Общая физика

УДК 533.9

Затухание Ландау плазменных волн

В. П. Силин

Рассмотрена теория Ландау бесстолкновительного затухания плазменных волн. Приведены аргументы в пользу того, что в такой задаче под базовым контуром Ландау следует понимать один из двух таких контуров, использовавшихся автором такой теории, однако не тот, для которого такое название широко используется. Для второго контура Ландау найдено место в приближенной аналитической теории слабого затухания волн, а помимо этого в квазистационарной теории ионно-звуковой турбулентности.

PACS: 52.35.-g

Ключевые слова: контуры Ландау, плазменные волны, затухание Ландау, формулы Сохоцкого—Племеля.

Введение

В 1946 г. в работе [1] Ландау теоретически предсказал бесстолкновительное затухание плазменных волн, которое им не было связано с эффектом Вавилова—Черенкова, а поэтому первоначально воспринималось как нечто почти мистическое. В то же время это предсказание, хотя и не сразу, было воспринято определенной частью молодежи как научный результат, углубляющий бесстолкновительное кинетическое описание плазмы, предложенное Власовым [2]. В частности, работа [1], посвященная начальной линейной задаче о релаксации слабого возмущения электронного распределения (ниже задаче Коши), указала вскоре ставший общепринятым путь математического подхода к теории волн не только в плазме с распределением Максвелла по скоростям частиц, как это было в работах [1, 2]. Буквально сразу это было подхвачено в школе Власова в работе Гольдмана [3], где был рассмотрен случай плазмы с распределением электронов по закону Ферми. Хоть и запоздало, но именно этот общепринятый подход породил возможность критического анализа работы [1], который и публикуется в данном сообщении.

Контуры Ландау

В данном изложении постараемся рассмотреть понятие "контур Ландау", используемое при описании комплексной диэлектрической проницаемости бесстолкновительной плазмы и нахождении частоты и декремента затухания плазменных волн. При этом в работе [1] используются в практике вычислений два контура, один из которых стал общепринятым (рис. 1) и связывается с именем Ландау, а второй (рис. 2) в известной мере не популярен. На взгляд автора, положение должно быть исправлено, а именно, контур рис. 2 следовало бы именовать также контуром Ландау. Во всяком случае он представляется необходимым при численном решении дисперсионного уравнения упомянутой выше задачи Коши. С другой стороны, для контура рис. 1 представляется простое рассуждение, разъясняющее сущность использования такого контура в практике аналитического вычисления, предложенной в работе [1].

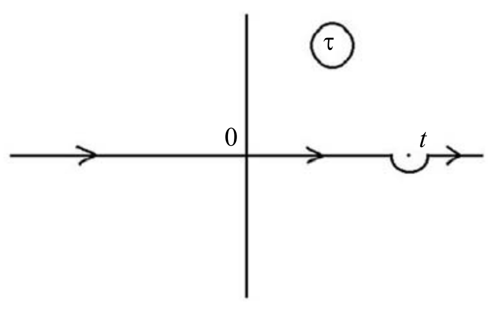

Рис. 1. Контур интегрирования интеграла типа Коши, являющегося аналитическим продолжением на действительную ось функции (6), заданной в верхней полуплоскости комплексной переменной Z интегралом типа Коши по действительной оси, при стремлении аргумента Z на верхней полуплоскости к точке t, находящейся на действительной оси

Силин Виктор Павлович, главный научный сотрудник.
Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН (ФИАН).
Россия, 119991, Москва, Ленинский пр-т, 53.
Тел. 8 (499) 783-34-98. E-mail: silin@sci.lebedev.ru

Статья поступила в редакцию 10 июня 2012 г.

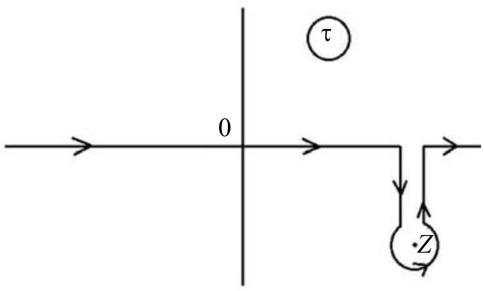

Рис. 2. Контур интегрирования интеграла типа Коши, являющегося аналитическим продолжением в нижнюю полуплоскость Z функции (6), заданной в верхней полуплоскости комплексной переменной Z интегралом типа Коши по действительной оси

Несколько ниже для иллюстративности изложения используем частный, но для данного изложения поучительный случай электронной плазмы с модельным распределением электронов по скоростям

$$f(\mathbf{v}) = \frac{N_e w}{\pi^2\left(\mathbf{v}^2 + w^2\right)^2}. \quad (1)$$

Здесь N_e — плотность числа электронов, w — характерная для распределения (1) скорость электронов. Однако для дальнейшего напомним некоторые существенные положения работы [1], а также необходимые положения теории функций комплексного переменного.

Итак, бесстолкновительное затухание Ландау обнаруживается в работе [1] в ходе решения начальной задачи о релаксации малого линейного возмущения распределения электронов. Говоря современным языком, в ходе решения такой задачи (ср., например, [4, 5]) возникает (при учете лишь возмущений продольного электрического поля) комплексная продольная диэлектрическая проницаемость электронной плазмы

$$\varepsilon_l(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{4\pi e^2}{mk^2}\int \frac{d\mathbf{v}}{\omega - \mathbf{kv}}\mathbf{k}\frac{\partial f(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \quad (2)$$

как функция комплексной переменной ω, определенная формулой (2) в верхней полуплоскости ω, когда $\mathrm{Im}\omega = \Delta > 0$. В формуле (2) e и m — заряд и масса электрона, **k** — волновой вектор начального возмущения волн продольного электрического поля, возникающего в задаче релаксации. При этом f — электронное распределение невозмущенного равновесного состояния, зависящее, как и распределение (1), от модуля электронной скорости $|v|$. В формуле (2) Ландау проводил интегрирование по компонентам скорости, перпендикулярным направлению волнового вектора **k**, которые обозначим как v_x и v_y. Тогда, используя обозначение

$$f_0(V) = \iint dv_x dv_y f(\mathbf{v}), \quad (3)$$

где $V = v_z$ и ось z направлена вдоль волнового вектора, можем переписать (2) в виде

$$\varepsilon_l(\omega, k) = 1 - \frac{4\pi e^2}{mk^2}\int_{-\infty}^{\infty} dV \frac{1}{V - (\omega/k)}\frac{df_0}{dV}, \ \mathrm{Im}\,\omega = \Delta > 0. \quad (4)$$

Здесь $k = |\mathbf{k}| > 0$. Формула (4) записана в таком виде, чтобы было очевидно, что определение комплексной продольной диэлектрической проницаемости прочитывается как представление функции комплексной переменной (ω/k), заданной интегралом типа Коши в верхней полуплоскости (ω/k).

Поскольку далее используется положение "старой" математики, то напомним известный результат об аналитическом продолжении такого представления на границу области, отвечающую контуру интегрирования интеграла типа Коши, связанного с именем Сохоцкого [6]. Для данного случая (т. е. интеграла по действительной оси) можно непосредственно воспользоваться нужной нам "формулой Сохоцкого для бесконечной прямой" [7]:

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P}{\tau - t}\varphi(\tau)d\tau. \quad (5)$$

Здесь $\Phi^+(t)$ — предел функции

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau \quad (6)$$

при стремлении z на верхней полуплоскости к t, находящейся на действительной оси. При этом в формуле (5) интеграл по действительной оси понимается в смысле главного значения Коши. Формулу (5) можно переписать в следующем виде [4, 5]

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau)\left[\frac{P}{\tau - t} + i\pi\delta(t - \tau)\right]. \quad (7)$$

Последняя формула особенно полезна, поскольку она может быть записана в виде

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau, \quad (8)$$

где контур интегрирования изображен в плоскости комплексного переменного τ на рис. 1.

Относительно истории формул Сохоцкого укажем, что, согласно Мусхелишвили [8], "долгое время спустя" формулы Сохоцкого были найдены Племелем [9]. По этой причине, в отличие от книги [7], в книге [8] используется название формулы Сохоцкого—Племеля.

Для получения бесстолкновительного декремента затухания Ландау недостаточно аналитического продолжения Сохоцкого на действительную ось того интеграла типа Коши, который определяет формулу (4). Действительно, частота и декремент затухания плазменных волн как функции волнового вектора, согласно Ландау, определяются дисперсионным уравнением

$$\varepsilon_l(\omega, k) = 0. \tag{9}$$

Так как найденный Ландау декремент $\gamma > 0$ и $\mathrm{Im}\omega = -\gamma < 0$, то необходимо иметь аналитическое продолжение (4) не только на действительную ось, как это интересовало Сохоцкого, но и в нижнюю полуплоскость комплексной переменной τ. Это было сделано Ландау в работе [1]. Для того чтобы пояснить естественность идеи аналитического продолжения Ландау, отметим, что аналитическое продолжение по Сохоцкому интеграла типа Коши (6) на действительную ось согласно (8) в терминологии, используемой в работе [4], отвечает уводу пути интегрирования с действительной оси в формуле (6) на контур рис. 1. При этом полюс $\tau = t$, а в формуле (4) черенковский полюс $V = \omega/k$, обходится снизу. Аналитическое продолжение в нижнюю полуплоскость с помощью увода контура интегрирования интеграла типа Коши (5) в нижнюю полуплоскость комплексной переменной τ проводится без пересечения особых точек функции $\varphi(\tau)$, что подчеркнуто в [4]. В работе [1] для аналитического продолжения в нижнюю полуплоскость использован контур вида рис. 2.

Подчеркнем, что в [1] рассматривалось максвелловское распределение электронов по скоростям, для которого функция f_0, входящая в подынтегральное выражение (4), имеет существенную особенность в бесконечно удаленной точке комплексной переменной V. Это на рис. 2 отвечает переменной τ. Поэтому в контуре рис. 2 (как и в контуре рис. 1) увод контура от действительной оси проводился лишь в конечной области.

Модельное электронное распределение

Обратимся теперь к примеру модельного электронного распределения (1) (см. задачу IV.2 в [5]), когда имеем следующие соотношения:

$$f_0(V) = \frac{N_e w}{\pi\left(V^2 + w^2\right)} \text{ и } \frac{df_0(V)}{dV} = \frac{N_e V}{\pi}\frac{d}{dw}\frac{1}{V^2 + w^2}. \tag{10}$$

Тогда можно записать

$$\varepsilon_l(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\pi k^2}\frac{d}{dw} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} dV \frac{V}{\left[V - (\omega/k)\right](V + iw)(V - iw)}. \tag{11}$$

Уводя при $\mathrm{Im}\omega > 0$ контур интегрирования по действительной оси в (11) бесконечно далеко в нижнюю полуплоскость комплексной переменной V, где такой контур дает нулевой вклад, получаем, что вклад в (11) возникает лишь от вычета из-за полюса в точке $V = -iw$. В результате это дает (см. задачу IV.2 в книге [5])

$$\varepsilon_l(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{(\omega + ikw)^2}. \tag{12}$$

Из формулы (12), полученной при $\mathrm{Im}\omega > 0$, сразу следует, что в верхней полуплоскости комплексной переменной ω функция (12) не имеет особенностей. Также очевидно, что выражение (12) представляет собой аналитическое продолжение $\varepsilon_l(\omega, k)$ на действительную ось и в нижнюю полуплоскость ω. Подчеркнем то, что вывод об аналитическом продолжении $\varepsilon_l(\omega, k)$ в случае электронного распределения (1) удается сделать благодаря аналитической записи формулы (12).

Легко понять, что в применении к интегралу Коши формулы (11) контуры рис. 1 и 2 при замене в них τ на V и в первом случае t, а во втором случае z на (ω/k), соответственно, дают также результат (12), ибо допускают возможность увода их контуров бесконечно вниз комплексной полуплоскости с единственным вкладом вычета $V = -iw$.

После того, как мы определились с комплексной диэлектрической проницаемостью, переходим к этапу очевидного получения спектра продольных волн, проявляющихся в начальной задаче при электронном распределении (1). Ответ возникает из уравнения (9) при подстановке в него (12), а именно,

$$\omega = \pm\omega_{Le} - ikw. \tag{13}$$

Другими словами, в этом случае возникает точный в модели (1) ответ отсутствия дисперсии продольных волн и элементарный точный закон линейной зависимости бесстолкновительного декремента затухания волн от модуля волнового вектора $\gamma = kw$.

Обобщенное рассмотрение

Вышеизложенное позволяет ответить на вопрос, какое вычисление продольной диэлектрической восприимчивости можно считать достаточным для получения ответа (13) о бесстолкновительном декременте затухания плазменных волн, проявляющегося в решении задачи Коши не только в примере рассмотрения, но и в более сложном случае, когда возможно, например, лишь приближенное вычисление с использованием численных методов. Представляется, что ответ на этот вопрос является простым и сводится к ответу на вопрос: каким контуром интегрирования достаточно пользоваться. А именно, таким контуром является контур рис. 2 (или эквивалентный ему). Действительно, исходный контур формулы (4), предложенный для Imω > 0, не отвечает области, в которой по определению можно найти декремент. Далее, контур рис. 1, который зачастую связывают с именем Ландау, как это известно из XIX века, отвечает чисто действительным значениям ω аргумента функции $\varepsilon_l(\omega, k)$, среди которых нельзя найти какого-либо декремента затухания. Поэтому представляется пока поспешным его связывать с именем Ландау при решении того, что обозначено как задача Коши, хотя последнее за время после публикации статьи [1] стало правилом. Да и в самой статье [1] предложено для малых декрементов затухания использовать интеграл типа Коши с контуром интегрирования рис. 1. Как же в этом случае оказывалось возможным получить декремент затухания? Ответ на этот вопрос, оказывается, прост. При решении уравнения (9) в случае приближенных вычислений использовался результат, полученный с помощью интеграла Коши с контуром рис. 1, но при этом игнорировался тот факт, что такие вычисления возможны в случае такого контура лишь при Imω = 0. Считалось (как ниже увидим, разумно), что Imω ≠ 0, а далее все просто ведет, на первый взгляд, к несуществующему при непосредственном использовании контура рис. 1 решению с конечным, хотя и малым, декрементом. Среди подобных работ, которые можно назвать "работами с полувычетом", не только работа [1] и основной текст книги [5], но и многочисленные другие. Необходимо понять сущность подхода таких работ. Однако во всяком случае обоснованным является путь вычисления бесстолкновительного декремента затухания плазменных волн, использующий контур Ландау рис. 2, когда интеграл типа Коши в формулах (4) и (11) сводится к вкладу интеграла вдоль действительной оси и вкладу от (полного) вычета от черенковского полюса $V = \omega/k$ в нижней полуплоскости комплексной переменной V.

$$\varepsilon_l(\omega, k) = 1 - \frac{4\pi e^2}{m_e k^2} \times$$
$$\times\left[\int_{-\infty}^{+\infty} dV \frac{1}{V - (\omega/k)} \frac{df_0(V)}{dV} + 2\pi i \left.\frac{df_0(V)}{dV}\right|_{V=(\omega/k)}\right], \quad (14)$$
$$\mathrm{Im}\,\omega < 0.$$

Такой путь отыскания декремента затухания представляется актуальным при использовании численных методов.

В отличие от этого, в работе [1] Ландау искал аналитическое выражение для декремента затухания с помощью контура рис. 1. Нам следует показать, почему в его случае это возможно. Прежде всего, укажем, что в случае контура рис. 1 вместо формулы (14) имеем

$$\varepsilon_l(\omega, k) = 1 - \frac{4\pi e^2}{mk^2} \times$$
$$\times\left[\int_{-\infty}^{\infty} dV \frac{P}{V - \omega/k} \frac{df_0(V)}{dV} + \pi i \left.\frac{df_0(V)}{dV}\right|_{V=\omega/k}\right], \quad (15)$$
$$\mathrm{Im}\,\omega = 0.$$

Далее обратимся к интересовавшему Ландау случаю максвелловского распределения электронов по скоростям, когда

$$f_0(V) = \frac{N}{\sqrt{2\pi}V_T} \exp\left(-\frac{V^2}{2V_T^2}\right). \quad (16)$$

Соответственно этому формула (15) дает

$$\varepsilon_l(\omega, k) = 1 + \frac{1}{k^2 r_{De}^2} \times$$
$$\times\left[1 - \frac{\omega}{\sqrt{\pi}} \int dx e^{-x^2} \frac{P}{\omega - \sqrt{2} k V_T x} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{kV_T} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 V_T^2}\right)\right]. \quad (17)$$

Здесь $V_T = \sqrt{\kappa T / m}$ — тепловая скорость электронов, $r_{De} = \sqrt{\kappa T / 4\pi e^2 N}$ — электронный дебаевский радиус, κ — постоянная Больцмана, T — температура электронов. В интересовавшем Ландау пределе длинных волн выполняется условие

$$2k^2 V_T^2 \ll \omega^2. \quad (18)$$

Тогда, согласно (17), приближенно имеем

$$\varepsilon_l(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}\left(1 + \frac{3k^2 V_T^2}{\omega^2}\right) +$$
$$+ i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{kV_T\left(k^2 r_{De}^2\right)} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 V_T^2}\right). \quad (19)$$

Записанная здесь сравнительно простая формула позволяет видеть в ней не только относящееся к действительной оси условие Imω = 0, но и аналитическое продолжение на комплексную плоскость ω. Ситуация подобна той, которая оказалась выше при рассмотрении формулы (12), полученной в верхней полуплоскости ω, но послужившей аналитическим продолжением на всю плоскость ω. Отличие же случая формулы (19) заключается в том, что из-за условия (18) она осуществляет аналитическое продолжение на сравнительно небольшую область |Imω| << |Reω|. Именно в такой области, согласно работе [1], после подстановки (19) в дисперсионное уравнение (9) возникает известное решение

$$(\mathrm{Re}\,\omega)^2 = \omega_{Le}^2\left(1 + 3k^2 r_{De}^2\right), \qquad (20)$$

$$\gamma = -\,\mathrm{Im}\,\omega = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\frac{\omega_{Le}}{k^3 r_{De}^3}\exp\left(-\frac{1}{2k^2 r_{Dt}^2} - \frac{3}{2}\right). \qquad (21)$$

Заключение

Рассмотренные примеры двух электронных распределений позволили увидеть конструктивную роль аналитического продолжения приближенного выражения (19) с действительной оси на область комплексной ω.

Таким образом, достаточный способ, в том числе и для численного вычисления бесстолкновительного декремента затухания плазменных волн, указан в [1] на пути использования там контура рис. 2, когда вычислялся декремент больший частоты. В этой связи думается, что стоило бы именовать контуром Ландау контур рис. 2 (и эквивалентные ему аналоги). Однако при этом возникает вопрос о вычислении согласно рис. 2 интеграла по действительной оси, что может быть не всегда просто в аналитической форме (в отличие от задачи IV.2 в [5]), но не в рамках использования численных методов. С другой стороны, использование контура рис. 2 в работе [1] следует рассматривать как простой путь для получения аналитического продолжения приближенного выражения комплексной диэлектрической проницаемости ω.

В то же время следует отметить, что имеются такие задачи в теории плазмы, решение которых основывается на использовании контура Ландау рис. 1, отвечающего задаче Сохоцкого. Среди них — теория квазистационарной турбулентности плазмы. Так, например, работы [10—14], посвященные квазистационарной теории ионно-звуковой турбулентности (ИЗТ), основываются на уравнении равенства нулю декремента (или, что то же самое в этом случае, инкремента) ионно-звуковой неустойчивости. Это отвечает, в свете вышеизложенного, приближению чисто действительных частот нелинейно взаимодействующих волн. Именно последнее отвечает необходимости использования в теории ИЗТ контура рис. 1. Нечто подобное, повидимому, предчувствовал Ландау, когда говорил, что его работа [1] относится к теории устойчивой плазмы.

Выражаю признательность В. В. Арсенину за поддержку в параллельном подходе к пониманию работы Л. Д. Ландау. За изготовление рисунков приношу благодарность Т. В. Силиной.

Литература

1. *Ландау Л. Д.* // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. С. 25.
2. *Власов А. А.* // Там же. 1938. Т. 8. С. 291.
3. *Гольдман И. И.* // Там же. 1947. Т. 17. С. 681.
4. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика. — М.: Наука, 1979.
5. *Силин В. П.* Введение в кинетическую теорию газов. — М.: Наука, 1971.
6. *Сохоцкий Ю. В.* Об определенных интегралах и функциях, употребляемых при разложении в ряды. — С.-Петербург, 1873.
7. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. — М.: ГИФМЛ, 1963.
8. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи теории упругости. — М.: Наука, 1966.
9. *Plemelj J.* // Monath. Math. Phys. 1908. XIX Jahrgang. S. 205.
10. *Быченков В. Ю., Силин В. П.* // ЖЭТФ. 1982. Т. 82. С. 1886.
11. *Силин В. П., Урюпин С. А.* // Там же. 1992. Т. 102. С. 78.
12. *Силин В. П., Силин П. В.* // Краткие сообщения по физике ФИАН. 2011. №. 1. С. 3.
13. *Силин В. П.* // Физика плазмы. 2011. Т. 37. С. 489.
14. *Silin V. P.* // Ukr. J. Phys. 2012. V. 57. No. 3. P. 322.

Landau damping of plasma waves

V. P. Silin
Physical Institute named after P. N. Lebedev
53 Leninskij prospekt, Moscow, 119991, Russia
E-mail: silin@sci.lebedev.ru

It is discussed the understanding of the Landau theory of the wave damping of plasmas without collisions. We present arguments for the necessity to understand in such theory as a Landau contour only one contour among two of such counters which were used formerly in the original Landau paper. But this contour is not that is such widely named as Landau contour. For the other contour which is analogous to Sohotskii contour we find the place in the approximate analytic theory of the collisionless damping of plasma waves only when such contour permits to obtain the necessary analytic continuation and besides it in the quasistationary theory of the ion acoustic turbulence.

PACS: 52.35.-g

Keywords: Landau contours, plasma waves, Landau damping, Sohotskii—Plemelj formulae.

Bibliography — 14 references. *Received June 10, 2012*