

УДК 669

## МЕТОДОЛОГИЯ КОМПЬЮТЕРНОГО АНАЛИЗА СТРУКТУР С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОГО ФОРМАЛИЗМА

*Д. В. Козицкий*

Институт металлургии им. А. А. Байкова РАН, Москва, Россия

*С использованием концепции мультифрактального формализма разработана методика расчета мультифрактальных характеристик изображений исследуемых структур. Изображение сканируется с помощью сканера или цифровой видеокамеры и передается в компьютер в виде файла в графическом формате BMP (256 оттенков серой шкалы). Далее изменением текущей палитры интерактивно подбирается пороговое значение уровня серого, при котором данное изображение переводится в монохромный формат. После этого образ изображения копируется с экрана в оперативную память, представляется в виде двоичного массива и моделируется набором взаимопроницающих фрактальных подмножеств, на основе которых рассчитываются две зависимости, описывающие исходное множество как мультифрактал — спектр сингулярностей  $f(\alpha)$  и спектр размерностей Реньи  $D(q)$ .*

### ОСНОВЫ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА

При изучении структуры вещества сталкиваются с задачами исключительной сложности. Каждая микроскопическая частица мира содержит в себе гигантское количество атомов и молекул, зачастую объединенных в очень сложные, неупорядоченные структуры. Чистые кристаллы или ламинарные потоки жидкости дают нам примеры однородности. В таких системах многое нам понятно, однако абсолютное большинство сложных природных явлений, таких как турбулентное движение жидкостей или газа, осаждение частиц металла при электролизе и образование горных хребтов, фактически остается для нас загадкой.

За последние десять лет и специалисты-экспериментаторы, и математики существенно продвинулись вперед на пути к пониманию подобных явлений. Среди многих новых идей и подходов важное место занимает понятие фрактальной структуры, или фрактала, введенное Бенуа Мандельбротом [1]. Фрактальным называется объект с расплывающейся разреженной структурой. При наблюдении таких объектов с возрастающим увеличением можно видеть, что они проявляют повторяющийся на разных уровнях рисунок. Таким образом, одна и та же структура наблюдается в любом масштабе. Фрактальный объект может, например, выглядеть совершенно одинаково независимо от того, наблюдаем ли мы его в метровом, миллиметровом или микронном масштабе.

Появляется все больше свидетельств того, что фрактальные формы очень часто встречаются в природе. Было обнаружено, что фрактальные структуры, известные как перколяционные кластеры, возникают при прохождении жидкости через твердые пористые тела, например при просачивании воды через почву. Фрактальными свойствами обладают сажа, коллоиды и некоторые полимеры. Фракталы также образуются при прохождении пузырьков воздуха через нефть, при росте некоторых кристаллов, а также при электрических разрядах. Хаотические формы облаков и береговых линий также являются фрактальной структурой.

Для количественного описания фрактальных структур вводится понятие фрактальной размерности. В отличие от размерности в обычном понимании этого слова фрактальная размерность выражается не целым, а дробным числом и, в отличие от

первой, учитывает особенности топологии тонкой структуры объектов. Дробная метрическая размерность фрактальных объектов не только характеризует их геометрический образ, но и отражает процессы их образования и эволюции, а также определяет динамические свойства [2].

Однако для обстоятельного описания самоподобных природных и многих модельных структур недостаточно одной только величины фрактальной размерности. Широкие возможности в этом предоставляет мультифрактальный формализм, описанный в работах [3, 4] и нашедший множество различных применений [5—18]. Основой мультифрактального анализа является генерация тем или иным способом меры при разбиении пространства, охватывающего изучаемый объект, называемый носителем меры. Фрактальная мера при этом может быть представлена взаимосвязанными фрактальными подмножествами, изменяющимися по степенному закону с различными показателями.

Фрактальные структуры, наблюдаемые экспериментально, могут быть получены с помощью численного моделирования. И экспериментальные наблюдения, и результаты численного моделирования представимы в виде множеств точек  $Y$ , образующих кривые или фигуры. При анализе структур таких множеств наиболее широко используется метод подсчета клеток. При этом методе  $E$ -мерное пространство наблюдений разбивается на гиперкубы с ребром  $\delta$ , после чего производится подсчет числа  $N(\delta)$  кубов, содержащих, по крайней мере, одну точку множества  $Y$ . Ясно, что такой подсчет дает грубую оценку меры множества  $Y$  и число  $N(\delta)$  не несет в себе никакой информации о структуре этого множества. Например, если взять в качестве примера контур береговой линии и эта линия сильно изрезана и пересекает какую-то клетку  $n_i$  раз, то при подсчете эта клетка все равно даст вклад в общее число клеток, покрывающих множество точек береговой линии, равный 1, что не вполне соответствует истине.

Разрешить эту проблему позволяет мультифрактальный формализм, описанный в работах [3, 4]. Основой мультифрактального анализа является генерация тем или иным способом меры при разбиении пространства, охватывающего изучаемый объект, называемый носителем меры. Представим себе некоторый объект с неупорядоченной структурой, “погруженный” в евклидово охватывающее пространство. Разобьем это пространство на  $N$  пронумерованных ячеек размером  $l_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , удовлетворяющих условию  $l_i \leq l$ , где  $l$  — характерный размер. Такое разбиение дает возможность приписать каждой ячейке меру (“вес”)  $p_i$  в зависимости от природы изучаемого объекта. Так, например, если речь идет об изучении фрактального агрегата общей массы  $M$ , то “весом” может служить доля массы в ячейке  $p_i = m_i/M$ , где  $m_i$  — масса  $i$ -й ячейки [8, 13]. При изучении странного аттрактора или сечения Пуанкаре в фазовом пространстве динамической системы меру ячейкам можно приписывать, подсчитывая число прохождений траектории динамической системы через каждую ячейку  $M_i$ ; за достаточно большой промежуток времени и полагая  $p_i = M_i / \sum_{i=1}^N M_i$  [3—5, 20].

Аналогично можно поступать при исследовании объема (площади) несплошностей твердого тела или его сечений [15], распределения площади на плоскости [21], энергии, затраченной на разрушение структурных элементов [18], и т. д. Таким образом, разбиение охватывающего пространства, в котором находится объект, на ячейки генерирует на нем меру  $p_i$  ( $\sum p_i = 1$ ) — распределение некоторой, не меняющей свой знак величины.

Простую каноническую интерпретацию мультифрактального формализма в одномерном случае можно получить, рассматривая канторовское множество.

Напомним, что абстрактное триадное канторовское множество можно получить, взяв в качестве затравки единичный отрезок  $[0, 1]$  и, деля его при каждой итерации на три равные части, удалять средний элемент (рис. 1, а). Фрактальная размерность такого объекта равна:

$$D = \ln 2 / \ln 3 \approx 0,6309. \quad (1)$$

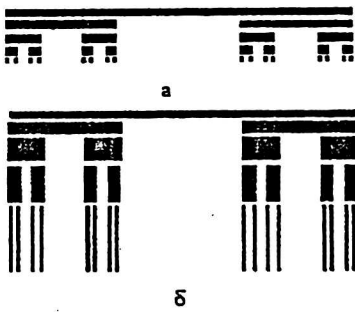


Рис. 1. Триадное канторовское множество: а — абстрактное триадное канторовское множество с  $D = \ln 2 / \ln 3 \approx 0,6309$ ; б — триадный канторовский стержень: высота стержня в  $n$ -м поколении пропорциональна его плотности  $\rho$ , показатель Липшица-Гельдера  $\alpha = \ln 2 / \ln 3 \approx 0,6309$ , фрактальная размерность носителя массы  $f = D = \ln 2 / \ln 3 \approx 0,6309$

Условимся понимать под канторовским множеством нечто, отличное от абстрактного канторовского множества. Будем считать затравкой не единичный отрезок, а стержень из какого-нибудь материала с плотностью  $\rho_0 = 1$ . Исходный стержень имеет длину  $l_0 = 1$  и, следовательно, массу  $\mu_0 = 1$ . Операция, связанная с применением образующего элемента, состоит из разрезания стержня на две половины равной массы  $\mu_1 = \mu_2 = 0,5$ , которые в результатековки укорачиваются до длины  $l_1 = 1/3$  (одинаковой для обеих половин). В результате такой обработки плотность возрастает до  $\rho_1 = \mu_1 / l_1 = 3/2$ . Повторяя всю процедуру, мы получаем в  $n$ -м поколении  $N = 2^n$  маленьких стержней, каждый из которых имеет длину  $l_i = 3^{-n}$  и массу  $\mu_i = 2^{-n}$  при  $i = 1, \dots, N$ . Заметим, что масса в ходе обработки сохраняется, поэтому

$$\sum_{i=1}^N \mu_i = 1. \quad (2)$$

В работах [1, 19] дается сравнение этого процесса со свертыванием молока, так как первоначально равномерное распределение массы в результате разбивается на множество мелких областей с высокой плотностью.

Из сказанного следует, что масса отрезка длиной  $l_i$ , где  $l_i \leq \delta$ , определяется выражением

$$\mu_i = l_i^\alpha. \quad (3)$$

Скейлинговый показатель здесь равен  $\alpha = \ln 2 / \ln 3$ . Плотность каждого из малых отрезков стержня определяется выражением

$$\rho_i = \mu_i / l_i = \rho_0 l_i^{\alpha-1} \quad (4)$$

и расходитя при  $l_i \rightarrow 0$ . Скейлинговый показатель известен в математике как показатель Липшица-Гельдера. Он ведает сингулярностью плотности и может быть назван показателем сингулярности.

На рис. 1, б изображен вышеупомянутый вариант канторовского множества. Высота каждого фрагмента определяется его плотностью  $\rho_i$ . Эта модификация канторовского построения требует скейлингового показателя, и для описания того, как возрастает высота фрагментов стержня при уменьшении их ширины. Можно сказать, что сингулярности с показателем  $\alpha$  имеют носитель с фрактальной размерностью  $f = D \approx 0,6309$ .

Выше мы рассматривали  $\mu_i$  как вклад фрагмента в массу канторовского стержня. Полученные данные остались бы неизменными, если бы под  $\mu$  мы понимали электрический заряд, магнитный момент, гидродинамическую завихренность или вероятность для некоторых явлений. В общем случае  $\mu$  может быть мерой любой величины, имеющей носителем геометрическое множество.

В связи с этим рассмотрим популяцию, состоящую из  $N$  членов, распределенных по отрезку прямой  $Y = [0, 1]$ . Нас интересует предел при  $N \rightarrow \infty$ . Будем считать, что  $N$  — выборка из основного распределения (при конечных  $N$ ). Чтобы определить распределение, разделим отрезок  $Y$  на ячейки длиной  $\delta = 2^{-n}$ . Тогда для покрытия этого отрезка  $Y$  нам потребуется  $N = 2^n$  ячеек. Здесь  $n$  — число поколений при двоичном разбиении отрезка  $Y$ . Обозначим ячейки индексом  $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ . Распределение популяции по отрезку при разрешении  $\delta$  характеризуется набором чисел  $N_i$ , показывающих, сколько членов популяции находится в  $i$ -й ячейке. Удобной мерой содержимого  $i$ -й ячейки может служить доля  $\mu_i = N_i/N$  числа членов популяции, попавших в  $i$ -ю ячейку, от полной численности популяции. Набор  $M$  долей, т. е.

$$M = \{\mu_i\}_{i=0}^{N-1}, \tag{5}$$

дает полное описание распределения популяции при разрешении  $\delta$ . Мера  $M(Z)$  части или подобласти  $Z$  отрезка  $Y$  определяется суммой

$$M(Z) = \sum_{i \in Z} \mu_i. \tag{6}$$

Естественно, для того чтобы однозначно описать распределение членов популяции по отрезку, необходимо задать  $M$  при достаточно хорошем разрешении, т. е. при малом  $\delta$ , что в ряде случаев недостижимо. Но если  $M$  обладает скейлинговым свойством, то относительно распределения можно сказать гораздо больше, и нет необходимости описывать положение каждого члена популяции.

Можно показать, что мера  $M$  имеет сингулярности с показателем Липшица-Гельдера  $\alpha$  на фрактальных множествах  $Y_\alpha$  с фрактальными размерностями  $f(\alpha) = f(\xi(\alpha))$ . Таким образом, исследуемое множество моделируется набором взаимопроникающих изосингулярностей  $\alpha$ , каждая из которых имеет соответствующую размерность  $f(\alpha)$  [20]. Типичный график зависимости  $f(\alpha)$  показан на рис. 2, а.

Справедливо следующее общее утверждение: максимальное значение фрактальной размерности подмножеств  $Y_\alpha$  равно фрактальной размерности носителя меры. В случае канторовского множества эта фрактальная размерность равна 1, так как мера определена на всем единичном отрезке. Для мер, определенных на фракталах с фрактальной размерностью  $D$ , получаем  $f_{\max}(\alpha) = D$ .

Другой важной характеристикой мультифрактальных мер является последовательность показателей массы. Рассмотрим множество  $Y$ , состоящее из  $N$  точек, которое имеет в  $i$ -й ячейке  $N_i$  точек. Эти точки можно рассматривать как выборку, отражающую распределение меры на множестве. Воспользуемся "массой", или вероятностью  $\mu_i = N_i/N$ , соответствующей  $i$ -й ячейке, и построим меру, которую можно записать в виде

$$M_d(q, d) = \sum_{i=1}^N \mu_i^q \delta^d = N(q, d) \delta^d \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \begin{cases} 0, & d > \tau(q), \\ \infty, & d < \tau(q). \end{cases} \tag{7}$$

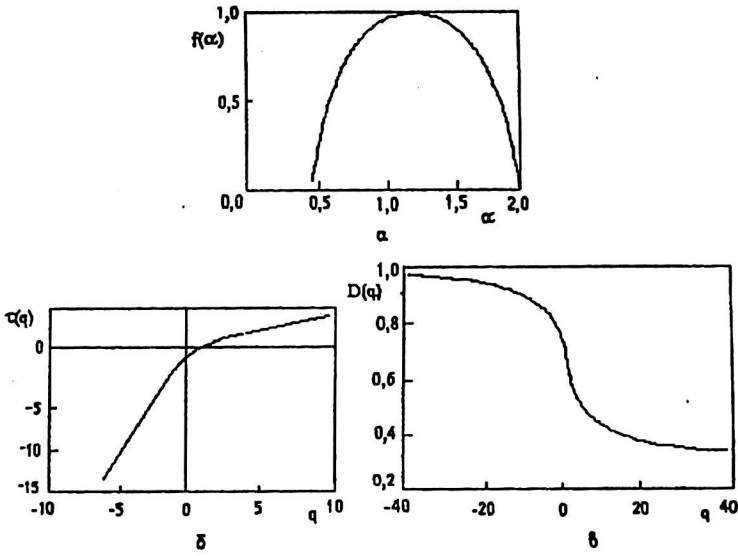


Рис. 2. Типичные графики зависимостей, описывающих фрактальные подмножества, порожденные биномиальным мультипликативным процессом: а —  $f(\alpha)$ ; б —  $\tau(q)$ ; в —  $D(q)$

Эта мера обладает показателем массы  $d = \tau(q)$ , при котором она не обращается в нуль и в бесконечность, когда  $\delta \rightarrow 0$ . Мера характеризуется всей последовательностью показателей  $\tau(q)$ , определяющих, по какому степенному закону изменяются в зависимости от  $\delta$  вероятности  $\{\mu_i\}$ . Из формулы (7) следует, что взвешенное число клеток  $N(q, d)$  можно представить в виде

$$N(q, d) = \sum_i \mu_i^q \approx \delta^{-\tau(q)}, \quad (8)$$

а показатель массы определяется выражением

$$\tau(q) = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(q, d)}{\ln \delta}. \quad (9)$$

Выбирая  $q = 0$  ( $q$  — порядок момента), получаем  $\mu_i^{q=0} = 1$ . Следовательно,  $N(q = 0, \delta) = N(\delta)$  — это число клеток, образующих покрытие множества, а  $\tau(0) = D$  — фрактальная размерность множества. Вероятности нормированы:  $\sum_i \mu_i = 1$ , и из (9) следует, что  $\tau(1) = 0$ .

Выбор больших значений  $q$ , например  $q = 10$  или  $100$ , в соотношении (9) способствует повышению вклада ячеек с относительно большими значениями меры  $\mu_i$ , поскольку, если  $q \gg 1$  и  $\mu_i > \mu_j$  то  $\mu_i^q \gg \mu_j^q$ . Наоборот, выбор  $q \ll 1$  способствует повышению вклада ячеек с относительно малыми значениями меры  $\mu_i$  на ячейке.

Последовательность показателей массы связана с кривой  $f(\alpha)$  общей зависимостью [20]:

$$\tau(q) = f(\alpha(q)) - q \alpha(q). \quad (10)$$

Таким образом, показатель массы может быть выражен через показатель Липшица-Гельдера  $\alpha(q)$  для массы и фрактальную размерность  $f(\alpha(q))$  множества-носителя этого показателя.

В то же время если показатели массы  $\tau(q)$  известны, то мы можем определить показатель Липшица-Гельдера  $\alpha$  и  $f$ , как

$$\begin{aligned} \alpha(q) &= -\frac{d}{dq} \tau(q), \\ f(\alpha(q)) &= q \alpha(q) + \tau(q). \end{aligned} \quad (11)$$

Эти два уравнения задают параметрическое представление кривой  $f(\alpha)$ . Кривая  $f(\alpha)$  характеризует меры и эквивалентна последовательности показателей массы  $\tau(q)$ . Пара уравнений (11) задает преобразование Лежандра от независимых переменных  $\tau$  и  $q$  к независимым переменным  $f$  и  $\alpha$ .

Холси и др. [4] проанализировали меру, задаваемую соотношением (7), связав ее с размерностью  $D_q$ , введенной Грассбергером, Хентшелем и Прокаччей [3] и определяемой соотношением

$$D_q = \tau(q) / (1 - q), \quad (12)$$

где численный множитель  $(1 - q)$  модифицирует показатель массы с таким расчетом, чтобы для множеств постоянной плотности в  $E$ -мерном пространстве выполнялось равенство  $D_q = E$ . Спектр фрактальных размерностей  $D_q$  задается предельным соотношением

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(q, \delta)}{\ln \delta}. \quad (13)$$

Порядком момента  $q$  может быть любое число в диапазоне от  $-\infty$  до  $+\infty$ , и функция  $D_q$  есть спектр фрактальных размерностей для фрактальной меры на множестве  $Y$ .

Если мы выберем значение  $q = 0$  для порядка момента  $q$ , то получим  $\mu_i^{q=0} = 1$ . Следовательно,  $N(q = 0, \delta) = N(\delta)$  — число клеток, необходимое для того, чтобы покрыть множество, и величина  $D_{q=0} = D$  равна фрактальной размерности множества. В пределе при  $q \rightarrow \infty$  мы получаем, что  $D_\infty = \alpha_{\min}$ , в то время как  $D_{-\infty} = \alpha_{\max}$ . Типичные графики зависимостей  $\tau(q)$  и  $D(q)$  изображены на рис. 2, б, в.

Исходя из вышеизложенного, можно заключить, что величину  $f(\alpha(q = \infty))$  и разность  $D(q = -\infty) - D(q = \infty)$  можно считать количественной характеристикой однородности распределения — чем более регулярна структура, тем менее фрактальные размерности изосингулярных подмножеств  $f(\alpha(q = -\infty, \dots, +\infty))$  отличаются от фрактальной размерности геометрического носителя меры ( $f(\alpha(q = 0))$ ).

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ОПИСАНИЯ СТРУКТУР

Динамика многих диссипативных процессов, развивающихся в химических и биологических системах вдали от термодинамического равновесия, может быть описана с использованием динамики странного аттрактора [23]. Топологию и структуру таких аттракторов можно классифицировать в рамках теории хаотических систем. Однако от этой теории трудно перейти к спектрам, характеризующим распределение сингулярностей. В то же время распознавание структур сингулярностей в хаотическом режиме является важной проблемой. Мультифрактальный анализ дает практический метод для изучения детерминистической хаотической динамики и стохастической эволюции. Практический пример мультифрактального описания статистического равновесия хаотических динамических систем дан в [22]. Для того чтобы проиллюстрировать, каким образом спектр  $f(\alpha)$  и лежащая в его основе статистическая механика следуют из механики в статистическом равновесии, был применен метод обратной итерации к хаотическим отображениям интервала. Размеры интервалов в пространстве грубозернистой фазы выражены непосредственно в терминах усредненных показателей Ляпунова с конечным временем, представляющими собой обратное течению информации, которая является причиной, лежащей в основе детерминистического хаоса. Формулировка переноса матрицы следует непосредственно из метода обратной итерации, когда образуемые из операторной динамики пункты приписаны ветвям дерева. Показано, каким образом распределение пор песчаника можно моделировать определенным двухмасштабным рядом Кантора на восьмеричном дереве.

В работе [23] мультифрактальный анализ был использован для решения проблем шума и его временной последовательности. Установлена связь между степенным спектром динамических систем и хаотическим поведением на основе мультифрактального анализа. Подход позволяет различать разные варианты хаотического поведения. Кроме того, мультифрактальный анализ дает полезный метод, чтобы различить детерминистическую хаотическую динамику и стохастическую эволюцию.

Не вдаваясь далее в анализ других примеров использования концепции мультифракталов в физике, механике, биологии и других науках, акцентируем внимание на примерах из материаловедения. Одно из важнейших применений мультифрактального формализма — количественная параметризация структур металлов и сплавов после различных видов внешних воздействий. Она позволяет устанавливать такие свойства структуры, как сложность, упорядоченность и неоднородность. Мультифрактальный подход к решению задачи количественного описания структур материалов был развит Встовским Г. В. и др. [21]. Была разработана методика компьютерного мультифрактального анализа структур поверхностей разрушения. Это позволило перейти к эффективной количественной параметризации структур различной природы.

В настоящей статье предложена методика мультифрактальной параметризации структур, изображения которых представлены в виде файлов в графическом формате BMP (256 оттенков серой шкалы).

Для анализа мультифрактальных характеристик структуры её необходимо представить в виде совокупности нулей и единиц (каждый элемент структуры принимает только два возможных значения, что соответствует биту информации). В то же время сканеры или цифровые видеокамеры, с помощью которых оцифровывается изображение, как правило, работают в графическом режиме Grayscale, при котором каждый элемент (пиксел) изображения представлен в виде 1 байта, что соответствует 256 градациям серой шкалы. Поэтому при обработке таких структур важно правильно задать пороговое значение оттенка серого, при котором будет осуществляться перевод изображения из режима Grayscale в черно-белый режим, где каждый пиксел изображения характеризуется только двумя возможными состояниями.

В связи с этим в данной методике была предусмотрена следующая процедура конвертирования 256-цветного изображения в монохромный формат — файл в графическом формате BMP загрузился с диска в видеопамять ПК и изменением текущей

палитры подбиралось необходимое пороговое значение уровня серого, при котором все оттенки с равной или меньшей интенсивностью приравнивались к черному цвету, а оттенки с большей интенсивностью — к белому цвету. После этого полученное монохромное изображение копировалось в оперативную память, где представлялось в виде двумерного массива  $512 \times 512$  элементов, характеризующего данную структуру.

Из (9) следует, что показатель массы  $\tau(q)$  представляет собой производную функциональной зависимости логарифма взвешенного числа клеток  $N(q, d)$  от логарифма размера ячейки  $d$ . Применительно к данной методике значение  $\tau(q)$  вычислялось следующим образом — исследуемая структура покрывалась набором квадратных ячеек со стороной  $d_k = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256$  клеток и для каждого набора  $d_k$  ( $k = 1-8$ ) проводилось вычисление характеристической функции  $N(q, d)$  как нормированного числа клеток, занятых исследуемым множеством в данной ячейке, просуммированного по всем ячейкам для данного  $k$  (см. (7)). Эти вычисления производились для всех  $k = 1-8$  и строилась зависимость  $\ln(N(q, d))$  от  $\ln(d_k)$ , после чего по методу наименьших квадратов вычислялся её угловой коэффициент, который и представлял собой показатель массы  $\tau$  для данного  $q$ . После проведения аналогичных действий для всех  $q$  в интервале от  $-40$  до  $40$  строилась зависимость  $\tau(q)$ , после чего по формулам (11, 12) вычислялись значения  $f, \alpha$  и  $D$  (значения  $\alpha$  вычислялись с помощью численного дифференцирования кривой  $\tau(q)$ ).

Для апробации предложенной методики были измерены мультифрактальные спектры для модельного ковра Серпинского с точно известной фрактальной размерностью  $D = \ln 12 / \ln 4 \approx 1,7925$  (измерения проводились для набора масштабов  $d_k = 2, 4, 8, 16, 32, 64$  на массиве  $128 \times 128$  клеток). Как и следовало ожидать для геометрически правильного фрактала, спектр  $f(\alpha)$  вырождается в точку, зависимость  $D(q)$  — в прямую линию, а величины  $D = f = \alpha$  совпали с теоретическим значением с точностью до 14-го знака после запятой. Однако при использовании дополнительных масштабов  $d_k$ , не являющихся целыми делителями размера изображения, измеренные значения  $f_0, \alpha_0, D_0$  отличались от теоретических на 1—2 %, и полученные спектры обнаруживали слабое мультифрактальное поведение, что говорит о наличии масштабного эффекта, присущего данной методике (не выполняется условие  $d_k \rightarrow 0$ , при нормировке учитывается площадь, реально покрываемая данным набором масштабов, которая может несколько отличаться от общей площади исследуемой структуры).

Для увеличения скорости счета и уменьшения размера динамической памяти, занимаемой данной программой, вместо копирования всего массива  $512 \times 512$  байт с экрана в оперативную память копировались 8 массивов размером  $256 \times 256, 128 \times 128, 64 \times 64, 32 \times 32, 16 \times 16, 8 \times 8, 4 \times 4, 2 \times 2$ , каждый элемент которых представлял собой сумму пикселей, занимаемых исследуемой структурой во всех ячейках размером  $2 \times 2, 4 \times 4, 8 \times 8, 16 \times 16, 32 \times 32, 64 \times 64, 128 \times 128, 256 \times 256$  точек соответственно. В дальнейшем при изменении  $q$  в интервале от  $-40$  до  $40$  подсчет сумм в элементарных ячейках размером  $d_k$  не производился, а брались готовые значения для сумм из этих восьми массивов.

Описанный алгоритм был реализован на языке программирования Borland Pascal 7.0 на компьютере с процессором Intel Pentium — 75 МГц. Обсчет изображения размером  $512 \times 512$  точек занимал 5 мин.

На рис. 3 представлены фрагменты образцов полиметилметакрилата (оргстекла) при постоянной (см. рис. 3, а) и ориентационной (см. рис. 3, б) вытяжке. Изображения перекопированы в монохромный формат при пороговых значениях уровня серого, равных 105 и 97 единиц соответственно, которые представляют собой начальные моменты нулевого порядка (математические ожидания), полученные при анализе гистограмм распределения уровней серого. На рис. 4, а, в показаны спектры  $D(q)$  и  $f(\alpha)$  для образцов, полученных при постоянной вытяжке, на рис. 4, б, г — для образцов, полученных при ориентационной вытяжке.

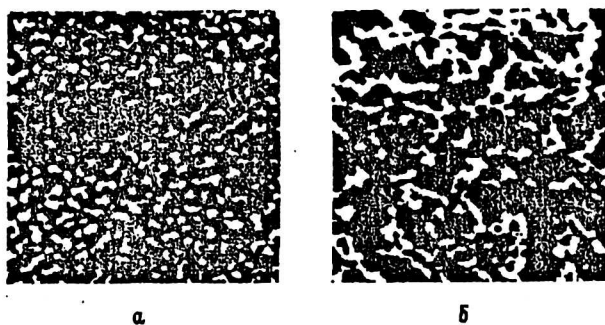


Рис. 3. Монохромные изображения образцов полиметилметакрилата (оргстекла), полученного при постоянной (а) и ориентационной (б) вытяжке

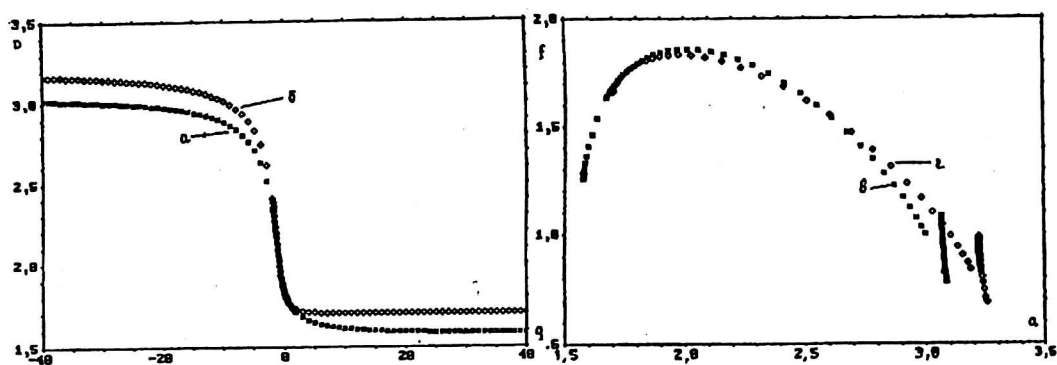


Рис. 4. Мультифрактальные спектры  $D(q)$  (а) и  $f(\alpha)$  (б) для образца полиметилметакрилата, полученного при постоянной вытяжке, и спектры  $D(q)$  (в) и  $f(\alpha)$  (г) для образца, полученного при ориентационной вытяжке

## Л и т е р а т у р а

1. Mandelbrot B. B. The Fractal Geometry of Nature. W. H. Freeman and Company. — New-York, 1982.
2. Иванова В. С., Баланкина А. С., Бунин И. Ж., Оксогоев А. А. Синергетика и фракталы в синергетике. — М.: Наука, 1994. — 383 с.
3. Hentschel H.G.E. and Procaccia I. // The infinite number of generalised dimensions of fractal and strange attractors // Physica 8D. 1983. V. 8, No.3. P. 435—555.
4. Halsey T. C. et al. Fractal measures and their singularities. The characterisation of strange sets // Phys. Rev. A. 1986. V. 33, No 2. P. 1141—1151.
5. Schuster G. Determined chaos [in Russian]. Moscow: Mir, 1988.
6. Дремин И. М. // УФН. 1990. № 8. С. 105—133.
7. Paladin G. and Vulpiani A. Anomalous scaling multifractal objects // Phys. Rep. 1987. V. 156, No 4. P. 147—225.
8. Aharony A. Multifractals in Physics: Successes, dangers and challenges // Physica A 168. 1990. No 168. P. 479—489.
9. Grassberger P. et al. Scaling laws for invariant measures on hyperbolic and nonhyperbolic attractors // J. Stat. Phys. 1988. V. 51, No 1/2. P. 135—178.
10. Coenza M. G. et al. Finite size effects on the  $f(\alpha)$ -spectrum of the periodic doubling attractor // Phys. Rev. A. 1989. V. 39, No 5. P. 2734—2737.
11. Su Z. et al. Measurement of  $f(\alpha)$ -spectra of attractors at transition to chaos in driven diode resonator system // Phys. Rev. A. 1987. 3, No 7. P. 3515—3517.
12. Broggi G. et al. Characterisation of chaotic systems at transition points through dimension spectra // Phys. Rev. A. 1989, V. 39, No 1. P. 434—437.

13. V i c s e k T. Mass multifractals // Physica A 168. 1990. No 168. P. 490—497.
14. M a n n a S. S. and V i c s e k T. Multifractality of space-filling bearings and appolonian packings // J. Stat. Phys. 1991. V. 64, No 3/4. P. 525—539.
15. M c C a u l e y J. L. Multifractal description of the statistical equilibrium of chaotic dynamical systems. Int. // J. Mod. Phys. B. 1989. V. 3, No 6. P. 821—852.
16. G o d r e c h e C. and L u c k J. M. Multifractal analysis in reciprocal space and the nature of the Fourier transform of self-similar structures // J. Phys. A. Math. Gen. 1990. V. 23, No 10. P. 3769—3797.
17. S a l e j d a W. Numerical studies on the vibrational spectrum of Fibonacci chain. A multifractal analysis. Int. // J. Mod. Phys. B. 1991. No 5. P. 825—841.
18. W i l l f o r d R. E. Multifractal fracture // Scr. Met. 1988. V. 22, No 11. P. 1749—1754.
19. M a n d e l b r o t B. B. Fractals: Form, Chance and Dimension, W. H. Freeman. — San Francisco, 1977.
20. Ф е д е р Е. Фракталы. М.: Мир. 1991. — 254 с.
21. V s t o v s k i i G. V. et al. // Metally. 1993. No 4. P. 164—178.
22. M c C a u l e y J. Multifractal description of the statistical equilibrium of chaotic dynamical systems / International Journal of Modern Physics. B. 1989. V. 3, No 6. P. 821—852.
23. G i o n a M., M a r e l l i L., P i c c i r i l l i P. Multifractal analysis of frequency spectra // Journal of NonCryalline Solids. 1991. No 131—133. P. 71—75.

## METODOLOGY OF THE COMPUTER ANALYSIS OF STRUCTURES USING MULTIFRACTAL FORMALISM

*D. V. Kozitsky*

A. A. Baykov's Institute of metallurgy RAS, Moscow, Russia

*In this paper it is elaborated the methodology of the multifractal characteristic's calculation of the images of investigated structures. The image is scanned by means of scanner or digital camera and is transferred into PC as BMP-file in Greyscale. After that by change of the current palette interactively it is matched the grey level threshold and image is converted into the bilivel format. Binary image of current structure, derived from this file, is imaged as twodimensional array and is modelled by set of the interpenetrated fractal subsets. This subsets characterize initial set as multifractal by means of two curve —  $f(\alpha)$  and  $D(q)$ .*