая (20), нетрудно получить:

$$(b-d)\int\limits_{-\infty}^{L/\ell}\Phi(\eta+d)\Phi(\eta+b)d\eta=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{L/\ell}\{\Phi(\eta+b)\Phi''(\eta+d)-\Phi(\eta+d)\Phi''(\eta+b)\}d\eta=$$

$$=\Phi(\eta_b)\Phi'(\eta_d)-\Phi(\eta_d)\Phi'(\eta_b)\approx$$

$$\approx\frac{1}{2(\eta_d\eta_b)^{1/4}}\left\{\frac{1}{4}\frac{d-b}{\eta_d\eta_b}\times\right. \tag{22}$$

$$\times\left[\cos\frac{2}{3}\left(\eta_d^{3/2}-\eta_b^{3/2}\right)+\sin\frac{2}{3}\left(\eta_d^{3/2}+\eta_b^{3/2}\right)\right]+$$

$$+\left(\eta_d^{1/2}-\eta_b^{1/2}\right)\cos\frac{2}{3}\left(\eta_d^{3/2}+\eta_b^{3/2}\right)+$$

$$\left.+\left(\eta_d^{1/2}+\eta_b^{1/2}\right)\sin\frac{2}{3}\left(\eta_b^{3/2}-\eta_d^{3/2}\right)\right\},$$

где $\eta_d=L/\ell+d$; $\eta_b=L/\ell+b$; если $L/\ell>>|d|,\ |b|,\ 1$, то правую часть (22) можно заменить на $\sin((b-d)\sqrt{L/\ell})$.

Сравнивая с (21), получим

$$|A|^2\int\limits_{-\infty}^{L}\Phi\left(\frac{z}{\ell}+d\right)\Phi\left(\frac{z}{\ell}+b\right)dz\equiv$$

$$\equiv|A|^2\,\ell\,\frac{\sin((b-d)\sqrt{L/\ell})}{b-d}=\delta_{db}. \tag{23}$$

Следовательно, ортогональность функций достигается, если $(b-d)\sqrt{L/\ell}=\Delta n_z\pi$, где Δn_z — целое число. Используя этот результат и положив $d=E_{zi}/(|e\varepsilon|\ell)$, $b=E_{zf}/(|e\varepsilon|\ell)$; устремляя в (23) b к d, находим, что $A=1/(\ell L)^{1/4}$ и получаем (6).

Литература

1. *Крылов В. И.* Сечение фоторасщепления квантовой системы, имеющей электрический заряд, с учетом ее внешнего движения в однородном электрическом поле// Краткие сообщения по физике ФИАН. 1991. № 2. С. 33—36.
2. *Крылов В. И.* Фоторасщепление заряженной системы в пространственно ограниченном однородном электрическом поле// Там же. 1992. № 5, 6. С. 33—36.
3. *Берестецкий В. Б. , Лифшиц Е. М. , Питаевский Л. П.*// Квантовая электродинамика. — М.: Наука, 1989.
4. *Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б.*// Там же. — М.: Наука, 1969.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.*// Квантовая механика. — М.: Наука, 1974.

To the problem of the scattering of photons on electrons in an uniform electric field

V. I. Krylov

Far Eastern State University of Humanities, 68 K.Marx str., 680035, Khabarovsk, Russia

E-mail: krylov_vladimir@mail.ru

The cross sections of Compton scattering in an external uniform stationary electric field are determined using the nonrelativistic (for the motion of electrons) Born approximation. It is shown that the cross sections obtained can differ substantially from a cross section for scattering of a photon on an isolated electron and depend on the relative positions of the turning point of the electron (when it bounces from the potential barrier of the external electric field) and the region of the space where the photons are scattered on the electrons.

PACS: 13.60.Fz

Keywords: compton scattering, cross sections, external uniform stationary electric field, turning point.

Bibliography — 5 references. *Received 28 May 2009*