Общая физика

УДК 535.14

Нарушение формул Френеля при отражении резонансного излучения от возбужденных сред

Б. А. Векленко

Показано, что при селективном отражении находящегося в квантовом когерентном состоянии резонансного излучения от возбужденных сред нарушается квантовая статистика первоначального излучения. Нарушение статистики проявляется на макроскопическом уровне. Как следствие, нарушаются формулы Френеля, что свидетельствует о неприменимости полуклассической теории излучения, оперирующей с неквантованным электромагнитным полем. Рассчитан коэффициент отражения от тонкой пленки, заполненной как термически возбужденной средой, так и средой с инверсной населенностью.

PACS: 11.15.Kc

Ключевые слова: отражение, квантовый, возбужденная среда, формулы Френеля.

Введение

В 1819 г. появились широко используемые и в настоящее время формулы О. Френеля [1], описывающие селективное отражение света от плоской границы раздела двух диэлектриков, занимающих полупространство. Нарушение этих формул, постулированное в 1871 г. Л. Рэлеем (Д. У. Стретт) [2], открыло новый этап в оптике, учитывающий флуктуационные явления в средах. Следующий этап следует датировать 1966 г., когда Ч. Дж. Коестером [3] экспериментально было обнаружено усиление света при отражении его от инверсно заселенной среды. Каждый из этих этапов вызывал теоретические споры. Работа Френеля появилась после критики его теории интерференции С. Пуассоном, обратившим внимание на предсказываемое теорией Френеля яркое пятно в области геометрической тени при дифракции лучей на непрозрачном диске, что в то время казалось нелепостью. Работа Л. Рэлея вызвала полемику между Л. Мандельштамом [4] и М. Планком [5]. Результаты Ч. Дж. Коестера не получили полного теоретического осмысления по настоящее время, но уже ясно, что здесь тоже нарушаются формулы О. Френеля.

Сразу после выхода работы [3] появилась идея построения оптического генератора на отражательном эффекте усиления, что повлекло за собой значительное число экспериментальных [6—9] и теоретических [10—18] исследований. Результаты теоретических исследований часто противоречили друг другу. Дело в том, что режим отражения от инверсно-населенных сред неустойчив и критически зависит от выбранных граничных условий. С одной стороны их можно подобрать так, что коэффициент отражения не сможет превышать единицу [14]. С другой — если полубесконечную среду аппроксимировать слоем конечной толщины L и затем устремить $L \to \infty$, то коэффициент отражения будет неограниченно возрастать [13]. Более реалистичными оказались модели, в которых инверсно-заселенным считается лишь пограничный слой вблизи границы раздела сред. Расчет таких моделей подытожен в работе [19], но и в этом случае количественного согласия теоретических расчетов с экспериментальными данными не возникает [16, 18]. Лазер на эффекте отражения был построен [20], но никакими явными достоинствами он не обладал. Интерес к предмету постепенно пропал, а вопрос о причинах расхождения теории и эксперимента остался.

Такое расхождение не удивительно, если учесть, что все теоретические исследования проводились на базе полуклассической теории излучения, оперирующей с неквантованным электромагнитным полем. Эта полуфеноменологическая теория удовлетворительно описывает генерацию лазеров за порогом генерации, но в вопросах отражения света не всегда согласуется с последовательной квантовой теорией [21], что можно показать следующим образом. Взаимодействие класси-

Векленко Борис Александрович, главный научный сотрудник.
Объединенный институт высоких температур.
Россия, 127412, Москва, ул. Ижорская, 13, стр. 2.
E-mail: VeklenkoBA@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 15 июля 2010 г.

ческого электромагнитного поля с веществом всегда определяется вектором поляризации [22], который в линейном приближении зависит от разности концентраций возбужденных молекул среды и молекул среды в основном состоянии. В условиях равенства концентраций взаимодействие света со средой исчезает. Следовательно, исчезает и отраженное излучение. Если мы будем интересоваться квантовой статистикой отраженного света, то при наличии граничных условий придется решать уравнение типа уравнения Скалли—Лэмба [23]. Но коэффициенты в этом уравнении не зависят от разности концентраций, и точка равенства концентраций ничем не выделена. Уравнение Скалли—Лэмба свидетельствует о том, что взаимодействие излучения с веществом существует при любых концентрациях. Следовательно, при любых концентрациях следует ожидать наличия селективно отраженного средой света. Отсюда следует нарушение формул Френеля, что в принципиальном отношении не может не вызывать интереса. Тем не менее, продолжают появляться работы [24], ставящие целью приспособить полуклассическую теорию излучения и формулы Френеля для описания отражения света от усиливающих сред.

В работе [25] было отмечено, что расхождение между полуклассической теорией излучения и последовательной квантовой теорией может носить не только количественный, но и качественный характер.

Уравнение Скалли—Лэмба для описания отражения света малопригодно, поэтому в работах [21, 25] был использован предложенный ранее метод Г-операторов, оперирующий с матрицей плотности ρ излучения в среде. При этом оказывается, что эта матрица разбивается на сумму $\rho = \rho^{(\tilde{n})} + \rho^{(n)}$ когерентной и некогерентной компонент. Когерентная компонента относительно легко рассчитывается с помощью волновых функций. Что касается некогерентной компоненты, то для ее расчета необходимо использование формализма матрицы плотности в полном объеме. Как правило, здесь мы сталкиваемся с неаналитичностью по заряду [25] и необходимостью выхода за рамки теории возмущений. Последнее обстоятельство чрезвычайно усложняет теорию, и вплоть до настоящего времени этот формализм в исследовании отражения света от инверсно-заселенных сред использовать не удалось. Другими словами, вопросы отражения света от инверсно-заселенной среды с помощью последовательной квантовой теории до сих пор не исследованы. Тем не менее, известно, что существенное расхождение этой теории и полуклассической теории излучения при расчете отраженного света проявляется уже для сред с малой степенью возбуждения [25].

В настоящей работе преодолевается указанная трудность и предлагается путь расчета, связанный с обхождением трудностей некогерентного канала рассеяния в методе Г-операторов. Таким образом, модифицированный метод Г-операторов (полуклассический) в техническом отношении оказывается практически равноценным полуклассической теории излучения и вместе с тем позволяет учесть квантовые свойства света и выйти за рамки термически возбужденных сред. Этот метод опирается только на волновые функции и позволяет получить в аналитическом виде количественные оценки для коэффициента отражения света от инверсно-населенных сред, явно не согласующиеся с результатами полуклассической теории излучения. Результаты расчетов допускают относительно несложную экспериментальную проверку.

Обоснование метода

Идея метода заключается в следующем. Пусть резонансное излучение отражается от границы раздела газ–вакуум. При этом среда в начальном состоянии описывается в представлении взаимодействия волновой функцией ψ_0. После процесса отражения волновая функция ψ системы "среда плюс электромагнитное поле" может быть разложена по полной системе волновых функций ψ_i атомов среды

$$\Psi = f_0\psi_0 + \sum_{i\neq 0} f_i\psi_i = f_0\psi_0 + \left(\Psi - f_0\psi_0\right).$$

Причем слагаемое с ψ_0 выписано отдельно. Из-за ортогональности волновых функций атомов скалярное произведение равно нулю

$$\left\langle f_0\psi_0 \middle| \Psi - f_0\psi_0 \right\rangle = 0 .$$

Предположим, что рассеиваемый свет находится в квантовом когерентном состоянии с отличным от нуля значением $\left\langle \hat{\mathcal{E}}^{\nu}(\mathbf{r},t)\right\rangle \neq 0$ электрической напряженности в любой точке пространства $\mathbf{r}$ в момент времени t. Нас интересует квантовое среднее от оператора $\hat{\mathcal{E}}^{\nu}$ в отраженном свете

$$\begin{aligned}\left\langle \hat{\mathcal{E}}^{\nu}(\mathbf{r},t)\right\rangle &= \left\langle \Psi \middle| \hat{\mathcal{E}}^{\nu}(\mathbf{r},t) \middle| \Psi \right\rangle = \left\langle f_0\psi_0 \middle| \hat{\mathcal{E}}^{\nu}(\mathbf{r},t) \middle| f_0\psi_0 \right\rangle + \\ &+ \left\langle \Psi - f_0\psi_0 \middle| \hat{\mathcal{E}}^{\nu}(\mathbf{r},t) \middle| \Psi - f_0\psi_0 \right\rangle = \mathcal{E}^{\nu(c)} + \mathcal{E}^{\nu(n)}\end{aligned} . \quad (1)$$

Будем говорить, что первое слагаемое в правой части (1) описывает когерентный канал рассеяния, при котором среда возвращается после рассеяния в исходное (в том числе трансляционное) квантовое состояние. Второе слагаемое правой части (1) описывает некогерентные процессы рассеяния, при которых квантовое состояние среды изменяется. К таким процессам относится комптоновское рассеяние, комбинационное рассеяние и, что очень важно, вынужденное излучение света. Отсутствие в настоящей задаче трансляционной инвариантности видоизменяет традиционную трактовку вынужденного излучения, сохраняя его характерную черту — изменение внутреннего квантового состояния рассеивателя. Еще раз подчеркнем, что когерентное рассеяние Гейзенберга—Крамерса и вынужденное излучение света описываются разными каналами рассеяния. Это означает, что при рассеянии средой с невозбужденными атомами первое слагаемое дает френелевское рассеяние, а второе — диффузное, связанное с доплеровским изменением частоты на движущихся атомах. Если же в среде находятся возбужденные атомы, то из-за процессов вынужденного излучения избежать учета некогерентного канала рассеяния даже при исследовании лишь селективного отражения не удается. В целом, наблюдаемая напряженность $\left\langle \hat{\mathcal{E}}^{\nu}(\mathbf{r},t)\right\rangle$, т. е. левая часть (1), может быть найдена независимо с помощью полуклассической теории излучения, если отвлечься от флуктуационных оптических процессов и их влияния на $\left\langle \hat{\mathcal{E}}^{\nu}(\mathbf{r},t)\right\rangle$. Область применимости полуклассической теории излучения чрезвычайно обширна, но это вовсе не означает, что $\left\langle \hat{\mathcal{E}}^{\nu}(\mathbf{r},t)\right\rangle$ определяет собой и билинейные характеристики поля.

Пусть нас интересуют энергетические характеристики электромагнитного поля, выражаемые через нормальное произведение операторов $\left\langle \hat{N}\left(\hat{\mathcal{E}}^{\nu}\right)^2\right\rangle$. Эту величину снизу можно оценить следующим образом. Воспользуемся тем, что в представлении взаимодействия имеем выражение:

$$\hat{\mathcal{E}}^{\nu}(\mathbf{r},t)=i\sum_{\mathbf{k}\lambda}\sqrt{\frac{\hbar ck}{2V}}e^{\nu}_{\mathbf{k}\lambda}\left(\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}e^{i\mathbf{kr}-ickt}-\hat{\alpha}^{+}_{\mathbf{k}\lambda}e^{-i\mathbf{kr}+ickt}\right),$$

где $\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}$ и $\hat{\alpha}^{+}_{\mathbf{k}\lambda}$ — операторы уничтожения и рождения фотонов в состоянии с волновым вектором **k** и индексом поляризации λ. Эти операторы удовлетворяют стандартным перестановочным соотношениям

$$\left[\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda};\hat{\alpha}^{+}_{\mathbf{k}'\lambda'}\right]=\delta_{\mathbf{kk}'}\delta_{\lambda\lambda'}.$$

Электромагнитное поле считается поперечным $\lambda=1,2$. Через $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}$ обозначены единичные векторы линейной поляризации, V — объем квантования. Поскольку операторы $\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}$ и $\hat{\alpha}^{+}_{\mathbf{k}\lambda}$ взаимно сопряжены, то

$$\left\langle\sum_{\mathbf{k}'\lambda'}e^{\nu}_{\mathbf{k}'\lambda'}\sqrt{k'}\left(\hat{\alpha}^{+}_{\mathbf{k}'\lambda'}-\left\langle\hat{\alpha}^{+}_{\mathbf{k}'\lambda'}\right\rangle\right)\sum_{\mathbf{k}\lambda}e^{\nu}_{\mathbf{k}\lambda}\sqrt{k}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}-\left\langle\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}\right\rangle\right)\ e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}-ic(k-k')t}\right\rangle\geq 0.$$

Отсюда

$$\sum_{\mathbf{kk}'\lambda\lambda'}\sqrt{kk'}e^{\nu}_{\mathbf{k}\lambda}e^{\nu}_{\mathbf{k}'\lambda'}\left\langle\hat{\alpha}^{+}_{\mathbf{k}'\lambda'}\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}\right\rangle e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}-ic(k-k')t}\geq$$
$$\geq\sum_{\mathbf{kk}'\lambda\lambda'}\sqrt{kk'}e^{\nu}_{\mathbf{k}\lambda}e^{\nu}_{\mathbf{k}'\lambda'}\left\langle\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}\right\rangle\left\langle\hat{\alpha}^{+}_{\mathbf{k}'\lambda'}\right\rangle e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}-ic(k-k')t}.$$

Если электромагнитное поле обладает характерной частотой ω_0 и характерной длиной волны $\lambda\!\!\!^{-}_0$ и нас интересуют масштабы времен и расстояний, существенно превышающие $1/\omega_0$ и $\lambda\!\!\!^{-}_0$, то справедливым оказывается неравенство

$$\sum_{\mathbf{kk}'\lambda\lambda'}\sqrt{kk'}e^{\nu}_{\mathbf{k}\lambda}e^{\nu}_{\mathbf{k}'\lambda'}\left\langle\hat{\alpha}^{+}_{\mathbf{k}'\lambda'}\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}\right\rangle e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}-ic(k-k')t}+$$
$$+\sum_{\mathbf{kk}'\lambda\lambda'}\sqrt{kk'}e^{\nu}_{\mathbf{k}\lambda}e^{\nu}_{\mathbf{k}'\lambda'}\left\langle\hat{\alpha}^{+}_{\mathbf{k}\lambda}\hat{\alpha}_{\mathbf{k}'\lambda'}\right\rangle e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}+ic(k-k')t}>>$$
$$>>\sum_{\mathbf{kk}'\lambda\lambda'}\sqrt{kk'}e^{\nu}_{\mathbf{k}\lambda}e^{\nu}_{\mathbf{k}'\lambda'}\left\langle\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}\hat{\alpha}_{\mathbf{k}'\lambda'}\right\rangle e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{r}-ic(k+k')t}+$$
$$+\sum_{\mathbf{kk}'\lambda\lambda'}\sqrt{kk'}e^{\nu}_{\mathbf{k}\lambda}e^{\nu}_{\mathbf{k}'\lambda'}\left\langle\hat{\alpha}^{+}_{\mathbf{k}\lambda}\hat{\alpha}^{+}_{\mathbf{k}'\lambda'}\right\rangle e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{r}+ic(k+k')t}.$$

Теперь нетрудно видеть, что

$$\left\langle\hat{N}\left(\hat{\mathcal{E}}^{\nu}(\mathbf{r},t)\right)^2\right\rangle\approx\sum_{\mathbf{kk}'\lambda\lambda'}\frac{\hbar c}{V}\sqrt{kk'}e^{\nu}_{\mathbf{k}\lambda}e^{\nu}_{\mathbf{k}'\lambda'}\times$$
$$\times\left\langle\hat{\alpha}^{+}_{\mathbf{k}\lambda}\hat{\alpha}_{\mathbf{k}'\lambda'}\right\rangle e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}+ick(t-t')}\geq$$
$$\geq\sum_{\mathbf{k}\lambda}\frac{\hbar c}{V}\sqrt{kk'}e^{\nu}_{\mathbf{k}\lambda}e^{\nu}_{\mathbf{k}'\lambda'}\left\langle\hat{\alpha}^{+}_{\mathbf{k}\lambda}\right\rangle\left\langle\hat{\alpha}_{\mathbf{k}'\lambda'}\right\rangle\times$$
$$\times e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}+ick(t-t')}\approx\left\langle\hat{\mathcal{E}}^{\nu}(\mathbf{r},t)\right\rangle^2.$$

Таким образом, $\left\langle\hat{\mathcal{E}}^{\nu}\right\rangle$ дает возможность оценить снизу искомую $\left\langle\hat{N}\left(\hat{\mathcal{E}}^{\nu}\right)^2\right\rangle$. Справедливость полученного неравенства не зависит от того конкретного состояния, по которому производится квантовое усреднение и не связано с теорией возмущений. Но если это неравенство применить к каждому слагаемому правой части представления

$$\left\langle\hat{N}(\hat{\mathcal{E}}^{\nu})^2\right\rangle=\left\langle f_0\psi_0\right|\hat{N}(\hat{\mathcal{E}}^{\nu})^2\left|f_0\psi_0\right\rangle+$$
$$+\left\langle\Psi-f_0\psi_0\right|\hat{N}(\hat{\mathcal{E}}^{\nu})^2\left|\Psi-f_0\psi_0\right\rangle,$$

то найдем, что

$$\left\langle \hat{N}(\hat{\mathcal{E}}^{\nu})^2 \right\rangle \geq \left\langle f_0\psi_0 \middle| \hat{\mathcal{E}}^{\nu} \middle| f_0\psi_0 \right\rangle^2 + \\ + \left\langle \Psi - f_0\psi_0 \middle| \hat{\mathcal{E}}^{\nu} \middle| \Psi - f_0\psi_0 \right\rangle^2 .$$

Последнее неравенство можно переписать в виде

$$\left\langle \hat{N}(\hat{\mathcal{E}}^{\nu})^2 \right\rangle \geq \left\langle f_0\psi_0 \middle| \hat{\mathcal{E}}^{\nu} \middle| f_0\psi_0 \right\rangle^2 + \\ + \left(\left\langle \Psi \middle| \hat{\mathcal{E}}^{\nu} \middle| \Psi \right\rangle - \left\langle f_0\psi_0 \middle| \hat{\mathcal{E}}^{\nu} \middle| f_0\psi_0 \right\rangle \right)^2 , \tag{2}$$

что подчеркивает важную роль когерентного канала рассеяния в том случае, если рассеянный электромагнитный сигнал не является классической величиной и $\left\langle \hat{N}(\hat{\mathcal{E}}^{\nu})^2 \right\rangle \neq \left\langle \hat{\mathcal{E}}^{\nu} \right\rangle^2$.

Неравенство (2) открывает следующий путь оценки $\left\langle \hat{N}(\hat{\mathcal{E}}^{\nu})^2 \right\rangle$ в квазиклассическом приближении. Выражение $\left\langle \Psi \middle| \hat{\mathcal{E}}^{\nu} \middle| \Psi \right\rangle = \mathcal{E}^{\nu}$ можно рассчитать, воспользовавшись стандартной полуклассической теорией излучения, которая оперирует с неквантованным электромагнитным полем. Расчет $\left\langle f_0\psi_0 \middle| \hat{\mathcal{E}}^{\nu} \middle| f_0\psi_0 \right\rangle = \mathcal{E}^{\nu(c)}$ требует использования лишь когерентного канала рассеяния, что даже в протяженных средах удается выполнить с помощью волновых функций [26].

Таким образом, удается избежать формализма матрицы плотности, который определяет собой некогерентный канал рассеяния.

Основные уравнения изучаемой модели

В качестве приложения рассмотрим отражение резонансного излучения, определяемого волновым вектором $\mathbf{k}_0$ и индексом поляризации λ_0, от плоскопараллельной среды толщины *L*, расположенной перпендикулярно оси *z*. Атомы среды будем считать обладающими одним валентным электроном. Спиновыми эффектами пренебрегаем. В гейзенберговом представлении для описания системы примем следующую систему уравнений:

$$i\hbar \frac{\partial \check{\psi}(X)}{\partial t} = \left(\frac{\hat{p}_{\mathbf{r}}^2}{2m} + \frac{\hat{p}_{\mathbf{R}}^2}{2M} + U(\mathbf{r}-\mathbf{R}) - \frac{e}{mc} \check{A}(x) \hat{p}_{\mathbf{r}}^{\nu} \right) \check{\psi}(X),$$

$$\hat{p}_{\mathbf{r}}^{\nu} = -i\hbar \nabla_{\mathbf{r}}, \; \hat{p}_{\mathbf{R}}^{\nu} = -i\hbar \nabla_{\mathbf{R}}; \tag{3}$$

$$\nabla^2 \check{A}^{\nu}(x) - \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \check{A}^{\nu}(x) = -\frac{1}{c} \check{j}^{\nu}(x),$$

$$\check{j}^{\nu}(x) = \frac{e}{2m} \int \left(\check{\psi}^{+} \hat{p}_{\mathbf{r}}^{\nu} \check{\psi} + \hat{p}_{\mathbf{r}}^{\nu *} \check{\psi}^{+} \cdot \check{\psi} \right) d\mathbf{R} . \tag{4}$$

Здесь $x = (\mathbf{r}, t)$; $X = (\mathbf{r}, \mathbf{R}, t)$. Полевой оператор $\check{\psi}(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t)$ отвечает атомам среды, причем $\mathbf{r}$ и $\mathbf{R}$ описывают, соответственно, координату валентного электрона с массой m и атомного остатка с массой *M*. Через $U(\mathbf{r}-\mathbf{R})$ обозначена их потенциальная энергия. По повторяющимся индексам ν подразумевается суммирование. Для температурно-невырожденного газа атомов конкретный вид перестановочных соотношений полевых операторов не имеет значения. Для простоты будем считать, что

$$\left[\check{\hat{\psi}}(X); \check{\psi}^{+}(X') \right]_{t=t'} = i\hbar \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}) \delta(\mathbf{R}-\mathbf{R}').$$

Нами использована калибровка с нулевым скалярным потенциалом. Оператор векторного потенциала при отсутствии взаимодействия электромагнитного поля с атомами среды равен

$$\check{A}^{\nu}(x) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sqrt{\frac{\hbar c}{2kV}} e_{\mathbf{k}\lambda}^{\nu} \left(\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{kr}-ikct} + \hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}^{+} e^{-i\mathbf{kr}+ikct} \right).$$

Ниже всюду будем считать атомы двухуровневыми, но обладающими зеемановскими подуровнями. При этом подуровни основного состояния атомов будем обозначать индексом μ, а подуровни возбужденного состояния индексом *m*. В условиях квазирезонансного взаимодействия $\left| \omega_{m\mu} - ck_0 \right| << \omega_{m\mu} + ck_0$, где $\omega_{m\mu}$ — частота резонансного перехода в атомах, член содержащий $\check{A}^2$ в уравнении (3) опущен. Соответственно, опущен линейный по $\check{A}$ член в выражении для тока (4).

Полуклассическая теория излучения

Будем считать векторный потенциал электромагнитного поля классической величиной $\mathcal{A}^{\nu}(x)$. Из (4) находим, что

$$\mathcal{A}^{\nu}(x) = \overset{0}{\mathcal{A}}{}^{\nu}(x) - \\ - \frac{e}{mc} \int D_r^{\nu\nu_1}(x, x_1) \left\langle \check{\psi}^{+}(X_1) \hat{p}_{\mathbf{r}_1}^{\nu_1} \check{\psi}(X_1) \right\rangle dX_1,$$

где $\overset{0}{\mathcal{A}}{}^{\nu}$ — падающее на среду излучение,

$$D_r^{\nu\nu_1}(x, x_1) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \int e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) - i\omega(t-t_1)} D_r^{\nu\nu_1}(\mathbf{k}, \omega) \frac{d\omega}{2\pi}$$

и

$$D_r^{\nu\nu_1}(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{\lambda=1,2} e_{\mathbf{k}\lambda}^{\nu} e_{\mathbf{k}\lambda}^{\nu_1} \frac{1}{\dfrac{\omega^2}{c^2} - k^2 + \omega 2i0}. \tag{5}$$

Для вычисления $\left\langle \check{\psi}^{+}(X)\check{\psi}(X')\right\rangle$ нам понадобится уравнение, следующее из (3)

$$\left\langle \check{\psi}^{+}(X)\check{\psi}(X')\right\rangle = \left\langle \check{\psi}^{+0}(X)\check{\psi}(X')\right\rangle -$$

$$-\frac{e}{mc}\int G_r^*(X,X_1)\hat{p}_{\mathbf{r}_1}^{\nu_1 *}\mathcal{A}^{\nu_1}(x_1)\left\langle \check{\psi}^{+}(X_1)\check{\psi}(X')\right\rangle dX_1,$$

где

$$G_r(X,X') = \frac{1}{V}\sum_{j\mathbf{p}}\psi_j(\mathbf{r}-\mathbf{R})\psi_j^*(\mathbf{r}'-\mathbf{R}')\int G_r^j\left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar},\frac{E}{\hbar}\right)\times$$

$$\times\exp\left(i\frac{\mathbf{p}}{\hbar}(\mathbf{R}-\mathbf{R}') - i\frac{E}{\hbar}(t-t')\right)\frac{dE}{2\pi\hbar}$$

и

$$G_r^j\left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar},\frac{E}{\hbar}\right) = \frac{1}{E-\varepsilon_j(p)+i0},\quad \varepsilon_j(p) = \varepsilon_j + \frac{p^2}{2M}. \qquad (6)$$

При этом $\psi_j(\mathbf{r}-\mathbf{R})$ — волновая функция электрона в атоме с внутренней энергией ε_j. При наличии столкновительных процессов в среде $+i0$ в (6) следует заменить на конечную величину $+i\gamma_j/2$ с сохранением положительного знака, следующего из принципа причинности.

Аналогично

$$\left\langle \check{\psi}^{+0}(X)\check{\psi}(X')\right\rangle = \left\langle \check{\psi}^{+0}(X)\check{\psi}^{0}(X')\right\rangle -$$

$$-\frac{e}{mc}\int G_r(X',X_1)\hat{p}_{\mathbf{r}_1}^{\nu_1}\mathcal{A}^{\nu_1}(x_1)\left\langle \check{\psi}^{+0}(X)\check{\psi}(X_1)\right\rangle dX_1.$$

Теперь в линейном приближении по электромагнитному полю

$$\mathcal{A}^{\nu}(x) - \overset{0}{\mathcal{A}^{\nu}}(x) = \left(\frac{e}{mc}\right)^2\int D_r^{\nu\nu_1}(x,x_1)G_r^*(X_1,X_2)\times$$
$$\times\hat{p}_{\mathbf{r}_2}^{\nu_2 *}\mathcal{A}^{\nu_2}(x_2)\left\langle \check{\psi}^{+0}(X_2)\hat{p}_{\mathbf{r}_1}^{\nu_1}\check{\psi}^{0}(X_1)\right\rangle dX_1 dX_2 + c.c. \qquad (7)$$

В отсутствие взаимодействий в системе из (3) следует

$$\check{\psi}^{0}(X) = \sum_{j\mathbf{p}}\psi_j(\mathbf{r}-\mathbf{R})\hat{b}_{j\mathbf{p}}\exp\left(i\frac{\mathbf{p}}{\hbar}\mathbf{R} - i\frac{\varepsilon_j(p)}{\hbar}t\right),$$

где $\hat{b}_{j\mathbf{p}}$ — оператор уничтожения атома с импульсом $\mathbf{p}$ и внутренним состоянием ψ_j,

$$\left[\hat{b}_{j\mathbf{p}};\hat{b}_{j'\mathbf{p}'}^{+}\right] = \delta_{jj'}\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}.$$

Очевидно, что

$$\left\langle \check{\psi}^{+0}(X)\check{\psi}^{0}(X')\right\rangle = \frac{1}{V}\int\sum_{j\mathbf{p}}\psi_j^*(\mathbf{r}-\mathbf{R})\psi_j(\mathbf{r}'-\mathbf{R}')G_{12}^j\times$$
$$\times\left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar},\frac{E}{\hbar}\right)\exp\left(-i\frac{\mathbf{p}}{\hbar}(\mathbf{R}-\mathbf{R}') + \frac{iE}{\hbar}(t-t')\right)\frac{dE}{2\pi\hbar}, \qquad (8)$$

причем

$$G_{12}^j\left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar},\frac{E}{\hbar}\right) = -2\pi i\delta\left(E-\varepsilon_j(\mathbf{p})\right)N^j(\mathbf{p}),$$

$$N^j(\mathbf{p}) = \left\langle \hat{b}_{j\mathbf{p}}^{+}\hat{b}_{j\mathbf{p}}\right\rangle. \qquad (9)$$

Использование обозначения G_{12} удобно для согласования с обозначениями других работ [25]. Если до взаимодействия с электромагнитным полем атомная система находилась в состоянии термодинамического равновесия, то недиагональные элементы $\left\langle \hat{b}_{j\mathbf{p}}^{+}\hat{b}_{j'\mathbf{p}'}\right\rangle$ в ней отсутствуют. При наличии столкновительных процессов в (9) надлежит δ функцию заменить на

$$\delta\left(E-\varepsilon_j(p)\right)\to$$
$$\to -\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{E-\varepsilon_j(p)+i\frac{\gamma_j}{2}} - \frac{1}{E-\varepsilon_j(p)-i\frac{\gamma_j}{2}}\right) =$$
$$= \delta_{\gamma_j}\left(E-\varepsilon_j(p)\right).$$

Если среда пространственно неоднородна и распределение по импульсам не зависит от координат, то в вигнеровском приближении следует осуществить замену

$$N^j(\mathbf{p}) \to N^j(\mathbf{p})\vartheta\left(\frac{\mathbf{R}+\mathbf{R}'}{2}\right) =$$
$$= \frac{N^j(\mathbf{p})}{V}\sum_{\mathbf{q}}\vartheta(\mathbf{q})\exp\left[i\mathbf{q}\left(\frac{\mathbf{R}+\mathbf{R}'}{2}\right)\right],$$
$$\vartheta(\mathbf{q}) = \overset{*}{\vartheta}(-\mathbf{q}).$$

Для рассматриваемого нами отражающего слоя толщины L

$$\vartheta(\mathbf{q}) = V\delta(q_x;0)\delta(q_y;0)\vartheta_l(q_z),$$
$$\vartheta_L(q_z) = \frac{1}{L_z}\int_0^L\exp\left[-iq_z\left(\frac{R_z+R_z'}{2}\right)\right]\times$$
$$\times d\left(\frac{R_z+R_z'}{2}\right) = \frac{1-\exp(-iq_zL)}{iq_zL_z},$$

причем $\delta(q_x;0)$ и $\delta(q_y;0)$ — символы Кронекера. Векторный потенциал падающего на среду излучения примем в виде

$$\overset{0}{\mathcal{A}}{}^{\nu}(x) = a_{\mathbf{k}_0\lambda_0} e^{\nu}_{\mathbf{k}_0\lambda_0} e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{r} - ik_0ct} + c.c. \qquad (10)$$

Подстановка (5), (8) и (9) в (7) позволяет получить окончательный результат. Интегралы по промежуточным переменным элементарно снимаются за счет δ функций и символов Кронекера. Укажем лишь способ вычисления суммы по k_z при $z \to -\infty$ и $L_z \to \infty$

$$\frac{2\pi}{L_z}\sum_{k_z}\frac{e^{ik_z z}}{k_{0z}^2 - k_z^2 \pm 2ik_0 0} f(k_z) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik_z z}}{k_{0z} \pm k_z \pm i0}\frac{f(k_z)}{2k_{0z}}dk_z =$$
$$= \mp\frac{i\pi}{k_{0z}} f(\mp k_{0z}) e^{\mp k_{0z} z},$$

здесь $f(k_z)$ — некоторая произвольная гладкая функция. Окончательный результат выпишем с учетом двухуровневой аппроксимации для атомов и в предположении $M \to \infty$, т. е. в отсутствие Доплер-эффекта имеем:

$$\mathcal{A}^{\nu}(\mathbf{r},t) - \overset{0}{\mathcal{A}}{}^{\nu}(\mathbf{r},t) = -\frac{k_0\omega_{m\mu}}{2ck_{0z}^2}\sum_{\lambda}\left(n^{\nu_1\nu_2}_{conv} - \delta_{\nu_1\nu_2}\right)\times$$
$$\times e^{\nu}_{\mathbf{\kappa}\lambda} e^{\nu_1}_{\mathbf{\kappa}\lambda} a_{\mathbf{k}_0\lambda_0} e^{\nu_2}_{\mathbf{k}_0\lambda_0}\left(1 - e^{2ik_{0z}L}\right) e^{i\mathbf{\kappa}\mathbf{r} - ik_0ct} + c.c., \qquad (11)$$

где

$$n^{\nu_1\nu_2}_{conv} = \delta_{\nu_1\nu_2} + \frac{1}{2\omega_{m\mu}kc}\left(\frac{e}{m}\right)^2\times$$
$$\times\sum_{m\mu}\frac{p^{\nu_1 *}_{m\mu} p^{\nu_2}_{m\mu}}{\hbar}\frac{n_\mu - n_m}{\omega_{m\mu} - kc - i\dfrac{\gamma}{2\hbar}}. \qquad (12)$$

Здесь в дипольном приближении

$$p^{\nu}_{m\mu} = \int \psi^*_m(\boldsymbol{\rho})\hat{p}^{\nu}_{\boldsymbol{\rho}}\psi_\mu(\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho},$$
$$\mathbf{\kappa} = \left\{k_{0x}, k_{0y}, -k_{0z}\right\}.$$

Если оба энергетических уровня атомов обладают энергетическими ширинами, то $\gamma = \gamma_m + \gamma_\mu$. Характерной особенностью полуклассического приближения является зависимость коэффициента отражения от разности концентраций атомов в нормальном n_μ и возбужденном n_m состояниях. Область применимости формулы (12) определяется неравенством $(n_\mu - n_m)\bar{\lambda}^3\gamma_r/\gamma << 1$, где $\bar{\lambda}$ — длина волны падающего на среду излучения, γ_r — радиационная ширина возбужденного уровня атомов.

Метод Г-операторов

Для вычисления когерентной компоненты векторного потенциала $\mathcal{A}^{\nu(c)}(x)$ в отраженном излучении воспользуемся методом Г-операторов [27], автоматически разделяющем когерентный и некогерентный каналы рассеяния. Достоинство метода Г-операторов состоит в том, что в нем отсутствует необходимость разрыва квантовых корреляторов фотон-фотон. По этой причине указанный метод полностью и корректно описывает процессы вынужденного излучения света, помещая их в некогерентный канал рассеяния [28]. Напомним лишь суть метода.

Совокупность чисел заполнения $N_{\mathbf{k}\lambda}$ свободного электромагнитного поля обозначим посредством вектора $\mathbf{N} = ..., N_{\mathbf{k}\lambda}, ...$. В пространстве чисел заполнения этому состоянию отвечает волновая функция, которая может быть представлена в виде

$$\Phi^0\left(\mathbf{N}|\boldsymbol{\zeta}\right) = \prod_{\mathbf{k}\lambda}\varphi\left(N_{\mathbf{k}\lambda}|\zeta_{\mathbf{k}\lambda}\right), \qquad (13)$$

где $\varphi\left(N_{\mathbf{k}\lambda}|\zeta_{\mathbf{k}\lambda}\right)$ — волновая функция квантового осциллятора.

Построим некоторое пространство с порождающим вектором $\rangle^0_{\tilde{A}}$. Пусть $\check{\mathfrak{A}}^+(\mathbf{N},t)$ и $\check{\mathfrak{A}}(\mathbf{N},t)$ — операторы уничтожения и рождения конгломерата фотонов с набором чисел заполнения $\mathbf{N}$, и $\rangle_{\tilde{A}} = \hat{\mathfrak{A}}^+(\mathbf{N})\rangle^0_{\tilde{A}}$ — волновая функция такого состояния в Г-пространстве. Эти функции образуют полный базис. Между введенными таким образом базисными функциями и функциями (13) существует соответствие, осуществляемое унитарным оператором

$$\hat{\Phi}(\boldsymbol{\zeta}) = \sum_{\mathbf{N}}\hat{\mathfrak{A}}^+(\mathbf{N})\Phi^0\left(\mathbf{N}|\boldsymbol{\zeta}\right).$$

Теперь все расчеты могут быть выполнены в Г-представлении. В частности, в Г-представлении может быть развит формализм матричных функций Грина [21]

$$\boldsymbol{D}_{ll'}(\mathbf{N},t,\mathbf{N}',t') = \frac{1}{i\hbar}\left\langle\hat{T}\check{\mathfrak{A}}_l(\mathbf{N},t)\check{\mathfrak{A}}^+_{l'}(\mathbf{N}',t')\right\rangle_{\tilde{A}0},$$
$$l, l' = 1, 2,$$

где $\check{\mathfrak{A}}_l(\mathbf{N},t)$ — операторы в гейзенберговом представлении, $\rangle_{\tilde{A}0}$ — волновая функция системы до включения взаимодействия между электромагнитным полем и атомами газа. Далее предполагается, что атомный ансамбль до взаимодействия с излучением обладал гауссовым распределением по степеням свободы, что позволяет при упрощении усредненного произведения операторов $\hat{\psi}$ и $\hat{\psi}^+$ в представлении взаимодействия воспользоваться термодинамическим вариантом теоремы Вика [29]. Упрощение усредненного произведения операторов $\hat{\Phi}$ и $\hat{\Phi}^+$ в этой технике выполняется точно [28]. Диаграммная техника приводит к следующим известным результатам [28].

Матрица $\mathcal{D}_{ll'}$ обладает структурой

$$\mathcal{D}_{ll'} = \Delta_{ll'} + \rho_{ll'} / i\hbar,$$

причем матричный элемент ρ_{12} описывает матрицу плотности электромагнитного поля в среде $\rho_{12} = Sp_a \rho$. Здесь ρ — полная матрица плотности системы. Суммирование Sp_a производится по аргументам атомов среды. Для нахождения матрицы ρ_{12} возникает следующая система уравнений. Прежде всего

$$\rho_{12} = \rho_{12}^{(c)} + \rho_{12}^{(n)},$$

и, как следствие, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{\nu} &= Sp\hat{A}^{\nu}\rho_{12} = Sp\hat{A}^{\nu}\rho_{12}^{(c)} + \\ &+ Sp\hat{A}^{\nu}\rho_{12}^{(n)} = \mathcal{A}^{\nu(c)} + \mathcal{A}^{\nu(n)}. \end{aligned} \tag{14}$$

Такое разбиение на когерентную $\rho_{12}^{(c)}$ и некогерентную $\rho_{12}^{(n)}$ компоненты осуществляется автоматически и согласуется с формулой (1). Далее

$$\rho_{12}^{(c)} = \left(1 + \Delta_r \hat{\mathcal{P}}_r\right)\rho_{12}^0\left(\hat{\mathcal{P}}_a \Delta_a + 1\right), \tag{15}$$

$$\rho_{12}^{(n)} = -\Delta_r \hat{\mathcal{P}}_{12}^{(n)} \Delta_a, \ \Delta_r = \Delta_r^0 + \Delta_r^0 \hat{\mathcal{P}}_r \Delta_r.$$

Здесь $\hat{\mathcal{P}}_r$ и $\hat{\mathcal{P}}_{12}^{(n)}$ — поляризационные операторы, возникающие в технике функций Грина в Г-пространстве. Матрица $\rho_{12}^{(c)}$ рассчитывается автономно. Эта матрица вместе с оператором $\hat{\mathcal{P}}_{12}^{(n)}$ и уравнением (15) определяет матрицу $\rho_{12}^{(c)}$. Здесь важно отметить, что эволюция излучения в среде с возбужденными атомами, как уже указано выше, описывается из-за наличия процессов вынужденного излучения обоими каналами рассеяния. Наличие разных поляризационных операторов, управляющих этими каналами, свидетельствует о том, что с помощью одного стандартного показателя преломления такая эволюция описана быть не может. По этой причине в работе [30] наряду со стандартным показателем преломления предложено использовать еще другой — когерентный (причинный) показатель преломления света. Далее, оказывается, что

$$\Delta_r = \Delta_{11}, \ \Delta_a = -\Delta_{22} = \Delta_r^+,$$

$$\hat{\mathcal{P}}_r = \hat{\mathcal{P}}_{11}, \ \hat{\mathcal{P}}_a = \hat{\mathcal{P}}_{22} = \hat{\mathcal{P}}_r^+.$$

Приведем явное выражение для поляризационного оператора $\hat{\mathcal{P}}_r$ в низшем приближении по заряду [28]

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{P}}_r &= -\left(\frac{e\hbar}{mc}\right)^2 \int \hat{p}_{\mathbf{r}_1}^{\nu_1} \hat{A}^{\nu_1}(\mathbf{r}_1) G_r(X_1, X_2) \Delta_r^0 \hat{p}_{\mathbf{r}_2}^{\nu_2} \hat{A}^{\nu_2} \times \\ &\times (\mathbf{r}_2) G_{12}(X_2, X_1) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{R}_1 d\mathbf{R}_2. \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь

$$\Delta_r^0 = \frac{1}{i\hbar}\vartheta(t_1 - t_2)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{ph}(t_1 - t_2)\right),$$

$$\hat{H}_{ph} = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar c k \hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}^+ \hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}. \tag{17}$$

Функции G_r и G_{12} определены формулами (6) и (9). Оператор $\hat{A}^{\nu}(\mathbf{r})$ в представлении Шредингера имеет вид

$$\hat{A}^{\nu}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sqrt{\frac{\hbar c}{2kV}} e_{\mathbf{k}\lambda}^{\nu} \left(\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}^+ e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}\right).$$

Далее

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{P}}_{12}^{(n)} &= \left(\frac{e\hbar}{mc}\right)^2 \int \hat{p}_{\mathbf{r}_1}^{\nu_1} \hat{A}^{\nu_1}(\mathbf{r}_1) G_{12}(X_1, X_2)\left(\rho_{12}^{(c)} + \rho_{12}^{(n)}\right) \times \\ &\times \hat{p}_{\mathbf{r}_2}^{\nu_2} \hat{A}^{\nu_2}(\mathbf{r}_2) G_{21}(X_2, X_1) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{R}_1 d\mathbf{R}_2. \end{aligned}$$

Подстановка (6), (9) и (17) в (16) после преобразования Фурье оператору $\hat{\mathcal{P}}_r$ позволяет придать вид [21]

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{P}}_r(E) &= \sum_{\mathbf{k}_1\lambda_1\mathbf{k}_2\lambda_2} \Big[\hat{\alpha}_{\mathbf{k}_1\lambda_1} A_r^{\mathbf{k}_1\lambda_1\mathbf{k}_2\lambda_2}\left(E - \hat{H}_{ph}\right)\hat{\alpha}_{\mathbf{k}_2\lambda_2}^+ + \\ &+ \hat{\alpha}_{\mathbf{k}_1\lambda_1}^+ C_r^{\mathbf{k}_1\lambda_1\mathbf{k}_2\lambda_2}\left(E - \hat{H}_{ph}\right)\hat{\alpha}_{\mathbf{k}_2\lambda_2}\Big], \end{aligned} \tag{18}$$

причем в дипольном двухуровневом приближении в отсутствие Доплер-эффекта имеем

$$\begin{aligned} A_r^{\mathbf{k}_1\lambda_1\mathbf{k}_2\lambda_2}(E) &= a_r^{\mathbf{k}_1\lambda_1\mathbf{k}_2\lambda_2}(E)\,\delta\left(k_{1x};k_{2x}\right) \times \\ &\times \delta\left(k_{1y};k_{2y}\right)\vartheta_L\left(k_{2z} - k_{1z}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_r^{\mathbf{k}_1\lambda_1\mathbf{k}_2\lambda_2}(E) &= c_r^{\mathbf{k}_1\lambda_1\mathbf{k}_2\lambda_2}(E)\,\delta\left(k_{1x};k_{2x}\right) \times \\ &\times \delta\left(k_{1y};k_{2y}\right)\vartheta_L\left(k_{1z} - k_{2z}\right), \end{aligned}$$

$$a_r^{\mathbf{k}_1\lambda_1\mathbf{k}_2\lambda_2}(E) = \frac{\hbar}{c}\left(\frac{e}{m}\right)^2 \times$$

$$\times \sum_{m\mu} \frac{p_{m\mu}^{\lambda_1 *}(\mathbf{k}_1)}{\sqrt{2k_1 V}} \frac{p_{m\mu}^{\lambda_2}(\mathbf{k}_2)}{\sqrt{2k_2 V}} \frac{N_m}{E + \hbar\omega_{m\mu} + i\dfrac{\gamma}{2}},$$

$$c_r^{\mathbf{k}_1\lambda_1\mathbf{k}_2\lambda_2}(E) = \frac{\hbar}{c}\left(\frac{e}{m}\right)^2 \times$$

$$\times \sum_{m\mu} \frac{p_{m\mu}^{\lambda_1 *}(\mathbf{k}_1)}{\sqrt{2k_1 V}} \frac{p_{m\mu}^{\lambda_2}(\mathbf{k}_2)}{\sqrt{2k_2 V}} \frac{N_\mu}{E - \hbar\omega_{m\mu} + i\dfrac{\gamma}{2}},$$

$$p_{m\mu}^{\lambda}(\mathbf{k})=\sum_{\nu}e_{\mathbf{k}\lambda}^{\nu}p_{m\mu}^{\nu},\quad \hbar\omega_{m\mu}=\varepsilon_m-\varepsilon_{\mu}.$$

Приведенные формулы полностью определяют искомую матрицу ρ_{12}. Что касается матрицы плотности падающего на среду излучения в отсутствие его взаимодействия с веществом, то

$$\rho_{12}^{0}=\varphi_{\alpha}\varphi_{\alpha}^{*}.$$

Будем считать, что падающее излучение находится в квантовом когерентном состоянии [31]

$$\varphi_{\alpha}=e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_{n}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle\rightarrow\left(1+\alpha\hat{\alpha}^{+}\right)|0\rangle \text{ при } \alpha\rightarrow 0.$$

Индексы $(\mathbf{k}_0,\lambda_0)$ здесь опущены. Считая амплитуду рассеиваемого излучения достаточно малой и полагая $\alpha=\sqrt{\frac{2k_0V}{\hbar c}}a_{\mathbf{k}_0\lambda_0}$, найдем окончательно

$$\rho_{12}^{0}=\left(1+\sqrt{\frac{2k_0V}{\hbar c}}a_{\mathbf{k}_0\lambda_0}\hat{\alpha}_{\mathbf{k}_0\lambda_0}^{+}\right)|0\rangle\langle 0|\left(1+\hat{\alpha}_{\mathbf{k}_0\lambda_0}\sqrt{\frac{2k_0V}{\hbar c}}a_{\mathbf{k}_0\lambda_0}^{*}\right).$$

Такая форма записи матрицы плотности позволяет амплитуду падающего на среду поля записать в виде (10)

$$\overset{0}{\mathcal{A}}{}^{\nu}(x)=Sp\hat{A}^{\nu}(x)\rho_{12}^{0}=a_{\mathbf{k}_0\lambda_0}e_{\mathbf{k}_0\lambda_0}^{\nu}e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{r}-ik_0ct}+c.c.$$

Подстановка (15) и (18) в (14) для амплитуды рассеянного поля в приближении $\sim e^2$ при $z\rightarrow-\infty$ дает

$$\mathcal{A}^{\nu(c)}(\mathbf{r},t)-\overset{0}{\mathcal{A}}{}^{\nu}(\mathbf{r},t)=-\frac{k_0\omega_{m\mu}}{2ck_{0z}^2}\sum_{\lambda}\left(n_{coh}^{\nu_1\nu_2}-\delta_{\nu_1\nu_2}\right)\times$$
$$\times e_{\mathbf{k}\lambda}^{\nu}e_{\mathbf{k}\lambda}^{\nu_1}a_{\mathbf{k}_0\lambda_0}e_{\mathbf{k}_0\lambda_0}^{\nu_2}\left(1-e^{2ik_{0z}L}\right)e^{i\mathbf{\kappa}\mathbf{r}-ik_0ct}+c.c.,\tag{19}$$

где

$$n_{coh}^{\nu_1\nu_2}=\delta_{\nu_1\nu_2}+\frac{1}{2\omega_{m\mu}kc}\left(\frac{e}{m}\right)^2\times$$
$$\times\sum_{m\mu}\frac{p_{m\mu}^{\nu_1 *}p_{m\mu}^{\nu_2}}{\hbar}\left(\frac{n_{\mu}}{\omega_{m\mu}-kc-i\dfrac{\gamma}{2\hbar}}-\frac{n_m}{\omega_{m\mu}-kc+i\dfrac{\gamma}{2\hbar}}\right).\tag{20}$$

Сопоставление формул (19) и (20) с (11) и (12) показывает, что вне резонансной области частот $\hbar\left|\omega_{m\mu}-ck_0\right|>>\gamma$ результат полуклассического рассмотрения совпадает с результатом расчета когерентного канала рассеяния $\mathcal{A}^{\nu}=\mathcal{A}^{\nu(c)}$. В этой области частот вынужденное излучение не играет роли, и некогерентный канал рассеяния отсутствует. Некогерентный канал отсутствует и при $n_m=0$. Необходимое совпадение здесь формул (11) и (19) подчеркивает равенство в них постоянных γ. В области резонансных частот $n_{conv}^{\nu_1\nu_2}$ и $n_{coh}^{\nu_1\nu_2}$ отличаются только знаком перед $i\gamma/2$ в слагаемом, пропорциональном n_m. Этот знак полностью меняет характер отраженного излучения, предсказываемый полуклассической теорией. Физическая причина изменения знака вполне очевидна. В полуклассической теории излучения для резонансных частот $\omega_{m\mu}=ck_0$ согласно (12) оказывается, что $\operatorname{Im}n_{conv}^{\nu_1\nu_2}\propto n_{\mu}-n_m$. Первое слагаемое здесь, пропорциональное n_{μ}, ответственно за поглощение света. Второе слагаемое, пропорциональное n_m, интенсивность поглощения уменьшает из-за вынужденных процессов излучения. Но в когерентном канале рассеяния вынужденное излучение отсутствует. Поэтому согласно (20) здесь $\operatorname{Im}n_{coh}^{\nu_1\nu_2}\propto n_{\mu}+n_m$. В когерентном канале рассеивающие свет атомы не изменяют своего квантового состояния. Если атом изменил свое квантовое состояние, то когерентный канал гибнет. Он гибнет, таким образом, за счет процессов поглощения фотонов, переводящих атомы из невозбужденного состояния в возбужденное. Он гибнет также за счет процессов вынужденного излучения, переводящих атомы из возбужденного состояния в невозбужденное. Таким образом, по отношению к когерентному каналу как процессы поглощения света, так и процессы вынужденного излучения являются процессами деградации, что и объясняет возникновение суммы $n_{\mu}+n_m$.

Коэффициент отражения резонансного излучения

Для расчета коэффициента зеркального отражения излучения от среды $R=s/s_0$ необходимо знать модуль вектора Пойнтинга падающего $\mathbf{s}_0$ и отраженного $\mathbf{s}$ излучений. Направления этих векторов представляются очевидными, поэтому $\mathbf{s}_0=s_0\mathbf{k}_0/k_0$ и $\mathbf{s}=s\mathbf{\kappa}/k_0$. В принятом формализме удобно воспользоваться формулой $s=c\left\langle\hat{N}\hat{\mathcal{E}}^{\nu}\hat{\mathcal{E}}^{\nu}\right\rangle$, что немедленно приводит к $s_0=2k_0^2c\left|a_{\mathbf{k}_0\lambda_0}\right|^2$. Согласно полуклассической теории излучения из (11) для отраженного света

$$s_{conv}=c\hat{\mathcal{E}}^{\nu}\hat{\mathcal{E}}^{\nu}=s_0\frac{k_0^2\omega_{m\mu}^2}{k_{0z}^4c^2}\times$$
$$\times\sum_{\lambda}\left|\left(n_{conv}^{\nu_1\nu_2}-\delta_{\nu_1\nu_2}\right)e_{\mathbf{k}\lambda}^{\nu_1}e_{\mathbf{k}_0\lambda_0}^{\nu_2}\right|^2\sin^2k_{0z}L.\tag{21}$$

Согласно квантовой теории (2) результат оказывается иным

$$
\begin{aligned}
s_{qu} &= c\left\langle \hat{N}\,\hat{\mathcal{E}}^{\nu}\hat{\mathcal{E}}^{\nu}\right\rangle \ge \tilde{n}\mathcal{E}^{\nu(c)}\mathcal{E}^{\nu(c)} + \tilde{n}\mathcal{E}^{\nu(n)}\mathcal{E}^{\nu(n)} = \\
&= c\,\mathcal{E}^{\nu(c)}\mathcal{E}^{\nu(c)} + c\left\langle \mathcal{E}^{\nu} - \mathcal{E}^{\nu(c)}\right\rangle\left\langle \mathcal{E}^{\nu} - \mathcal{E}^{\nu(c)}\right\rangle = \\
&= s_0\frac{k_0^2\omega_{m\mu}^2}{k_{0z}^4c^2}\sum_{\lambda}\left(\left|\left(n_{coh}^{\nu_1\nu_2} - \delta_{\nu_1\nu_2}\right)e_{\mathbf{k}\lambda}^{\nu_1}e_{\mathbf{k}_0\lambda_0}^{\nu_2}\right|^2 + \right. \\
&\quad \left. + \left|\left(n_{conv}^{\nu_1\nu_2} - n_{coh}^{\nu_1\nu_2}\right)e_{\mathbf{k}\lambda}^{\nu_1}e_{\mathbf{k}_0\lambda_0}^{\nu_2}\right|^2\right)\sin^2 k_{0z}L.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

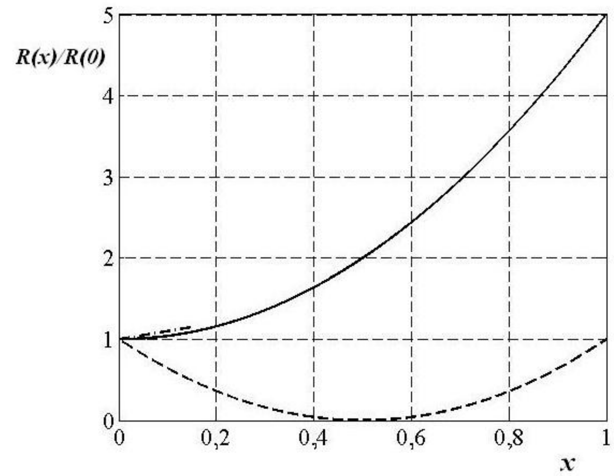
В нерезонансной области частот $\left|kc - \omega_{m\mu}\right| > \gamma/\hbar$ формулы (21) и (22) совпадают. Для резонансного излучения $kc = \omega_{m\mu}$ полуклассическая теория дает

$$R_{conv} = \frac{s_{conv}}{s_0} \propto \left(n_\mu - n_m\right)^2,$$

тогда как согласно квантовой теории оказывается, что

$$R_{qu} = \frac{s_{qu}}{s_0} \propto \left(n_\mu + n_n\right)^2 + 4n_m^2.$$

Поскольку сумма $n_\mu + n_m = n$ в двухуровневом приближении равна полной концентрации атомов среды и от n_m не зависит, то $n_\mu - n_m = n - 2n_m$. Графические изображения R_{conv} и R_{qu} приведены на представленном рисунке. Область справедливости полученных результатов следует ограничить пленками толщиной $k_0L\,\mathrm{Im}\,n_{coh} \ll 1$.



Коэффициент отражения R(x)/R(0) резонансного излучения от слоя возбужденных атомов как функция $x = n_m/(n_\mu + n_m)$:

——— — оценка снизу по квантовой теории излучения;
– – – – — расчеты по полуклассической теории излучения;
– · – · – — расчеты работы [25]

Заключение

Эволюция резонансного излучения в возбужденных средах определяется двумя каналами рассеяния. Когерентный канал не изменяет квантового состояния рассеивающей системы. Некогерентный канал состояние рассеивающей системы меняет и по этой причине включает в себя процессы вынужденного излучения света. Каждый из каналов рассеивания управляется своим поляризационным оператором. Таким образом, в возбужденных средах эволюция излучения в общем случае одним показателем преломления описана быть не может.

Удобным методом описания таких систем служит метод Г-операторов. Будучи примененным к протяженным средам, этот метод для описания некогерентного канала рассеяния, вообще говоря, требует привлечения громоздкого формализма матрицы плотности. В настоящей работе показано, что результаты расчета некогерентного канала рассеяния могут быть оценены с помощью совокупности когерентного канала рассеяния и стандартной полуклассической теории излучения. Такой гибрид двух теорий (полуклассический метод Г-операторов) в математическом отношении лишь не намного сложнее метода стандартной полуклассической теории излучения и поэтому достаточно практичен. Представляется очевидным, что таким образом могут быть изучены различные оптические процессы, такие как черенковское излучение, переходное излучение, фарадеевское вращение плоскости поляризации и т. д. не только в термически возбужденных средах, но и в средах с инверсной населенностью. Также очевидно, что эти процессы в возбужденных средах не могут быть описаны с помощью стандартного показателя преломления. Необходима еще одна независимая характеристика среды. Такой характеристикой может служить поляризационный оператор когерентного канала рассеяния. В ряде случаев этот поляризационный оператор может быть заменен на когерентный показатель преломления сред $n_{coh}^{\nu\nu'}$, отличающийся от стандартного показателя преломления $n_{conv}^{\nu\nu'}$ мнимой частью и потому обладающий другими аналитическими свойствами. Именно так обстоит дело в термодинамически равновесных системах, в которых статистическая сумма выражается исключительно через $n_{coh}^{\nu\nu'}$ [32]. Так обстоит дело и в процессах селективного отражения резонансного излучения от возбужденных сред.

Последний процесс подробно исследуется в настоящей работе. Для простоты расчетов отражающий излучение слой из атомов газа предполагается достаточно тонким. Рассмотрены как область термического возбуждения газа, так и область инверсной заселенности. Показана необходимость учета двух показателей преломления $n_{conv}^{\nu\nu'}$ и $n_{coh}^{\nu\nu'}$. Такая последовательная квантовая теория предсказывает количественное отклонение от предсказаний стандартной полуклассической теории излучения на макроскопическом уровне, что продемонстрировано на чертеже.

Если в характерной точке $n_m = n_\mu$, определяемой равенством концентраций возбужденных атомов и атомов в основном состоянии согласно полуклассической теории излучения, коэффициент отражения обращается в ноль, то согласно квантовой теории он в этой точке в два раза превышает коэффициент отражения от холодной сред $(n_m = 0)$. Этот факт доступен экспериментальной проверке. Различное поведение кривых свидетельствует о трансформации квантовых статистических свойств излучения при отражении его от возбужденной среды и о нарушении равенства $\left\langle \hat{N}\hat{\mathcal{E}}^{\nu}\hat{\mathcal{E}}^{\nu}\right\rangle = \mathcal{E}^{\nu}\mathcal{E}^{\nu}$, если таковое выполнялось в рассеиваемом потоке. Такая трансформация в характерной точке $n_\mu = n_m$ рассеиваемого когерентного состояния квантованного поля, в состояние, по сути дела, с фоковской статистикой проявляется на макроскопическом уровне.

Таким образом, широкое использование полуклассической теории излучения при описании оптики возбужденных сред не представляется оправданным.

Можно предположить, что когерентным каналом рассеяния можно пренебречь и использовать только полуклассическую теорию излучения в тех случаях, когда $\mathcal{E}^{\nu} >> \mathcal{E}^{\nu(c)}$. Именно так обстоит дело в пространственно однородных оптических генераторах света. В общем случае, когда начальные или граничные условия играют существенную роль, следует соблюдать осторожность. Именно когерентный канал рассеяния формирует начальные и граничные условия для некогерентного канала, осуществляющего при инверсной населенности усиление света. Изменение начальных условий может серьезно исказить результат и в полуклассической теории излучения. Другими словами, необходим на основе поляризационного оператора $\hat{\mathcal{P}}_{12}^{(n)}$ подробный анализ мало исследованного в настоящее время некогерентного канала рассеяния. Первые попытки такого прямого анализа предприняты в работе [25]. На рисунке штрихпунктирной линией представлены результаты исследования работы [25]. Эти результаты получены лишь для термически возбужденных сред при дополнительном условии $n_m << n_\mu$. Они не противоречат результатам настоящей работы, в которой для коэффициента отражения света дана лишь оценка снизу. Различный характер поведения кривых на рисунке представляет интерес для экспериментальных исследований.

Кроме того, анализ, основанный на непосредственном использовании оператора $\hat{\mathcal{P}}_{12}^{(n)}$, предсказывает частотно угловое уширение отраженного излучения [25]. Этот эффект уширения полуклассическая теория Г-операторов, как и стандартная полуклассическая теория излучения, описывать не может.

Литература

1. *Френель О.* Избранные труды по оптике. — М.: Гостехиздат, 1955.
2. *Rayleigh Lord* // Philos. Mag. 1871. V. 14. P. 112.
3. *Koester Ch. J.* // IEEE Journal of Quantum Electronics. 1966. V. QE-2. P. 580.
4. *Мандельштам Л. И.* Полное собрание трудов. Т. 1 (под ред. С. М. Рытова). — М.: Изд-во АН СССР. 1948. С. 109, 170.
5. *Planck M.* // Phys. Zs. 1908. V. 9. P. 354
6. *Коган Б. Я., Волков В. М., Лебедев С. А.* // Письма в ЖЭТФ. 1972. Т. 16. С. 144.
7. *Лебедев С. А., Волков В. М., Коган Б. Я.* // Оптика и спектр. 1973. Т. 35. С. 976.
8. *Лебедев С. А., Кизель В. А., Коган Б. Я.* // Квант. Электроника. 1976. Т. 3. С. 2446.
9. *Бойко Б. Б., Петров Н. С., Уварова Н. Н.* Тезисы докладов XI Всесоюзной конф. по когерентной и нелинейной оптике. Ч. I. — Ереван, 1982. С. 58.
10. *Романов Г. Н.* // Письма в ЖЭТФ. 1972. Т. 16. С. 298.
11. *Бойко Б. Б., Петров Н. С., Джилавдари И. З.* // Журн. прикладной спектроскопии. 1973. Т. 18. С. 727.
12. *Колоколов А. А.* // Письма в ЖЭТФ. 1975. Т. 71. С. 660.
13. *Вайнштейн Л. А.* // УФН. 1976. Т. 118. С. 339.
14. *Винокуров Г. Н., Жулин В. И.* // Квантовая электроника. 1982. Т. 9. С. 553.
15. *Gallary P. R., Carmiglia C. K.* // J. Opt. Soc. Am. 1976. V. 66. P. 775.
16. *Cybulski R. F., Carmiglia C. K.* // J. Opt. Soc. Am. 1977. V. 67. P. 1620.
17. *Зимин А. Б.* // Журн. прикладной спектроскопии. 1984. Т. 40. С. 1005.
18. *Биба Т. С., Петров Н. С., Джилавдари И. З.* // Там же. 1980. Т. 32. С. 266.
19. *Бойко Б. Б., Петров Н. С.* Отражение света от усиливающих и нелинейных сред. — г. Минск: Наука и техника, 1981.
20. *Бойко Б. Б., Уварова Н. Н.* // Квантовая электроника. 1981. Т. 8. С. 2506.
21. *Векленко Б. А.* // Известия вузов. Физика. 1983. Вып. 9. С. 71.
22. *Шумейкер Р.* В кн. "Лазерная и когерентная спектроскопия"/Под ред. Дж. Стейнфельда. — М.: Мир, 1982.
23. *Scully M. O., Lamb W. E.* // Phys. Rev. 1967. V. 159. P. 208.
24. *Skaar Johannes* // Ibid. 2006. V. E 73. 026605.
25. *Векленко Б. А., Гусаров Р. Б., Шеркунов Ю. Б.* // ЖЭТФ. 1998. Т. 113. С. 521.
26. *Векленко Б. А.* // Известия вузов. Физика. 1987. Вып. 6. С. 132.
27. *Векленко Б. А.* // Там же. 1978. Вып. 5. С. 77.
28. *Векленко Б. А.* // ЖЭТФ. 1989. Т. 96. С. 457.
29. *Matsubara T.* // Progr. Theor. Phys. 1955. V. 14. P. 351.
30. *Векленко Б. А., Шеркунов Ю. Б.* // Известия вузов. Физика. 2000. Вып. 6. С. 17.
31. *Глаубер Р.* Оптическая когерентность и статистика фотонов. В сб. "Квантовая оптика и квантовая радиофизика", под ред. Де Витт. — М.: Мир, 1966.
32. *Векленко Б. А.* // Оптика и спектр. 2007. Т. 103. С. 413.

Violation of Fresnel`s formulas for resonant radiation scattering on excited media

B. A. Veklenko
Joint Institute for High Temperatures, 13/19 Izhorskaya str., Moscow, 127412, Russia
E-mail: VeklenkoBA@yandex.ru

It is shown that internal statistical quantum properties of resonant radiation in coherent initial state are violated due to the selective reflection on excited media. Such violation manifests itself on macroscopic level. As a consequences the Fresnel`s formulas are violated that manifests about non applicability of the semi classical theory of radiation deals with non quantum electromagnetic field. The reflection coefficients from thin layer with thermal and inversely excited media are calculated.

PACS: 11.15.Kc

Keywords: reflection, quantum, excited medium, Fresnel's formulas.

Bibliography — 32 references. *Received July 15, 2010*