Общая физика

УДК 533.93

Электродинамические свойства невырожденной низкотемпературной плазмы при $\hbar \to 0$

Б. А. Векленко

Представлена электродинамика низкотемпературной плазмы, включающая квантованное продольное электромагнитное поле и содержащая безразмерный квантовый параметр. Таковым является безразмерный заряд, обратно пропорциональный средней квадратичной скорости электронов в плазме и по величине превышающий единицу. Таким образом, ставятся под сомнение результаты численных расчетов, основанных на теории возмущений.

PACS: 52.35.-g

Ключевые слова: низкотемпературная плазма, электродинамика, квантовый параметр, безразмерный заряд.

Введение

Электрон-ионная плазма традиционно считается классической, если при ее описании постоянная Планка из расчетов выпадает. Необходимым условием классичности является малость энергии Ферми электронов по сравнению с температурой [1]. Есть основания полагать, что это условие не является достаточным, во всяком случае, при учете флуктуаций [2]. Электродинамика классической нерелятивистской электрон-ионной плазмы ведет свое начало от работ [3—6] и в отдельных аспектах неплохо согласуется с экспериментальными данными [1]. Квантовая теория плазмы [5, 7, 8] развивалась практически параллельно и ставила целью изучение свойств плазмы в том случае, если электроны подчиняются статистике Ферми—Дирака. При этом всегда предполагалось, что электромагнитное поле, описывающее взаимодействие электронов и ионов, остается классическим [9, 10]. Вопрос о квантовом описании электромагнитного поля не ставился просто потому, что теория при этом сильно усложняется, а опыт, приобретенный, в основном, в лазерной области [11], подсказывал, что учет процедуры квантования поперечного электромагнитного поля оказывает ничтожное влияние на поведение "квантовых средних".

Ниже показано, что в случае электрон-ионной плазмы из-за наличия квантованных продольных волн ситуация меняется. Очевидно, что квантование поля в плазме повлечет за собой появление в теории кванта энергии $\hbar\Omega$, где $\Omega = \sqrt{e^2 n / m}$ — ленгмюровская частота колебаний плазмы. Здесь используются общепринятые обозначения, а именно, e — заряд электрона, m — его масса, n — концентрация электронов в плазме. Чтобы исключить из теории квант энергии $\hbar\Omega$, необходимо предположить, что классическая энергия взаимодействия частиц значительно превосходит эту величину, т. е.

$$\frac{e^2}{4\pi} n^{\frac{1}{3}} >> \hbar\Omega.$$

Но этого недостаточно. Это неравенство обеспечивает превосходство над $\hbar\Omega$ энергии взаимодействия частиц "в среднем". В плазме частицы взаимодействуют друг с другом вплоть до расстояний, определяемых дебаевским радиусом экранирования $r_D = v_e / \Omega$ (v_e – средняя квадратичная скорость электронов). Но поскольку $r_D >> n^{-\frac{1}{3}}$, то имеется много частиц, расстояния между которыми лежат в интервале $n^{-\frac{1}{3}} \div r_D$. Для этих частиц квантовые эффекты могут оказаться существенными. Чтобы исключить квантовые эффекты полностью, следует предположить, что

$$\frac{e^2}{4\pi r_D} >> \hbar\Omega.$$

Векленко Борис Александрович, профессор.
Московский энергетический институт (технический университет).
Россия, 111250, Москва, ул. Красноказарменная, 14.
E-mail: VeklenkoBA@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 23 июня 2010 г.

Или, что то же самое

$$\frac{e^2}{4\pi\hbar v_e} >> 1. \tag{1}$$

В стандартной невырожденной низкотемпературной плазме при температуре ~ 10^4 K эта величина порядка десяти, и неравенство (1) заведомо выполняется. Но настораживает появление в теории безразмерного заряда, величина которого превышает единицу. Последнее обстоятельство исключает возможность использования теории возмущений. Если учесть, что сам вывод неравенства (1), по существу, основан на теории возмущений, то можно сделать вывод о противоречивости существующей классической теории плазмы из-за наличия большого квантового параметра $e^2/4\pi\hbar v_e$. К тому же неравенство (1) накладывает ограничение снизу на величину заряда. Это означает, что классическое описание почти идеальной плазмы ($e \to 0$) с нарушением неравенства (1) не может служить основанием для дальнейших приближений. В теории можно ожидать появления немалых неаналитических по $\hbar$ квантовых поправок. Цель работы — прояснить возникшую ситуацию.

Базовые уравнения

Будем исходить из квантового описания плазмы, представляя поле электронов гейзенберговским полевым оператором $\check{\psi}(\mathbf{r},t)$, заданным в каждой точке пространства $\mathbf{r}$ в любой момент времени t. Поле ионов рассматривать не будем, считая ионы равномерно распределенными по пространству. Электромагнитному полю, осуществляющему взаимодействие между частицами, сопоставим полевой векторный оператор $\check{A}^{\nu}(\mathbf{r},t)$. Систему уравнений для полевых операторов пишем в виде стандартных уравнений нерелятивистской квантовой электродинамики:

$$i\hbar\frac{\partial\check{\psi}(x)}{\partial t} = \left(\frac{\hat{p}_{\mathbf{r}}^2}{2m} - \frac{e}{2mc}\check{A}^{\nu}(x)\hat{p}_{\mathbf{r}}^{\nu} - \frac{e}{2mc}\hat{p}_{\mathbf{r}}^{\nu}\check{A}^{\nu}(x) + \frac{e^2}{2mc^2}\check{A}^{\nu}(x)\check{A}^{\nu}(x)\right)\check{\psi}(x),$$

$$x = \{\mathbf{r},t\}; \tag{2}$$

$$\nabla^2\check{A}^{\nu}(x) - \frac{\partial}{\partial r^{\nu}}\frac{\partial}{\partial r^{\nu_1}}\check{A}^{\nu_1}(x) - \mu^2\check{A}^{\nu}(x) = -\frac{1}{c}\check{j}^{\nu}(x); \tag{3}$$

$$\check{j}^{\nu}(x) = \frac{e}{2m}\times\left(\check{\psi}^+(x)\hat{p}_{\mathbf{r}}^{\nu}\check{\psi}(x) + \hat{p}_{\mathbf{r}}^{\nu *}\check{\psi}^+(x)\check{\psi}(x)\right) - \frac{e^2}{mc}\check{\psi}^+(x)\check{A}^{\nu}(x)\check{\psi}(x) + j_{cl}^{\nu}(x),$$

$$\hat{p}_{\mathbf{r}}^{\nu} = -i\hbar\nabla_{\mathbf{r}}^{\nu}.$$

По повторяющимся индексам здесь и ниже подразумевается суммирование, через $j_{cl}^{\nu}(x)$ обозначена плотность классического тока, если он присутствует в системе. Использована калибровка с нулевым скалярным потенциалом [12], метод непротиворечивого использования которой в квантовой электродинамике изложен в [13]. В конце расчетов следует положить $\mu \to 0$. Ограничиваясь линейными по электромагнитному полю процессами, опустим в (2) последнее квадратичное слагаемое. Пренебрежем некоммутативностью операторов $\hat{p}_{\mathbf{r}}^{\nu}$ и $\check{A}^{\nu}(x)$, что вполне допустимо, если в почти равновесной плазме температура T удовлетворяет условию $T >> \hbar\Omega$. В уравнении (2) пренебрежем слагаемым, содержащим квадрат векторного потенциала. Отсутствие этого слагаемого не скажется на качественных выводах настоящей работы. В невырожденной плазме конкретный вид перестановочных соотношений для операторов $\check{\psi}(x)$ не имеет значения. Поэтому будем считать для простоты, что

$$\left[\check{\psi}(x);\check{\psi}^+(x')\right]_{t=t'} = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),$$

$$\left[\check{A}^{\nu}(x);\frac{\partial}{\partial x'}\check{A}^{\nu'}(x')\right]_{t=t'} = i\hbar c^2\delta_{\nu\nu'}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}').$$

Для исследования системы воспользуемся методом квантовых функций Грина в формализме Л. В. Келдыша [14]. Согласно определению вводятся четыре функции Грина:

$$G_{ll'}(x,x') = \frac{1}{i\hbar}\left\langle \hat{T}\,\check{\psi}_l(x)\check{\psi}_{l'}^+(x')\right\rangle; \tag{4}$$

$$D_{ll'}^{\nu\nu'}(x,x') = \frac{1}{i\hbar}\left\langle \hat{T}\,\check{A}_l^{\nu}(x)\check{A}_{l'}^{\nu'}(x')\right\rangle - \frac{1}{i\hbar}\left\langle \check{A}_l^{\nu}(x)\right\rangle\left\langle \check{A}_{l'}^{\nu'}(x')\right\rangle. \tag{5}$$

Усреднение в формулах (4), (5) осуществляется как в квантовом смысле, так и по ансамблю тождественных систем. В теории рассматриваются две временные линии-стрелы. При этом, времена $-\infty < t < \infty$ на линии $l = 2$ считаются хронологически старше времен $-\infty < t < \infty$, заданных на линии $l = 1$. Хронологический оператор $\hat{T}$ выстраивает произведение полевых операторов в хронологическом порядке, согласованном с принятым определением. Полевые операторы (4), (5) в согласии с (2), (3) удовлетворяют следующим уравнениям Дайсона—Келдыша

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}G_{ll'}(x,x') = \sigma^{(3)}_{ll'}\delta(x,x') + \frac{1}{2m}\hat{p}^2_{\mathbf{r}}G_{ll'}(x,x') - \frac{e}{mc}\hat{p}^{\nu}_{\mathbf{r}}\left\langle \check{A}^{\nu}_l(x)\right\rangle G_{ll'}(x,x') - \sum_{l_1}\int M_{ll_1}(x,x_1)G_{l_1l'}(x_1,x')dx_1; \quad (6)$$

$$\nabla^2\left\langle \check{A}^{\nu}_l(x)\right\rangle - \frac{\partial}{\partial r^{\nu}}\frac{\partial}{\partial r^{\nu_1}}\left\langle \check{A}^{\nu_1}_l(x)\right\rangle - \mu^2\left\langle \check{A}^{\nu}_l(x)\right\rangle - \sum_{l_1}\int \check{D}^{\nu\nu_1}_{ll_1}(x,x_1)\left\langle \check{A}^{\nu_1}_{l_1}(x_1)\right\rangle dx_1 - \frac{e^2n}{mc^2}\left\langle \check{A}^{\nu}_l(x)\right\rangle = -\frac{1}{c}j^{\nu}_{cl}(x); \quad (7)$$

$$\nabla^2 D_{ll'}(x,x') - \frac{\partial}{\partial r^{\nu}}\frac{\partial}{\partial r^{\nu_1}}D^{\nu_1\nu'}_{ll'}(x,x') - \mu^2 D^{\nu\nu'}_{ll'}(x,x') - \sum_{l_1}\int \check{D}^{\nu\nu_1}_{ll_1}(x,x_1)D^{\nu_1\nu'}_{l_1l'}(x_1,x')dx_1 - \frac{e^2n}{mc^2}D^{\nu\nu'}_{ll'}(x,x') = \sigma^{(3)}_{ll'}\delta(x,x'), \quad (8)$$

где $dx = d\mathbf{r}dt$, $\sigma^{(3)}_{ll'}$ — матрица Паули.

При выводе уравнений (7) и (8) была использована аппроксимация

$$\frac{e^2}{2mc}\left\langle \check{\psi}^{+}\check{A}^{\nu}\check{\psi}\right\rangle \approx \frac{e^2n}{2mc}\left\langle \check{A}^{\nu}\right\rangle.$$

Таким образом, решение системы (6)—(8) оказывается точным вплоть до членов $\sim e^2$.

Для массового $M_{ll_1}(x,x_1)$ и поляризационного $\Pi^{\nu\nu'}_{ll_1}(x,x')$ операторов в однопетлевом приближении с "обросшими" функциями Грина, которым и ограничимся, возникают следующие выражения [15]:

$$M_{ll_1}(x,x_1) = i\hbar\left(\frac{e}{mc}\right)^2 \hat{p}^{\nu}_{\mathbf{r}}G_{ll_1}(x,x_1)\hat{p}^{\nu'}_{\mathbf{r}_1}D^{\nu'\nu}_{l_1l}(x_1,x)\sigma^{(3)}_{l_1l_1}; \quad (9)$$

$$\Pi^{\nu\nu_1}_{ll_1}(x,x_1) = i\hbar\left(\frac{e}{mc}\right)^2 \hat{p}^{\nu}_{\mathbf{r}}G_{ll_1}(x,x_1)\hat{p}^{\nu_1}_{\mathbf{r}_1}G_{l_1l}(x_1,x)\sigma^{(3)}_{l_1l_1}. \quad (10)$$

Если взаимодействия в системе отсутствуют ($e \to 0$), то согласно (2), (3)

$$\check{\psi}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}}\exp\left(i\frac{\mathbf{pr}}{\hbar} - i\frac{\varepsilon_p}{\hbar}t\right),$$

$$\check{\psi}^{+}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{p}}\hat{b}^{+}_{\mathbf{p}}\exp\left(-i\frac{\mathbf{pr}}{\hbar} + i\frac{\varepsilon_p}{\hbar}t\right), \quad \varepsilon_p = \frac{p^2}{2m},$$

$$\check{A}^{\nu}(x) = \sum_{\mathbf{k}\lambda}\sqrt{\frac{\hbar c^2}{2V\omega(\lambda)}}e^{\nu}_{\mathbf{k}\lambda}\left(\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}e^{i\mathbf{kr}-i\omega(\lambda)t} + \hat{\alpha}^{+}_{\mathbf{k}\lambda}e^{-i\mathbf{kr}+i\omega(\lambda)t}\right),$$

где $\mathbf{p}$ — импульс электрона, а значения

$$\omega(\lambda) = \begin{cases}\sqrt{k^2c^2+\mu^2}, & \lambda = 1,2\\ \mu, & \lambda = 3\end{cases}$$

определены в соответствии с [13]. Далее, $\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}$ и $\hat{\alpha}^{+}_{\mathbf{k}\lambda}$ являются операторами уничтожения и рождения фотонов в состоянии с волновым вектором $\mathbf{k}$ и индексом поляризации λ. При этом индексы $\lambda = 1, 2$ относятся к волнам с поперечной поляризацией, индекс $\lambda = 3$ — к волнам с продольной поляризацией. Операторы $\hat{b}_{\mathbf{p}}$ и $\hat{b}^{+}_{\mathbf{p}}$ описывают уничтожение и рождение электрона в состоянии с вектором $\mathbf{p}$. Алгебраическое преобразование уравнений (6) и (8) показывает [14], что

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}G_r(x,x') - \frac{1}{2m}\hat{p}^2_{\mathbf{r}}G_r(x,x') + \frac{e}{mc}\hat{p}^{\nu}_{\mathbf{r}}\left\langle \check{A}^{\nu}(x)\right\rangle G_r(x,x') + \int M_r(x,x_1)G_r(x_1,x')dx_1 = \delta(x,x'); \quad (11)$$

$$\nabla^2\left\langle \check{A}^{\nu}(x)\right\rangle - \frac{\partial}{\partial r^{\nu}}\frac{\partial}{\partial r^{\nu_1}}\left\langle \check{A}^{\nu_1}(x)\right\rangle - \int \check{D}^{\nu\nu_1}_r(x,x_1)\left\langle \check{A}^{\nu_1}(x_1)\right\rangle dx_1 - \frac{e^2n}{mc^2}\left\langle \check{A}^{\nu}(x)\right\rangle = -\frac{1}{c}j^{\nu}_{cl}(x);$$

$$\nabla^2 D_r(x,x') - \frac{\partial}{\partial r^{\nu}}\frac{\partial}{\partial r^{\nu_1}} D_r^{\nu_1\nu'}(x,x') -$$
$$-\int \check{D}_r^{\nu\nu_1}(x,x_1) D_r^{\nu_1\nu'}(x_1,x')dx_1 -$$
$$-\frac{e^2 n}{mc^2} D_r^{\nu\nu'}(x,x') = \delta_{\nu\nu'}\delta(x,x'), \quad (12)$$

где запаздывающие функции Грина и запаздывающие массовый и поляризационный операторы определены следующим образом:

$$G_r = G_{11} - G_{12} = -G_{22} + G_{21},$$
$$M_r = M_{11} + M_{12} = M_{22} + M_{21}; \quad (13)$$
$$D_r^{\nu\nu'} = D_{11}^{\nu\nu'} - D_{12}^{\nu\nu'} = -D_{22}^{\nu\nu'} + D_{21}^{\nu\nu'},$$
$$\Pi_r^{\nu\nu'} = \Pi_{11}^{\nu\nu'} + \Pi_{12}^{\nu\nu'} = \Pi_{22}^{\nu\nu'} + \Pi_{21}^{\nu\nu'}. \quad (14)$$

При решении уравнений (6), (7), если состояние системы близко к термодинамическому равновесию, постоянные интегрирования удобно определять из флуктуационно-диссипационной теоремы [16]:

$$G_{12} = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu'}{T}} - 1}\left(G_r - G_a\right),$$
$$G_{21} = \left(1 + \frac{1}{e^{\frac{E-\mu'}{T}} - 1}\right)\left(G_r - G_a\right), \qquad G_a = G_r^+,$$
$$D_{12}^{\nu\nu'} = \frac{1}{e^{\frac{E}{T}} - 1}\left(D_r^{\nu\nu'} - D_a^{\nu\nu'}\right),$$
$$D_{21}^{\nu\nu'} = \left(1 + \frac{1}{e^{\frac{E}{T}} - 1}\right)\left(D_r^{\nu\nu'} - D_a^{\nu\nu'}\right),$$
$$D_a^{\nu\nu'} = (D_r^{\nu\nu'})^+, \quad (15)$$

которая в условиях термодинамического равновесия полностью согласуется с матричным формализмом Келдыша. В равенствах (15) через μ' обозначен химический потенциал электронного газа. Если в уравнениях (11), (12) опустить массовый и поляризационный операторы, то

$$\overset{0}{G}_r(x,x') =$$
$$= \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{p}}\int \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - i\frac{E}{\hbar}(t-t')\right)\times$$
$$\times \overset{0}{G}_r\left(\mathbf{p};\frac{E}{\hbar}\right)\frac{dE}{2\pi\hbar}; \quad (16)$$

$$\overset{0}{D}{}_r^{\nu\nu'}(x,x') = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{p}}\int \exp\left(i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - i\frac{E}{\hbar}(t-t')\right)\times$$
$$\times \overset{0}{D}{}_r^{\nu\nu'}\left(\mathbf{k};\frac{E}{\hbar}\right)\frac{dE}{2\pi\hbar}, \quad (17)$$

где

$$\overset{0}{G}_r\left(\mathbf{p};\frac{E}{\hbar}\right) = \frac{1}{E - \varepsilon_p + i0};$$
$$\overset{0}{D}{}_r^{\nu\nu'}\left(\mathbf{k},\frac{E}{\hbar}\right) = \left(\delta_{\nu\nu'} - \frac{k^{\nu}k^{\nu'}}{k^2}\right)\times$$
$$\times \frac{1}{\frac{E^2}{\hbar^2} - k^2c^2 - \Omega^2 + 2i0E} + \frac{k^{\nu}k^{\nu'}}{k^2}\frac{1}{\frac{E^2}{\hbar^2} - \Omega^2 + 2i0E}. \quad (18)$$

Поляризационный оператор невырожденной плазмы

Для невырожденного газа

$$M_r = \left(M_{21} + M_{12}\right)\vartheta\left(t - t'\right) = M_{12}\vartheta\left(t - t'\right), \quad (19)$$

где $\vartheta\left(t-t'\right)$ — ступенчатая функция Хевисайда. Подстановка (16)—(18) в (9) и (10) с учетом (19) показывает, что для образов преобразования Фурье справедливы следующие выражения:

$$M_r\left(\mathbf{p};\frac{E}{\hbar}\right) = \frac{i}{V}\left(\frac{e}{m}\right)^2 \int\sum_{\mathbf{k}} G_r \times$$
$$\times\left(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k};\frac{E-E'}{\hbar}\right) D_{21}^{\nu_1\nu_2}\left(\mathbf{k};\frac{E'}{\hbar}\right) p^{\nu_1}p^{\nu_2}\frac{dE'}{2\pi}; \quad (20)$$

$$\Pi_{12}^{\nu\nu'}\left(\mathbf{k};\omega\right) = -\frac{i}{V}\left(\frac{e}{mc}\right)^2 \sum_{\mathbf{p}}\int G_{12}\times$$
$$\times\left(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k};\frac{E}{\hbar} + \omega\right) G_{21}\left(\mathbf{p};\frac{E}{\hbar}\right) p^{\nu}p^{\nu'}\frac{dE}{2\pi}; \quad (21)$$

$$\Pi_{21}^{\nu\nu'}\left(\mathbf{k};\omega\right) = \frac{i}{V}\left(\frac{e}{mc}\right)^2 \sum_{\mathbf{p}}\int G_{21}\times$$
$$\times\left(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k};\frac{E}{\hbar} + \omega\right) G_{12}\left(\mathbf{p};\frac{E}{\hbar}\right) p^{\nu}p^{\nu'}\frac{dE}{2\pi}. \quad (22)$$

После подстановки в (20)—(22) вместо функций G_{12} и G_{21} их аппроксимации в виде:

$$G_{12} = \overset{0}{G}_{12} = -2\pi i N(\mathbf{p})\delta\left(E - \frac{p^2}{2m}\right);$$
$$G_{21} = \overset{0}{G}_{21} = -2\pi i\delta\left(E - \frac{p^2}{2m}\right);\ N(\mathbf{p}) = \left\langle \hat{b}_{\mathbf{p}}^{+}\hat{b}_{\mathbf{p}}\right\rangle, \quad (23)$$

где $N(\mathbf{p})$ — среднее число электронов в плазме, обладающих импульсом $\mathbf{p}$, находим, что

$$\Pi_r^{\nu\nu'}(\mathbf{k};\omega)=$$
$$=\left(\delta_{\nu\nu'}-\frac{k^{\nu}k^{\nu'}}{k^2}\right)\Pi_r^{tr}(k;\omega)+\frac{k^{\nu}k^{\nu'}}{k^2}\Pi_r^{l}(k;\omega); \quad (24)$$

$$\Pi_r^{tr}(k;\omega)=-\frac{n\omega}{2k^2}\left(\frac{e}{mc}\right)^2\sum_{\mathbf{p}}\frac{[\mathbf{kp}]\frac{\partial}{\partial\varepsilon}f(\varepsilon)}{\omega-\frac{\mathbf{kp}}{m}+i0}-\frac{\Omega^2}{c^2}; \quad (25)$$

$$\Pi_r^{l}(k;\omega)=-\frac{n\omega}{k^2}\left(\frac{e}{mc}\right)^2\sum_{\mathbf{p}}\frac{(\mathbf{kp})^2\frac{\partial}{\partial\varepsilon}f(\varepsilon)}{\omega-\frac{\mathbf{kp}}{m}+i0}-\frac{\Omega^2}{c^2}, \quad (26)$$

где для изотропной плазмы $f(\varepsilon)$ — функция распределения электронов по энергиям, совпадающая в условиях термодинамического равновесия с функцией распределения Максвелла. При $k \ll \omega / v_e$ оказывается, что

$$\Pi_r^{l}(k;\omega)=3\frac{\Omega^2 v_e^2}{\omega^2 c^2}k^2. \quad (27)$$

Формулы (24)—(27) приводят к стандартным выражениям [1] для диэлектрической проницаемости бесстолкновительной плазмы. Поправки к этим формулам можно получить, если в (21) и (22) использовать функции G_{12} и G_{21}, определяемые уравнением (6) при отличном от нуля операторе M_{ll_1}, т. е. если отказаться от модели свободных электронов.

Массовый оператор невырожденной плазмы

При вычислении M_r заменим в (20) функции G_r и $D_{21}^{\nu\nu'}$ на $\overset{0}{G}_r$ и $\overset{0}{D}{}_{21}^{\nu\nu'}$. Ограничимся ниже взаимодействием электронов лишь с хаотическими продольными ленгмюровскими колебаниями плазмы и покажем, что это взаимодействие не является слабым. Согласно (15) и (18) теперь

$$D_{21}^{\nu\nu'}\left(\mathbf{k};\frac{E}{\hbar}\right)=-\frac{2\pi i}{\Omega}\frac{k^{\nu}k^{\nu'}}{k^2}\left(1+\frac{1}{e^{\frac{E}{T}}-1}\right)\times$$
$$\times\left[\delta\left(\frac{E}{\hbar}-\Omega\right)-\delta\left(\frac{E}{\hbar}+\Omega\right)\right]\vartheta\left(\frac{|E|}{\hbar v_e}-k\right). \quad (28)$$

При $E \ll \hbar v_e k$ плазменные волны из-за затухания Ландау исчезают, и мы их опускаем. Обращает на себя внимание при $T \gg \hbar\Omega$ наличие $\Omega \sim \sqrt{e^2 n}$ в знаменателе (28). Поперечные волны такой особенностью не обладают. По этой причине мы их не учитываем. Из (20) находим, что

$$M_r\left(\mathbf{p};\frac{E}{\hbar}\right)=\left(\frac{e}{mc}\right)^2\frac{c^2T}{\Omega^2V}\sum_{\mathbf{k}}\frac{k^{\nu_1}k^{\nu_2}}{k^2}\vartheta\left(\frac{\Omega}{v_e}-k\right)\times$$
$$\times\frac{E-\frac{p^2}{2m}-\hbar\frac{\mathbf{pk}}{m}}{\left(E+i0-\frac{p^2}{2m}-\hbar\frac{\mathbf{pk}}{m}\right)^2-\hbar^2\Omega^2}p^{\nu_1}p^{\nu_2}. \quad (29)$$

Нами опущено слагаемое $\hbar^2k^2/2m$, малое по сравнению с $\hbar(\mathbf{pk})/m$ при $T \gg \hbar\Omega$ и не играющее роли при $\hbar \to 0$. Согласно (11) имеем

$$G_r\left(\mathbf{p};\frac{E}{\hbar}\right)=\frac{1}{E-\frac{p^2}{2m}-M_r\left(\mathbf{p};\frac{E}{\hbar}\right)}. \quad (30)$$

Функция $G_r(\mathbf{p},E/\hbar)$ при $M_r(\mathbf{p},E/\hbar)=0$ имеет особенность в точке $E=p^2/2m$. Эта особенность устраняется наличием массового оператора (29), который в этой точке не обращается в бесконечность лишь из-за конечных значений $\hbar$ и Ω. Это означает, что предельный переход $\hbar \to 0$ и $\Omega \to 0$ полностью трансформирует исходную $\overset{0}{G}_r(p,E/\hbar)$ и по этим параметрам теория обладает неаналитичностью. По этой причине появление в теории больших квантовых параметров, связанных с взаимодействием, вполне очевидно.

С учетом (29) и (30) функция $G_r(\mathbf{p},E/\hbar)$ имеет три полюса. В районе полюса $E=p^2/2m$, которым обладает функция $\overset{0}{G}_r$, массовый оператор аппроксимируется следующим образом:

$$M_r\left(\mathbf{p};\frac{E}{\hbar}\right)\approx\frac{2}{9\pi}Z\hbar^2\Omega\frac{E-\frac{p^2}{2m}}{\left(\hbar\frac{\mathbf{pk}}{m}\right)^2-\hbar^2\Omega^2}, \quad (31)$$

при

$$Z=\frac{1}{4\pi}\frac{e^2}{\hbar v_e}\frac{T}{\hbar\Omega}. \quad (32)$$

Если при этом пренебречь в знаменателе (31) первым членом, что лишь занизит результат, то согласно (30) найдем

$$G_r\left(\mathbf{p};\frac{E}{\hbar}\right)=\frac{1}{\frac{2}{9\pi}Z+1}\frac{1}{E-\frac{p^2}{2m}+i0}. \quad (33)$$

Этим приближением мы и ограничимся. Опираясь на формулы (33) и (15), найдем в этом приближении функции G_{12} и G_{21}. Считая, что система находится в состоянии термодинамического равновесия, имеем для невырожденного газа

$$G_{12}\left(\mathbf{p},\frac{E}{\hbar}\right)=-\frac{2\pi i}{1+\dfrac{2}{9\pi}Z}\delta\left(E-\frac{p^2}{2m}\right)\exp\left(-\frac{E-\mu'}{T}\right); \quad (34)$$

$$G_{21}\left(\mathbf{p},\frac{E}{\hbar}\right)=-\frac{2\pi i}{1+\dfrac{2}{9\pi}Z}\delta\left(E-\frac{p^2}{2m}\right). \quad (35)$$

Химический потенциал газа электронов находится из условия

$$N=\sum_{\mathbf{p}}N(\mathbf{p})=i\sum_{\mathbf{p}}\int G_{12}\left(\mathbf{p},\frac{E}{\hbar}\right)\frac{dE}{2\pi}=$$
$$=\frac{1}{\left(1+\dfrac{2}{9\pi}Z\right)}\sum_{\mathbf{p}}\exp\left(\frac{p^2}{2mT}-\mu'\right), \quad (36)$$

где N — полное число электронов в системе.

Сопоставление (36) с (34) показывает, что взаимодействие в плазме не деформирует распределение Максвелла, функция $G_{12}(\mathbf{p},E/\hbar)$ остается без изменения и вновь описывается формулой (23). Что касается функции $G_{21}(\mathbf{p},E/\hbar)$, то сопоставление (35) и (23) показывает, что в результате взаимодействий эта функция уменьшилась в $1 + 2Z/9\pi$ раз. Во столько же раз согласно (21) и (22) уменьшается и поляризационный оператор $\Pi_r^l(\mathbf{k},\omega)$, формирующий диэлектрическую проницаемость плазмы.

Согласно (32) в теории возник большой безразмерный параметр $e^2/4\pi\hbar v_e$, введенный из качественных соображений во вводной части работы. Описываемое формулами (33) и (35) "обрастание" электронов вследствие взаимодействия их с хаотическими ленгмюровскими колебаниями плазмы проявляет себя как в оптических, так и в термодинамических свойствах плазмы. В частности, уменьшая величину поляризационного оператора, параметр Z характеризует степень подавления оптических эффектов, предсказываемых уравнением Власова. Поскольку типичное значение Z значительно превышает единицу, то найденная путем первой итерации функция G_r согласно (33) в $1 + 2Z/9\pi$ раз отличается от исходного (18) приближения $\overset{0}{G}_r$. Это означает, что итерационную процедуру нельзя считать корректной. Формула (33) при $Z > 1$ лишь качественно демонстрирует тот факт, что параметром Z в теории пренебрегать нельзя, а учет этого параметра кардинально влияет на интенсивности взаимодействий в системе, причем это взаимодействие не допускает исследование методом теории возмущений.

Из (32) находим $Z\sim 1/\sqrt{n}$, следовательно, подавление взаимодействий, описываемых уравнением Власова и обусловленных "голыми" электронами, в кулоновых средах по мере уменьшения их плотности возрастает.

Заключение

Квантование продольного электромагнитного поля в невырожденной электрон-ионной плазме влечет за собой появление в теории безразмерного заряда $q^2=e^2/4\pi\hbar v_e$, величина которого заметно превышает единицу. Как следствие, возникает второй безразмерный параметр $Z=q^2T/\hbar\Omega>1$, в Z раз уменьшающий величину поляризационного оператора, характерного для стандартной классической теории плазмы, что во столько же раз влечет за собой подавление известных оптических эффектов, предсказываемых уравнением Власова. Поскольку $Z\sim e^2/\hbar^2\sqrt{n}$, то приближение свободных электронов ($n\to 0$) не может служить хорошим приближением для описания реальных электронов в плазме. Квантование продольного поля приводит к теории, аналитичной по заряду e^2, но вместе с тем неаналитичной по $\hbar$ и n при малых значениях этих величин. При $\hbar\to 0$ очевидно, что $Z\to\infty$ и такой предельный переход оказывается недопустимым. Такое противоречие теории, учитывающей квантованное поле, с предсказаниями стандартной классической теории [1] подчеркивает необходимую неаналитичность расчетных формул по постоянной Планка $\hbar$ и существенную роль квантовых эффектов во всей области существования низкотемпературной плазмы.

Результаты настоящей работы существенным образом опираются на формулу (31), полученную в полюсном приближении. По этой причине они допускают дальнейшее уточнение. Тем не менее, не вызывает сомнений вывод о том, что любая количественная теория электрон-ионной плазмы, построенная без учета квантовых эффектов, окажется несостоятельной.

Многочисленные дискуссии с профессором А. А. Рухадзе оказали неоценимую услугу в работе над данной статьей.

Литература

1. *Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А.* Основы электродинамики плазмы. — М.: Высш. шк., 1988.
2. *Векленко Б. А.*// Прикладная физика. 2009. № 5. С. 5.
3. *Tonks L., Langmuir I.*// Phys. Rev. 1929. V. 33. P. 195.
4. *Ландау Л. Д.* // ЖЭТФ. 1937. Т. 7. С. 203.
5. *Власов А. А.*// Там же. 1938. Т. 8. С. 291.
6. *Ландау Л. Д.*// Там же. 1946. Т. 16. С. 574.
7. *Климонтович Ю. Л., Силин В. П.* // Там же. 1952. Т. 23. С. 151.
8. *Bohm D., Pines D.*// Phys. Rev. 1953. V. 92. P. 609.
9. *Кузелев М. В., Рухадзе А. А.* // УФН. 1999. Т. 169. С. 687.
10. *Шукла П. К., Элиассон Б.*// Там же. 2010. Т. 180. № 1. С. 55.
11. *Scally M. O., Lamb W. E.* //Phys. Rev. 1967. V. 159. P. 208.
12. *Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е.* Методы квантовой теории поля в статистической физике. — М.: ГИФМЛ, 1962.
13. *Ткачук Г. Б.*// Труды Моск. энерг. ин-та. 1978. Вып. 350. С. 26.
14. *Келдыш Л. В.*// ЖЭТФ. 1964. Т. 47. С. 1515.
15. *Векленко Б. А.* // Там же. 1989. Т. 96. С. 457.
16. *Callen H. B., Welton T. A.* //Phys. Rev. 1951. V. 83. P. 34.

Electromagnetic properties of the low-temperature nondegenerate plasma at $\hbar \to 0$

B. A. Veklenko
Moscow Power Engineering Institute (Technical University), 14 Krasnokazarmennaya str., Moscow, 111250, Russia
E-mail: VeklenkoBA@yandex.ru

The electrodynamics of low-temperature plasma with the quantized longitudinal electromagnetic field has the dimensionless quantum parameter. It is the dimensionless charge which is inversely proportional to the mean squared electron velocity. Its value is larger then unity. Thus, all the theoretical results to be obtained by a perturbation technique are doubtful.

PACS: 52.35.-g

Keywords: low-temperature plasma, electrodynamics, quantum parameter, dimensionless charge.

Bibliography — 16 references. *Received June 23, 2010*