УДК 533.9

Усредненные силы, действующие на релятивистскую частицу в волноводе

Р. А. Х. Кастильо, В. П. Милантьев

Получены общие выражения для компонент вектора усредненной (пондеромоторной) силы, действующей на релятивистскую заряженную частицу в поле волны произвольной H_{mn}-моды в прямоугольном волноводе. Показано, что в направлении распространения волны усредненная сила, в общем, отсутствует. Однако при определенных условиях ввода частицы в поле волны усредненная сила может быть отличной от нуля.

PACS: 41.90.+e, 52.40.Db

Ключевые слова: усредненные силы, релятивистская заряженная частица, волновод, электромагнитные волны, H_{mn}-мода.

Введение

Проблема взаимодействия заряженных частиц с электромагнитными полями разных конфигураций связана с решением многих практически важных задач (ускорение заряженных частиц, генерация электромагнитного излучения, удержание и нагрев плазмы в магнитных ловушках, разнообразные астрофизические задачи и т. д.). Большую роль в этих задачах играют усредненные силы, действующие на частицы в высокочастотных (ВЧ) электромагнитных полях. Такие силы называют еще пондеромоторными.

В работе [1] было впервые показано, что усредненное воздействие на нерелятивистскую частицу с зарядом e и массой M монохроматического ВЧ-поля с произвольной пространственной зависимостью амплитуды

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \mathrm{Re}\,\vec{E}(\vec{r})\exp(-i\omega t) \qquad (1)$$

описывается силой:

$$\vec{F} = -\nabla U(\vec{r}) \equiv -\nabla \frac{e^2 E^2}{4M\omega^2}. \qquad (2)$$

Усредненная сила (2), имеющая потенциальный характер, получила название силы Гапонова—Миллера. В дальнейшем проводился анализ применимости формулы (2), и были получены различные ее обобщения, в частности, с учетом внешнего магнитного поля, релятивистского характера движения частицы, воздействия волны биений двух волн и т. д. [2—11]. Было показано, что усредненное воздействие на частицу ВЧ-волны зависит от направления ее распространения (при наличии внешнего магнитного поля), ее поляризации, пространственно-временного профиля амплитуды, интенсивности волны и, в общем, не является потенциальным. Анализ релятивистских пондеромоторных сил проводится при разных предположениях. Один подход основывается на том, что импульс частицы определяется релятивистски сильным полем волны [6—8]. В другом подходе считается, что движение частицы является релятивистским, а поле волны лишь слабо возмущает это движение [2—5, 9—11].

В работе [11] аналитически и численно исследовалась пондеромоторная сила, действующая на заряженную частицу, пересекающую с релятивистской скоростью неоднородную электромагнитную волну моды H_{12} в прямоугольном волноводе. Была вычислена пондеромоторная сила в направления распространения волны (вдоль оси волновода). Полученные в [11] результаты оказались в противоречии с выводами работы [9], согласно которым пондеромоторная сила в направления распространения волны должна отсутствовать. Это противоречие в [11] объясняется различием в условиях, при которых проводился анализ движения частицы. Рассмотрению указанного противоречия посвящена данная работа.

Одним из эффективных методов исследования движения заряженных частиц является метод усреднения Боголюбова [12], который не приводит к появлению секулярных членов (как в [11]) при разложении по малому параметру. Целью данной работы является последовательный вывод по этому методу усредненных релятивистских уравнений движения заряженной частицы, движущейся в поле волны произвольной H_{mn}-моды прямоугольного волновода. Получены уравнения эволюции усредненных динамических переменных частицы, в том

Милантьев Владимир Петрович, профессор.
Кастильо Рамирез Александро Хавьер, аспирант.
Российский университет дружбы народов.
Россия, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6.
Тел. (495) 955-08-13. E-mail: vmilantiev@sci.pfu.edu.ru

Статья поступила в редакцию 25 мая 2011 г.

числе усредненные силы во всех направлениях, а также вычислены периодические добавки к сглаженным переменным. Проведено сравнение с результатами, полученными в работе [11].

Исходные уравнения

Будем рассматривать волну моды H_{mn}, где m, n — целые числа, распространяющуюся вдоль оси z прямоугольного волновода. Компоненты поля этой волны определяются известными формулами:

$$\begin{aligned} &E_x = E\, f_1 \sin\phi,\quad E_y = E\, f_2 \sin\phi,\quad E_z = 0,\\ &H_x = -E\,\chi\, f_2 \sin\phi,\quad H_y = E\,\chi\, f_1 \sin\phi,\quad H_z = Eh\cos\phi. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь введены обозначения:

$$f_1 = \left(\frac{na}{mb}\right)\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right),$$

$$f_2 = -\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right),$$

$$h = -\left(\frac{a\pi}{mk_0}\right)\left(\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right)\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right),$$

при этом E — вещественная амплитуда электрического поля в плоскости симметрии волновода, $\phi = k_z z - \omega\, t$ — фаза волны, $\omega = 2\pi c/\lambda$, где λ — длина волны, $\chi = \frac{1}{k_0}\sqrt{k_0^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$ — постоянная распространения волны в волноводе, $k_z = k_0\chi$ — волновое число, a, b — размеры волновода по осям x, y.

Релятивистское движение частицы с зарядом e и массой M в произвольном электромагнитном поле при пренебрежении квантовыми и радиационными эффектами описывается уравнениями:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\left(\vec{E} + c^{-1}\left[\vec{v}\vec{H}\right]\right),$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \frac{\vec{p}}{M\gamma}. \tag{4}$$

Здесь $\gamma = \sqrt{1 + \left(\frac{\vec{p}}{Mc}\right)^2}$ — релятивистский фактор, $\vec{p} = M\gamma\vec{v}$ — вектор импульса частицы. Введем безразмерные переменные: импульс $\vec{P} = \frac{\vec{p}}{Mc}$, время $\tau = \omega\, t$ и радиус-вектор $\vec{R} = \vec{r}k_0$.

Уравнения движения частицы в поле (3) в безразмерных переменных имеют вид:

$$\frac{dP_x}{d\tau} = \mu\left(\left(1 - \frac{\chi}{\gamma}P_z\right) f_1 \sin\phi + \frac{P_y}{\gamma} h\cos\phi\right),$$

$$\frac{dP_y}{d\tau} = \mu\left(\left(1 - \frac{\chi}{\gamma}P_z\right) f_2 \sin\phi - \frac{P_x}{\gamma} h\cos\phi\right),$$

$$\frac{dP_z}{d\tau} = \frac{\mu\chi}{\gamma}\left(P_x f_1 + P_y f_2\right)\sin\phi,\qquad \frac{d\vec{R}}{d\tau} = \frac{\vec{P}}{\gamma}. \tag{5}$$

В этих уравнениях параметр $\mu = \frac{eE}{Mc\omega}$ — отношение амплитуды осцилляторной скорости частицы в поле волны к скорости света. Как и в [9, 11], параметр μ предполагается достаточно малым и рассматривается далее как параметр разложения.

К уравнениям (5) для динамических переменных следует добавить уравнение для фазы, которую "видит" частица:

$$\frac{d\phi}{d\tau} = 1 - \frac{\chi}{\gamma}P_z. \tag{6}$$

Правые части выписанных уравнений содержат члены разного порядка. Так, член $\frac{\chi}{\gamma}P_z$, представляющий собой отношение продольной скорости частицы к фазовой скорости волны, является сравнительно малым, поскольку фазовая скорость волны в волноводе превышает скорость света $\frac{\chi}{\gamma}P_z = \frac{v}{v_\varphi} << 1$. Также мала величина h, имеющая порядок $\frac{\lambda}{a}$, поскольку длина волны должна быть значительно меньше размеров волновода.

Методика расчета

Для применения метода Боголюбова запишем уравнения (5) и (6) в символической форме:

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = a\left(t, x, \phi, \varepsilon\right) = a^0\left(t, x, \phi\right) + \varepsilon\, a^1\left(t, x, \phi\right) + \ldots\\ &\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{\varepsilon}\omega\left(t, x\right) + A\left(t, x, \phi; \varepsilon\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $x = \left(\vec{r}, \vec{p}\right)$ — совокупность (вектор) "медленных" переменных, $a = \left(\vec{a_r}, \vec{a_p}\right)$ — вектор правых частей уравнений движения. Введенный формально малый параметр ε явно показывает, что фаза ϕ является быстро меняющейся величиной, т. е. частота ω — "большой". Смысл усреднения по Боголюбову заключается в том, что точная система уравнений движения заменяется упрощенной, более грубой системой. Чтобы получить такие усредненные уравнения, необходимо перейти от истинных переменных частицы (x, ϕ) к новым, сглаженным (X, α) с помощью формул:

$$x = X + \varepsilon\, g_1(t, X, \alpha) + \varepsilon^2 g_2(t, X, \alpha) + \ldots$$
$$\phi = \alpha + \varepsilon\, q_1(t, X, \alpha) + \varepsilon^2 q_2(t, X, \alpha) + \ldots \quad (8)$$

Функции g_i, q_l (векторы) описывают быстро осциллирующие периодические добавки к сглаженным переменным частицы X и фазе волны α, которые рассматриваются как усредненные по быстрой фазе переменные:

$$X = \bar{x} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\, d\alpha, \qquad \alpha = \bar{\phi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi\, d\alpha. \quad (9)$$

Таким образом, на функции g_i, q_l накладывается условие:

$$\overline{g_i} = \overline{q_l} = 0. \quad (10)$$

По предположению [12], сглаженные переменные X, α описываются уравнениями:

$$\frac{dX}{dt} = \vartheta_0(t, X) + \varepsilon\, \vartheta_1(t, X) + \varepsilon^2 \vartheta_2(t, X) + \ldots$$
$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{\varepsilon}\omega(t, X) + \Omega_0(t, X) + \varepsilon\, \Omega_1(t, X) + \ldots, \quad (11)$$

т. е. считается, что правые части уравнений для сглаженных переменных не зависят от быстрой фазы α. Это и значит, что по быстрой фазе проведено усреднение. Основная задача метода усреднения стоит в том, чтобы найти правые части уравнений (11), т. е. функции $\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$, Ω_0, Ω_1, $\Omega_2, \ldots$, и вычислить периодические добавки g_1, g_2, ..., q_1, $q_2, \ldots$ к сглаженным переменным. Конкретно, усредненные уравнения (11) имеют вид:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\vartheta}_{0\vec{r}}(t, X) + \varepsilon\, \vec{\vartheta}_{1\vec{r}}(t, X) + \varepsilon^2 \vec{\vartheta}_{2\vec{r}}(t, X) + \ldots \quad (12)$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{\vartheta}_{0\vec{p}}(t, X) + \varepsilon\, \vec{\vartheta}_{1\vec{p}}(t, X) + \varepsilon^2 \vec{\vartheta}_{2\vec{p}}(t, X) + \ldots \quad (13)$$

Правая часть уравнения (12) представляет собой усредненную скорость частицы, а уравнения (13) — усредненную силу, действующую на частицу.

В нулевом приближении функции $\vec{\vartheta}_0$, Ω_0 определяются как средние значения правых частей точных уравнений (5):

$$\vartheta_0 = \overline{a^0}, \qquad \Omega_0 = \overline{A}. \quad (14)$$

Оставляя за сглаженным импульсом прежнее обозначение $\vec{P}$, из исходных уравнений (5) получаем:

$$\vartheta_{0x} = \frac{P_x}{\Gamma}, \quad \vartheta_{0y} = \frac{P_y}{\Gamma}, \quad \vartheta_{0z} = \frac{P_z}{\Gamma},$$
$$\vartheta_{0p_x} = 0, \quad \vartheta_{0p_y} = 0, \quad \vartheta_{0p_z} = 0, \quad (15)$$
$$\Omega_0 = -\frac{\chi}{\Gamma} P_z,$$

где $\Gamma = \left(1 + \vec{P}^2\right)^{1/2}$ — сглаженный релятивистский фактор.

Формулы (15) показывают, что в нулевом приближении волна в среднем не действует на частицу. Для того чтобы найти усредненные уравнения первого приближения ϑ_1, Ω_1, необходимо сначала вычислить быстроосциллирующие поправки первого порядка g_1, q_1 к сглаженным переменным по формулам [2, 5]:

$$g_1(t, X, \alpha) = \frac{1}{\omega}\int \tilde{a}^0 d\alpha \equiv \frac{1}{\omega}\hat{\tilde{a}}^0,$$
$$q_1(t, X, \alpha) = \frac{1}{\omega}\hat{\tilde{A}} + \frac{1}{\omega}\hat{\tilde{g}}_{1i}\frac{\partial\omega}{\partial X_i}. \quad (16)$$

Значок “тильда” над функцией означает ее периодическую составляющую. Символ "крышка" $\hat{\tilde{a}}$ означает переменную часть интеграла от переменной составляющей величины $a(t, X, \alpha)$ [2]. Отсюда следует, что периодические поправки к радиус-вектору частицы и фазе волны в первом приближении отсутствуют:

$$g_{1x} = 0, \quad g_{1y} = 0, \quad g_{1z} = 0, \quad q_1 = 0, \quad (17)$$

а периодические поправки к вектору импульса определяются формулами:

$$g_{1p_x} = -\mu\, f_1 \cos\alpha, \quad g_{1p_y} = -\mu\, f_2 \cos\alpha,$$
$$g_{1p_z} = -\mu\frac{\chi}{\Gamma}\left(P_x f_1 + P_y f_2\right)\cos\alpha. \quad (18)$$

При вычислении функции g_1 необходимо рассматривать лишь переменную часть интеграла от переменной части величины $a^0(t,X,\alpha)$, так как функции g_1, как было сказано выше, являются чисто периодическими. Правые части усредненных уравнений в первом приближении определяются формулами [2, 5]:

$$\vartheta_1 = \overline{a^1} + \overline{g_{1i}\frac{\partial\tilde{a}^0}{\partial X_i}} + \overline{q_1\frac{\partial\tilde{a}^0}{\partial\alpha}},$$

$$\Omega_1 = \overline{A^1} + \overline{g_{1i}\frac{\partial A^0}{\partial X_i}} + \overline{q_1\frac{\partial\tilde{a}^0}{\partial\alpha}} + \frac{1}{2}\overline{\tilde{g}_{1i}\tilde{g}_{1j}\frac{\partial^2\omega}{\partial X_i\partial X_j}}. \quad (19)$$

Проводя вычисления по этим формулам, получаем, что и в первом приближении усредненное воздействие волны отсутствует:

$$\vartheta_{1x} = 0,\ \vartheta_{1y} = 0,\ \vartheta_{1z} = 0,\ \vartheta_{1p_x} = 0,\ \vartheta_{1p_y} = 0,$$
$$\vartheta_{1p_z} = 0. \quad (20)$$

Поэтому необходимо проводить вычисления переменных второго приближения. Правые части усредненных уравнений движения частицы (12) и (13) определяются общими формулами [2, 5]:

$$\begin{aligned}\vartheta_2 &= \overline{a^2} + \overline{g_{1i}\frac{\partial\tilde{a}^1}{\partial X_i}} + \overline{q_1\frac{\partial\tilde{a}^1}{\partial\alpha}} + \overline{g_{2i}\frac{\partial\tilde{a}^0}{\partial X_i}} + \overline{q_2\frac{\partial\tilde{a}^0}{\partial\alpha}} + \\ &+ \frac{1}{2}\overline{\tilde{g}_{1i}\tilde{g}_{1j}\frac{\partial^2\tilde{a}^0}{\partial X_i\partial X_j}} + \frac{1}{2}\overline{\tilde{q}_1^2\frac{\partial^2\tilde{a}^0}{\partial\alpha^2}} + \overline{\tilde{q}_1\tilde{g}_{1i}\frac{\partial^2\tilde{a}^0}{\partial X_i\partial\alpha}}.\end{aligned} \quad (21)$$

Согласно этим формулам вычисление величин ϑ_2 требует знания периодических добавок к сглаженным переменным не только первого, но и второго приближения g_2, q_2. Эти поправки вычисляются по формулам:

$$g_2 = \hat{\hat{F}},\quad q_2 = \hat{\hat{\Phi}}, \quad (22)$$

где

$$F = \tilde{a}^1 + \tilde{g}_{1i}\frac{\tilde{\partial}\tilde{a}^0}{\partial X_i} + \tilde{q}_1\frac{\tilde{\partial}\tilde{a}^0}{\partial\alpha} - Dg_1, \quad (23)$$

$$\begin{aligned}\Phi &= \tilde{A}^1 + \tilde{g}_{1i}\frac{\tilde{\partial}\tilde{A}^0}{\partial X_i} + \tilde{q}_1\frac{\tilde{\partial}\tilde{A}^0}{\partial\alpha} + \tilde{g}_{1i}\tilde{g}_{1j}\frac{\partial^2\omega}{\partial X_i\partial X_j} + \\ &+ g_{2i}\frac{\partial\omega}{\partial X_i} - Dq_1.\end{aligned} \quad (24)$$

Оператор D определяется выражением

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \vartheta_{0i}\frac{\partial}{\partial X_i} + \Omega_0\frac{\partial}{\partial\alpha}.$$

После вычислений находим периодические поправки второго приближения к радиус-вектору частицы:

$$g_{2x} = -\mu\left(\frac{f_1}{\Gamma} - \frac{P_x}{\Gamma^3}\left(1+\frac{\chi}{\Gamma}P_z\right)\left(P_xf_1 + P_yf_2\right)\right)\sin\alpha + \ldots$$

$$g_{2y} = -\mu\left(\frac{f_2}{\Gamma} - \frac{P_y}{\Gamma^2}\left(1+\frac{\chi}{\Gamma}P_z\right)\left(P_xf_1 + P_yf_2\right)\right)\sin\alpha + \ldots \quad (25)$$

$$g_{2z} = \mu\frac{P_z}{\Gamma^3}\left(1+\frac{\chi}{\Gamma}P_z\right)\left(P_xf_1 + P_yf_2\right)\sin\alpha + \ldots,$$

а также к усредненному импульсу:

$$g_{2p_x} = \frac{\mu}{\Gamma}\left(P_yh + \left(P_xf_{1x} + P_yf_{1y}\right)\right)\sin\alpha + \ldots$$

$$g_{2p_y} = \frac{\mu}{\Gamma}\left(-P_xh + \left(P_xf_{2x} + P_yf_{2y}\right)\right)\sin\alpha + \ldots \quad (26)$$

$$\begin{aligned}g_{2p_z} &= -\mu^2\chi\left(\frac{1}{\Gamma}\left(f_1^2 + f_2^2\right) - \frac{1}{\Gamma^3}\left(P_xf_1 + P_yf_2\right)^2\right)\cos 2\alpha + \\ &+ \frac{\mu}{\Gamma^2}\chi\left(P_x^2f_{1x} + P_xP_y\left(f_{1y} + f_{2x}\right) + P_y^2f_{2y}\right)\sin\alpha - \\ &- \frac{\mu}{\Gamma^2}\chi^2P_z\left(P_xf_1 + P_yf_2\right)\cos\alpha\ldots\end{aligned}$$

и к фазе волны:

$$q_2 = -\mu\frac{\chi}{\Gamma^2}P_z\left(1+\frac{\chi}{\Gamma}P_z\right)\left(P_xf_1 + P_yf_2\right)\sin\alpha + \ldots. \quad (27)$$

В формулах (25—27) опущены члены, не дающие вклада при усреднении, и введены обозначения: $f_{1x} = \frac{df_1}{dx}$, $f_{2x} = \frac{df_2}{dx}$, $f_{1y} = \frac{df_1}{dy}$, $f_{2y} = \frac{df_2}{dy}$.

Усредненные уравнения движения частицы

После вычислений по указанным выше формулам получаем искомые усредненные уравнения движения частицы:

$$\frac{dP_x}{d\tau} = \frac{-\mu^2}{2\Gamma}\left(\left(f_1f_{1x} + f_2\left(f_{1y}+h\right)\right) - \frac{1}{\Gamma^2}\left(P_xf_{1x} + P_y\left(f_{1y}+h\right)\right)\left(P_xf_1 + P_yf_2\right)\right) \equiv F_x, \quad (28)$$

$$\frac{dP_y}{d\tau} = \frac{-\mu^2}{2\Gamma}\left(\left(f_1\left(f_2-h\right) + f_2f_{2y}\right) - \frac{1}{\Gamma^2}\left(P_x\left(f_{2x}-h\right) + P_yf_{2y}\right)\left(P_xf_1 + P_yf_2\right)\right) \equiv F_y,$$

$$\frac{dP_z}{d\tau} = \frac{\mu^2}{2\Gamma^2}\chi\ (f_{1y} - f_{2x} + h)(P_yf_1 - P_xf_2) \equiv F_z. \quad (29)$$

Правые части уравнений (28) и (29) представляют собой компоненты вектора пондеромоторной силы. Видно, что компоненты вектора пондеромоторной силы в поперечной плоскости волновода содержат члены, не зависящие от импульса частицы, тогда как сила в направлении распространения волны обусловлена ненулевыми поперечными составляющими импульса. Кроме того, видно, что в рассматриваемом случае пондеромоторная сила не является потенциальной. Выпишем в явном виде компоненты пондеромоторной силы в поперечной плоскости волновода:

$$F_x = \frac{-\mu^2}{2\Gamma}\frac{\pi}{k_0}\left\{\begin{array}{l} \frac{Mc\omega}{2}\frac{m}{a}\sin\left(\frac{2m\pi}{a}X\right)\left[\cos^2\left(\frac{m\pi}{a}Y\right)-\left(\frac{na}{mb}\right)^2\sin^2\left(\frac{m\pi}{a}Y\right)\right]+ \\ \frac{1}{Mc\omega\Gamma^2}\left[P_x\left(\frac{n}{b}\right)\sin\left(\frac{m\pi}{a}X\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}Y\right)+P_y\left(\frac{m}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi}{a}X\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}Y\right)\right] \\ \left[P_x\left(\frac{na}{mb}\right)\cos\left(\frac{m\pi}{a}X\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}Y\right)-P_y\sin\left(\frac{m\pi}{a}X\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}\right)Y\right] \end{array}\right\} \quad (30)$$

$$F_y = \frac{\mu^2}{2\Gamma}\frac{\pi n}{bk_0}\left\{\begin{array}{l} \frac{Mc\omega}{2}\left[\sin^2\left(\frac{m\pi}{a}X\right)-\left(\frac{na}{mb}\right)^2\cos^2\left(\frac{m\pi}{a}X\right)\right]\sin\left(\frac{2n\pi}{b}Y\right)+ \\ \frac{1}{Mc\omega\Gamma^2}\left[P_x\left(\frac{na}{mb}\right)\cos\left(\frac{m\pi}{a}X\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}Y\right)+P_y\sin\left(\frac{m\pi}{a}X\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}Y\right)\right] \\ \left[P_x\left(\frac{na}{mb}\right)\cos\left(\frac{m\pi}{a}X\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}Y\right)-P_y\sin\left(\frac{m\pi}{a}X\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}Y\right)\right] \end{array}\right\}$$

Вычисление силы в направлении распространения волны показывает, что она равна нулю в случае произвольной H_{mn}-моды независимо от поперечного импульса (скорости) частицы, взаимодействующей с волной:

$$F_z = 0, \quad (31)$$

Это следует из того, что в формуле (29) выражение

$$f_{1y} - f_{2x} + h = 0 \,. \quad (32)$$

Полученный результат (31) находится в согласии с выводами работы [9]. Вместе с тем нетрудно показать, что при выборе начальных условий, когда упорядоченное поперечное движение частицы происходит только вдоль одной из осей перпендикулярно волновому вектору волны, продольная усредненная сила оказывается отличной от нуля. Дело в том, что при отсутствии одной из поперечных составляющих скорости упорядоченного движения частицы изменяются выражения для периодических добавок g_i, q_l к сглаженным динамическим переменным. Это приводит к выражению для пондеромоторной силы, отличному от (29). При упорядоченном движении частицы вдоль оси x, как в [11], усредненная сила в направлении распространения волны определяется формулой:

$$F_z = \mu^2\frac{\chi}{2\Gamma^5}f_1 f_{1x}P_x^3 \,. \quad (33)$$

В случае волны моды H_{12} это выражение сводится к результату [11]. Таким образом, результат вычисления усредненной силы, действующей на частицу в прямоугольном волноводе в направлении распространения волны H_{mn}, существенно зависит от условий ввода частицы в волну.

Заключение

По методу Боголюбова получены усредненные уравнения для сглаженных динамических переменных частицы, движущейся с релятивистской скоростью в поле волны произвольной моды H_{mn} в прямоугольном волноводе. Также вычислены периодические добавки первого и второго приближения к сглаженным динамическим переменным. Определены компоненты вектора пондеромоторной силы, действующей на частицу в поперечной плоскости волновода. Показано, что при последовательном применении метода усреднения сила, действующая на релятивистскую частицу в направлении распространения волны, отсутствует в согласии с расчетами [9]. Наряду с этим при определенном выборе параметров ввода частицы в волну частица испытывает действие пондеромоторной силы в направлении распространения волны. Полученное в этом случае общее выражение для пондеромоторной силы согласуется с результатом [11]. Таким образом, проведенные расчеты показали, что усредненное действие поля волны моды H_{mn} на релятивистскую частицу существенно зависит от параметров ее ввода в волну.

Работа (частично) проведена в рамках реализации ФЦП "Научные и педагогические кадры инновационной России на 2009—2012 гг.", а также поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 10-02-01302).

Литература

1. *Гапонов А. В., Миллер М. А.*// ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 242; *Миллер М. А.*// Изв. вузов (Радиофизика). 1958. Т. 1. С. 110.

2. *Морозов А. И., Соловьев Л. С.* Движение заряженных частиц в электромагнитных полях// Вопросы теории плазмы / Под ред. М. А. Леонтовича. — М.: Госатомиздат. 1963. Вып. 2. С. 177.

3. *Литвак А. Г.* Динамические нелинейные электромагнитные явления в плазме// Вопросы теории плазмы/ Под ред. М. А. Леонтовича. — М.: Атомиздат. 1980. Вып. 10. С. 164.

4. *Милантьев В. П.* // ЖЭТФ. 1977. Т. 72. С. 159.

5. *Милантьев В. П.* Дрейфовая теория движения заряженных частиц в электромагнитных полях. — М.: Изд. УДН, 1987.

6. *Kibble T.* // Phys. Rev. 1966. V. 150. P. 1060.

7. *Андреев С. Н., Макаров В. П., Рухадзе А. А.*// Квантовая электроника. 2009. Т. 39. С. 68.

8. *Таранухин В. Д.* // ЖЭТФ. 2000. Т. 117. С. 511.

9. *Битук Д. Р., Федоров М. В.* // ЖЭТФ. 1999. Т. 116. Вып. 4 (10). С. 1198.

10. *Милантьев В. П., Степина С. П.* // Прикладная физика. 2006. № 6. С. 90.

11. *Серов А. В.* // ЖЭТФ. 2001. Т. 119 (1). С. 27.

12. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974.

Averaged forces acting on a relativistic particle in a waveguide

R. A. H. Castillo, V. P. Milantiev
Russian University of People's Friendship,
6 Mikluho-Maklay str., Moscow, 117198, Russia
E-mail: vmilantiev@sci.pfu.edu.ru

The general expressions for the components of the averaged (ponderomotive) force acting on a relativistic charged particle in the field of the waveguide H_{mn}-mode are obtained. It is shown that, in general, the average force along the direction of wave propagation is equal to zero. However, the averaged force can differ from zero under specific conditions of the particle injection into the wave.

PACS: 41.90.+e, 52.40.Db

Keywords: averaged forces, relativistic charged particle, rectangular waveguide, H_{mn}-mode.

Bibliography — 12 references. *Received May 25, 2011*