

УДК 533.95

ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ГИРОСКОПЕ

Р. В. Линьков, Ю. М. Урман

Нижегородский педагогический университет, г. Н. Новгород, Россия

Дано описание метода нахождения потерь энергии для ротора электростатического гироскопа, находящегося в неоднородном переменном или вращающемся электрическом поле.

Для создания некоторых типов прецизионных гироскопов используется бесконтактное вывешивание проводящего шара в регулируемом электростатическом поле — так называемый электростатический гироскоп (ЭСГ). Силы со стороны электростатического поля действуют на ротор по нормали к поверхности, за счет чего не создается тормозящий момент. Однако наглядные физические представления показывают, что торможение должно быть. В ЭСГ заряды на роторе “привязаны” к месту под электродом и “бегут” относительно ротора, если он вращается. При наличии конечного электрического сопротивления движение зарядов относительно проводника должно приводить к потерям и торможению.

Целью работы является нахождение для проводящего шара прямых электрических потерь в переменном и во вращающемся неоднородных электрических полях, а также вращающего момента во вращающемся поле (или эквивалентного тормозящего момента в статическом поле). Нас будут интересовать потери и момент в наименьшем порядке по "малой частоте".

Поставленные задачи не решаются в рамках общепринятой квазистационарной электродинамики (напряженность электростатического поля в проводнике отсутствует, а напряженность внешнего поля нормальна к поверхности, потерь нет). Однако существует адекватный поставленным задачам метод низкочастотных приближений [1]. Приложение метода [1] к нашей проблеме приводит к тому, что электростатические поля, которыми традиционно и ограничивалось решение, теперь выступают как поля нулевого приближения, а поля, связанные с токами, возбуждаемыми в проводнике, даются первым приближением и вводятся с малым параметром $\omega/\sigma \ll 1$.

Первоначально рассмотрим случай однородного поля. Пусть неподвижный шар радиуса R с проводимостью σ , магнитной проницаемостью $\mu = 1$ помещен в однородное переменное внешнее поле $E = E_0 \cdot e^{i\omega t}$, где E_0 — произвольный постоянный комплексный вектор. Тем самым в рассмотрение включены как "линейно поляризованное" переменное поле с постоянным направлением, так и поле, вращающееся в некоторой плоскости.

Для такого поля в [1] получено выражение электрического дипольного момента проводящего шара

$$P = \frac{3V}{4\pi} \left[1 - i \frac{3}{4\pi} \frac{\omega}{\sigma} \right] E. \quad (1)$$

Рассмотрим вращающееся электрическое поле в некоторой плоскости, которую выберем за плоскость XY . Выбирая начало системы координат XY в центре шара, найдем, что $E_x = E_0 \cos \omega t$; $E_y = E_0 \sin \omega t$. Тогда с учетом (1) находим:

$$P_x = \frac{3V}{4\pi} E_0 \left[\cos \omega t + \frac{3}{4\pi} \frac{\omega}{\sigma} \sin \omega t \right]; \quad (2)$$

$$P_y = \frac{3V}{4\pi} E_0 \left[\sin \omega t - \frac{3}{4\pi} \frac{\omega}{\sigma} \cos \omega t \right].$$

Из формул (2) следует, что при вращении поля вектор поляризации P отстает от него на некоторый угол, зависящий от частоты вращения ω и проводимости σ . Следовательно, на тело будет действовать вращающий момент, величина которого определяется по формуле:

$$M = P_x E_y - P_y E_x = \frac{9V}{16\pi^2} \frac{\omega}{\sigma} E_0^2. \quad (3)$$

Под действием момента (3) шар будет разгоняться, и его скорость вращения станет экспоненциально приближаться к стационарной с постоянной времени

$$T = \frac{2}{5} \frac{R^2 \rho \sigma}{\left[\frac{3\pi}{4} \right]^2 E_0^2}, \quad (4)$$

где ρ — плотность материала шара.

С этой же постоянной времени вращающийся шар будет тормозиться в статическом поле.

Чтобы иметь представление о характерных значениях величины момента и постоянной времени, рассмотрим численный пример. Для величины $\rho = 1,85 \text{ г/см}^3$ $\sigma^{-1} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{см}$ ($4,45 \cdot 10^{-15} \text{ с}$) (бериллий), $R = 1 \text{ см}$; $E_0 = 10^7 \text{ В/м} = \frac{1}{3} 10^3 \text{ СГСЕ}$, $\omega = 2\pi \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ получаем $M_{вр} = 1,41 \cdot 10^{-10} \text{ дин} \cdot \text{см}$, $T = 2,63 \cdot 10^{13} \text{ с}$ ($8,35 \cdot 10^5 \text{ лет}$).

Из примера видно, что момент чрезвычайно мал.

Момент и мощность потерь в проводнике тесно связаны между собой, и по известному значению одного легко найти другое. Кроме вращающегося поля, рассмотрим однонаправленное переменное поле и вычислим в них мощность потерь. Используя формулу [2]

$$Q = \frac{1}{2} \omega \text{Im} \{P \cdot E\},$$

найдем, что:

в переменном поле

$$Q = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\sigma} \frac{9V}{16\pi^2} E_0^2, \quad (5)$$

во вращающемся поле

$$Q = \frac{\omega^2}{\sigma} \frac{9V}{16\pi^2} E_0^2, \quad (6)$$

где V — объем шара.

Сравнивая (3) и (6), видим, что

$$Q = M \omega, \quad (7)$$

т. е. вращающий момент можно найти, если известны потери.

Заметим, что хотя шар неподвижен, мощность и момент в (7) связаны так, как требуют законы механики для вращающегося тела. Здесь потери, обусловленные токами в шаре, выражены в терминах механики, и (7) справедливо для вращающегося шара в статическом поле.

Обобщим задачу на случай неоднородного внешнего поля. Вычислим потери энергии в проводящем шаре, помещенном в неоднородное электрическое поле либо чисто переменное, либо вращающееся. Их скалярные потенциалы имеют соответственно вид:

$$\Phi_0^e = e^{i\omega t} \sum_{nm} A_{nm} r^n Y_{nm}(\theta, \varphi); \quad (8)$$

$$\Phi_0^e = \sum_{nm} A_{nm} r^n Y_{nm}(\theta, \varphi) \exp(i m \omega t), \quad (9)$$

где θ, φ — координаты точки в сферической системе координат (OZ — ее полярная ось);

$Y_{nm}(\theta, \varphi)$ — сферические функции;

A_{nm} — заданные коэффициенты разложения.

Выражение (9) описывает поле, вращающееся против положительного направления оси OZ с угловой скоростью ω .

Согласно [1], напряженность электрического поля первого приближения внутри тела определяется по формуле

$$E_1 = -i \frac{\omega \cdot k}{c} \nabla \Phi_1, \quad (10)$$

где $k = 1, m$ — для (8) и (9) соответственно, а Φ_1 находится из решения интегрального уравнения

$$\frac{1}{4\pi} \oint \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \frac{dS}{R} = -\frac{\Phi_0^e}{\varkappa}, \quad \varkappa = \frac{4\pi\sigma}{c}. \quad (11)$$

Потенциал Φ_1 будем искать в виде

$$\Phi_1 = \sum_{nm} b_{nm} r^n Y_{nm}(\theta, \varphi). \quad (12)$$

Используя разложение $\frac{1}{R}$ по сферическим функциям, подставляя его и Φ_1 в интеграл и производя интегрирование в (11), после сравнения с (8) найдем, что

$$b_{nm} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{2n+1}{n} A_{nm}. \quad (13)$$

Поле (10) внутри проводника вызывает ток $I = \sigma E_1$, который ответственен за потери. Мощность потерь dQ в элементе объема dV определяется по формуле:

$$\alpha Q = \sigma |E_1|^2 dV. \quad (14)$$

Проводя интегрирование по объему шара, получим, что в переменном (8) и вращающемся (9) полях мощности потерь соответственно равны:

$$Q = \frac{1}{2\sigma} \left(\frac{\omega}{4\pi}\right)^2 \sum_{nm} \frac{(2n+1)^2}{n} R^{2n+1} |A_{nm}|^2; \quad (15)$$

$$Q = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\omega}{4\pi}\right)^2 \sum_{nm} m^2 \frac{(2n+1)^2}{n} R^{2n+1} |A_{nm}|^2. \quad (16)$$

Аналогично (3), (7), во вращающемся поле (9) на шар действует вращающий момент

$$M = -\frac{\omega}{\sigma} \frac{1}{(4\pi)^2} \sum_{nm} m^2 \frac{(2n+1)^2}{n} R^{2n+1} |A_{nm}|^2. \quad (17)$$

Такой же тормозящий момент возникает при вращении шара в статическом поле [как (8), но без фактора $e^{i\omega t}$].

Для нахождения других компонентов момента, действующего на шар, вращающийся в статическом поле, достаточно вычислить поля нулевого и первого приближений на внешней поверхности шара и воспользоваться результатами работы [3]. Однако из-за чрезвычайной малости моментов отпадает практическая необходимость их изучения.

Сделаем еще два замечания по поводу потерь. Формула (15) для потерь в неоднородном поле переходит в частном случае при $n=1$, $m=0$, $A_{10} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \cdot E_0$ в формулу (5) для однородного поля, которая в свою очередь совпадает с формулой (20) из [1], если учесть, что размагничивающий фактор шара равен $1/3$.

Потери энергии проводящего шара в неоднородном переменном поле можно оценить по потенциальной энергии взаимодействия сферического ротора с вывешивающим электростатическим полем подвеса. В соответствии с [4] последняя равна

$$W = \frac{1}{8\pi} \sum_{nm} |A_{nm}|^2 n R^{2n+1}. \quad (18)$$

Сравнивая члены рядов (15) и (18) видим, что справедлива оценка

$$Q < \frac{\omega^2}{\sigma} W. \quad (19)$$

Для вращающегося поля оценка (19) прямо не проходит, но все же можно сказать, что по порядку величины вращающий момент определяется произведением малого параметра ω/σ на электростатическую энергию в объеме шара.

После формального решения задачи рассмотрим некоторые физические соображения, поясняющие возникновение тормозящего момента.

Пусть внешнее поле E_0 однородно. Поле первого приближения внутри шара, согласно (10), есть:

$$E_1 = i \frac{3\omega}{4\pi\sigma} E_0. \quad (20)$$

Оно является потенциальным, однородным, направлено так же, как внешнее, и сдвинуто по фазе на $\pi/2$. Возбуждаемый этим полем ток $I = \sigma E_1$ является незамкнутым и течет через толщину проводника от поверхностных зарядов на одной стороне шара к поверхностным зарядам на другой стороне. Картина поля E_1 представлена на рис. 1. Она подобна полю однородно поляризованного шара.

Незамкнутый ток I_1 обусловлен токами смещения, которыми в квазистатике пренебрегают. Этот ток нетрудно получить, используя интегральную форму уравнений Максвелла (закон полного тока)

$$\oint_L H dL = \frac{4\pi}{c} \oint I dS + \frac{i\omega}{c} \oint D dS. \quad (21)$$

В качестве контура интегрирования L выбирается окружность большого круга, перпендикулярная внешнему полю (рис. 2).

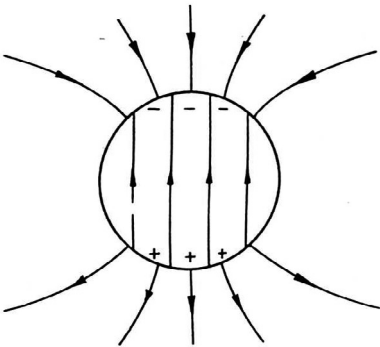


Рис. 1. Электрическое поле шара

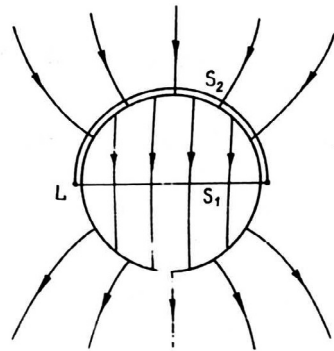


Рис. 2. Выбор контура интегрирования

Поверхность S_1 есть круг, рассекающий шар пополам, а S_2 — поверхность полушферы с внешней стороны шара. Поскольку через одну поверхность течет только ток проводимости, а через другую только ток смещения, то из условия (21) можно получить искомую связь тока I_1 с внешним переменным полем E_0 . Расчет дает

$$I_1 = i \frac{3\omega}{4\pi} E_0,$$

а соответствующее ему электрическое поле $E_1 = I_1/\sigma$, что полностью совпадает с (10).

Таким образом, искомые электрические токи, ответственные за потери энергии в проводнике, появляются из-за непрерывности полного тока — тока проводимости и тока смещения.

Условие непрерывности полного тока можно воспользоваться для того, чтобы качественно сравнить потери энергии в шаре и в сферической оболочке (толщины $h \ll R$). Поскольку статические решения для проводящего шара и оболочки совпадают, то одинаков будет и полный ток. Так как сечение проводника уменьшается в R/h раз для однородного и в меньшей степени для неоднородного полей, то потери в оболочке возрастают не более чем в R/h раз по сравнению с потерями в шаре.

Заметим, что условие непрерывности тока можно использовать для определения токов проводимости в роторе электростатического гироскопа по напряженности электрического поля в рабочем зазоре.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе методики, данной в [1], найдены в наинизшем порядке по ω поля и токи в проводящем шаре, помещенном в неоднородное переменное или вращающееся электрическое поле.

Вычислены потери энергии в этих полях, а также вращающий момент во внешнем неоднородном вращающемся поле. Из числовых оценок следует, что момент имеет пренебрежимо малую для электростатического гироскопа величину.

Источником потерь являются незамкнутые токи, которые возникают из-за непрерывности тока проводимости и тока смещения, определяемого изменением напряженности статического поля на поверхности проводника.

Для оценки возникающих потерь или момента достаточно знать энергию электрического поля в объеме шара.

Литература

1. Левин М. Л., Муратов Р. З. Проводящий эллипсоид в низкочастотном электромагнитном поле // Изв. вузов. Радиофизика. 1979. Т. 22. № 6. С. 740—749.
2. Джексон Дж. Классическая электродинамика. — М.: Мир, 1965.
3. Линьков Р. В., Урман Ю. М. Силы и моменты, действующие на проводящую оболочку, вращающуюся в магнитном поле // ЖТФ. 1977. Т. 47. № 5. С. 889—896.
4. Урман Ю. М. К расчету силовых характеристик внешнего сферического подвеса, криогенного гироскопа. — Изв. вузов. Приборостроение. 1973. Т. 16. № 8. С. 87—92.

ENERGY LOSSES IN AN ELECTROSTATIC GYROSCOPE

R. V. Linkov, Yu. M. Urman

N. Novgorod Pedagogics University, N. Novgorod, Russia

There has been presented the methodology of calculation of the energy losses for an electrostatic gyroscope rotor, which is occur in inhomogeneous variable or rotating electric field.