

УДК 681.7

## Об эффективности алгоритмов решения уравнений движения в системах формирования винтовых электронных пучков

В. Н. Мануилов, Э. Т. Юсупов

*Проведено сравнение точности различных численных схем решения уравнений движения в ситуациях, типичных для систем формирования винтовых электронных пучков с большим питч-фактором, когда захваченные в адиабатическую ловушку частицы совершают сотни и тысячи оборотов по ларморовской окружности, и необходимо точное вычисление фазы колебательного движения частиц. Проанализированы такие широко известные методы как метод Бориса, Адамса—Баифорта и различные варианты метода Рунге—Кутты 4, 5 и 7-го порядков. Показано, что при анализе движения частиц длительностью сотни и тысячи периодов циклотронной частоты с ошибкой вычисления фазы осцилляторного движения порядка 0,1 % от периода гирочастоты наиболее экономичным оказывается метод Рунге—Кутты 4-го порядка в модификации правила "3/8", обеспечивающий указанную точность уже при 15—20 шагах интегрирования на циклотронном периоде.*

PACS: 41.75.Fr, 41.85.Ct

*Ключевые слова:* гиротрон, скрещенные электрическое и магнитное поля, методы решения уравнений движения.

### Введение

При разработке методов и алгоритмов численного моделирования электронно-оптических систем мощных электронных СВЧ-приборов [1, 2] традиционно основные усилия исследователей сосредоточены на полевой части задачи. Считается, что разработано достаточно много эффективных методов решения уравнений движения (УД), а само решение указанных уравнений занимает относительно малую часть общего времени моделирования, и поэтому нет необходимости поиска новых алгоритмов решения УД или адаптации и сравнения эффективности различных существующих методов. Как правило, во многих пакетах прикладных программ используется либо метод Бориса [3], либо стандартный метод Рунге—Кутты 4-го порядка [4].

Такой подход оправдан при решении задач траекторного анализа пучка в двумерном статическом поле, когда число траекторий исчисляется десятками или сотнями, а "время жизни" частицы в электронно-оптической системе (ЭОС) не превышает ее времени однократного пролета до рабочего пространства прибора. Однако в последнее время

в связи с необходимостью получения все более качественных электронных пучков возникла необходимость анализировать во времени динамику процесса установления параметров электронного потока. Реализация такого подхода основана на PIC-методе [3], где число частиц возрастает, как минимум, до десятков и сотен тысяч, и время решения уравнений движения становится, как правило, сопоставимым или превышает время решения полевой части задачи, особенно при учете многопролетности движения частиц. Вследствие этого сопоставление экономичности различных алгоритмов решения уравнений движения при сложном характере движения частиц и большой протяженности электронной траектории, по-прежнему, остается актуальной задачей.

Наиболее остро указанная проблема стоит, в частности, в задаче моделирования процесса установления в винтовых электронных пучках (ВЭП) [5] гиротронов — наиболее мощных источников излучения миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов длин волн [6]. Это связано с тремя основными факторами. Во-первых, большим числом крупных частиц. Как правило, при анализе магнетронно-инжекторных пушек (МИП) гиротронов оно колеблется от 100 тыс. для сантиметрового диапазона длин волн до 500—900 тыс. и более при анализе систем миллиметрового диапазона [7]. Второй фактор — существенно большее время пребывания каждой частицы в ЭОС, чем в стати-

Мануилов Владимир Николаевич, профессор.  
Юсупов Эльдар Тагирович, студент.  
Нижегородский государственный университет.  
Россия, 603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.  
Тел. 8 (831) 462-32-65. E-mail: manuulov@rf.unn.ru

Статья поступила в редакцию 15 апреля 2012 г.

© Мануилов В. Н., Юсупов Э. Т., 2012

ческих задачах, особенно для частиц, отразившихся от магнитного зеркала [8]. Оно составляет несколько сотен периодов циклотронной частоты, поскольку такие частицы совершают, по крайней мере, несколько продольных колебаний в адиабатической ловушке гиротрона. Наконец, в отличие от статических задач, при нестационарном анализе резко возрастают требования к точности вычисления фазы колебаний отраженных частиц в любой момент времени. Последнее обстоятельство связано с тем, что в процессе накопления частиц в ловушке очень важную роль играет вторичная эмиссия [8]. Вторичные электроны, как правило, увеличивают величину захваченного заряда в 2—4 раза [8]. Очевидно, возможность попасть на катод или "промахнуться" мимо его поверхности для захваченного электрона зависит от того, в какой фазе (восходящей или нисходящей) он окажется в момент подлета к поверхности эмиттера. От фазы зависит и место попадания частицы на катод. В то же время известно, что вероятность захвата вторичной частицы в ловушку существенно зависит от места ее старта: чем меньше магнитное поле в точке старта, тем выше вероятность захвата [8].

В настоящее время в программе нестационарного анализа ВЭП [7, 8] используется хорошо зарекомендовавший себя в статических задачах метод Адамса—Башфорта 4-го порядка. Однако даже при анализе систем формирования гиротронов сантиметрового диапазона время моделирования одного варианта оказывается порядка нескольких суток на компьютере с тактовой частотой 2—3 ГГц. Для гиротронов миллиметрового диапазона это время увеличивается еще почти на порядок. Все перечисленные выше факторы приводят к необходимости поиска среди ряда широко известных алгоритмов решения уравнений движения тех, которые при указанных выше особенностях поведения захваченных частиц позволяют проводить расчеты за приемлемое время.

Отметим, что подавляющее большинство современных ЭОС используют комбинированные электрические и магнитные поля для формирования и последующей транспортировки электронных пучков. Поэтому представленные ниже результаты представляют интерес для разработчиков не только гиротронов, но и ряда других систем со сложными конфигурациями электрических и магнитных полей в области формирования, особенно при расчете трехмерных задач, где необходимое для моделирования число электронных траекторий возрастает по сравнению с двумерным случаем примерно на 1—2 порядка.

### Описание тестовой задачи и результатов расчетов

Сравнительную оценку экономичности алгоритмов решения УД целесообразно проводить на задаче, имеющей аналитическое решение и в то же время отражающей основные особенности движения частиц при их захвате в адиабатическую ловушку МИП гиротрона. Поэтому ниже, в качестве модельной, рассмотрена задача о нерелятивистском движении электрона в плоском конденсаторе с поперечным к плоскости чертежа однородным магнитным полем (случай скрещенных однородных электрического и магнитного полей при нулевой начальной скорости частицы (рис. 1)). Как известно, при таких начальных условиях движение электрона происходит по циклоиде. Достоинством рассмотренной тестовой задачи является также ее "неудобство" для численных методов, поскольку в конце каждого циклотронного периода полная скорость частицы обращается в ноль. Как правило, численные алгоритмы "не любят" такие ситуации.

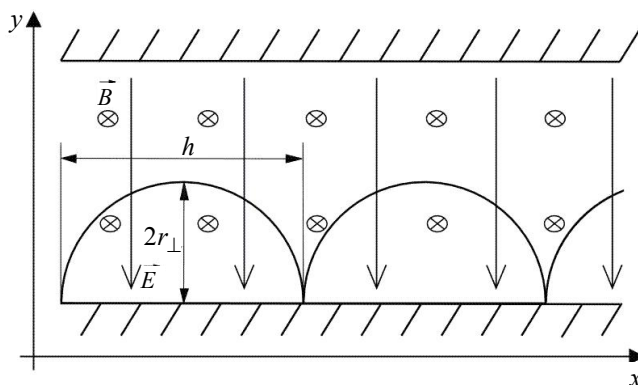


Рис. 1. Конфигурация тестовой задачи

Численные расчеты процесса захвата электронов в адиабатическую ловушку [7, 8] показывают, что типичное время удержания электронов в ловушке составляет порядка 3—5 периодов продольных колебаний в ловушке. Согласно данным траекторного анализа МИП гиротронов миллиметрового диапазона длин волн [9] в рамках статической модели пучка, электрон на своем пути от пушки до рабочего пространства совершает, примерно, 100 оборотов по ларморовской окружности. Таким образом, среднее время жизни захваченных частиц в ловушке близко к 1000 периодов циклотронной частоты. Поэтому для сравнительной оценки точности и эффективности различных методов интегрирования УД вычислялась ошибка расчета фазы колебательного движения частицы и радиуса вращения электрона  $r_{\perp}$ , накапливающаяся за время, равное 1000 периодам циклотронной частоты при разной величине  $N$  ( $N = 5—50$ ) числа

шагов, укладываемых на циклотронном периоде  $T_c$ . Сравнивались между собой 7 алгоритмов решения уравнений движения, а именно, хорошо известный метод Бориса [3, стр. 141—144], метод Адамса—Башфорта 4-го порядка [4, стр. 325] и 5 вариантов метода Рунге—Кутты: классический метод 4-го порядка [4, стр. 144], метод 4-го порядка с правилом "3/8" [4, стр. 144], метод Мерсона 4-го порядка [4, стр. 180], методы Дорманда—Принса 5-го порядка [4, стр. 182] и Фельберга 7-го порядка [4, стр. 207]. Расчеты проводились с двойной точностью, соответствующие алгоритмы были реализованы на языке C++.

С аналитическим решением сравнивались положения точек минимума электронной траектории (точек останова частицы, где ее полная скорость обращается в ноль) и величин радиусов вращения при различном  $N$  (табл. 1—4 в Приложении и рис. 2—4). Первая величина позволяет судить о точности определения фазы колебаний частиц, вторая — скорости. Сравнение проводилось на временном интервале между 1000 и 1005 периодами колебаний частиц. Рассматривались величины  $N = 5, 10, 20$  и  $50$  (более высокие значения  $N$ , согласно оценкам, приводят уже к слишком большому времени численного счета при моделировании реальных ЭОС гиротронов по РИС-методике, а в рассмотренной тестовой задаче уже и так дают достаточно высокую точность, при которой результаты всех рассмотренных методов практически совпадают).

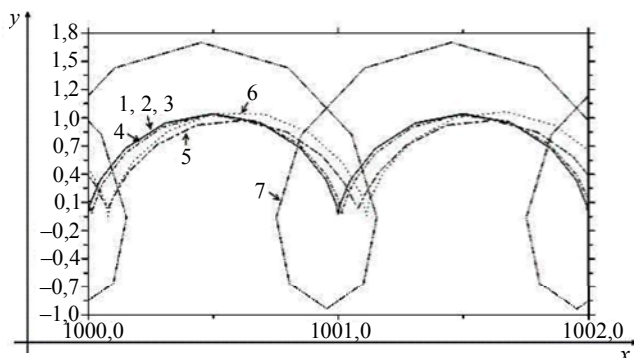


Рис. 2. Электронные траектории при  $N = 10$ .

Сплошная линия — аналитическое решение (1) (с ним практически совпадают также кривые для методов Дорманда—Принса (2) и Фельберга (3)); штрих-пунктирная линия рядом со сплошной — метод Рунге—Кутты 4-го порядка по правилу "3/8" (4); пунктирная линия — классический метод Рунге—Кутты (5); точечная линия — метод Бориса (6); штрих-пунктирная линия с двумя точками — метод Адамса—Башфорта (7)

Наихудшие результаты дает метод Адамса—Башфорта. При  $N = 10$  и  $20$  даже радиус вращения частиц, по крайней мере, в 1,5 раза больше точно аналитического значения (см. табл. 2 и 3). По-

грешность в радиусе уменьшается до 10 % лишь при  $N = 50$ . В то же время фазы точек минимума указанный метод вычисляет достаточно точно: не хуже 1 % от  $T_c$  даже при  $N = 20$ . Метод Бориса определяет радиус вращения гораздо точнее: не хуже 5 % даже при  $N = 10$ . Однако точность определения фазы остается низкой (порядка трети периода  $T_c$ ) даже при  $N = 50$ . Таким образом, оба метода нельзя признать пригодными для разработки экономических алгоритмов динамического анализа ВЭП.

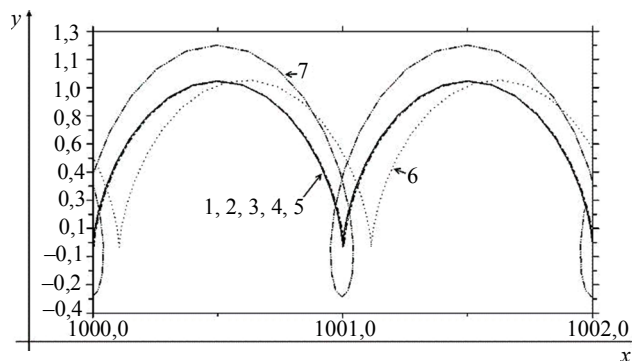


Рис. 3. Электронные траектории при  $N = 20$

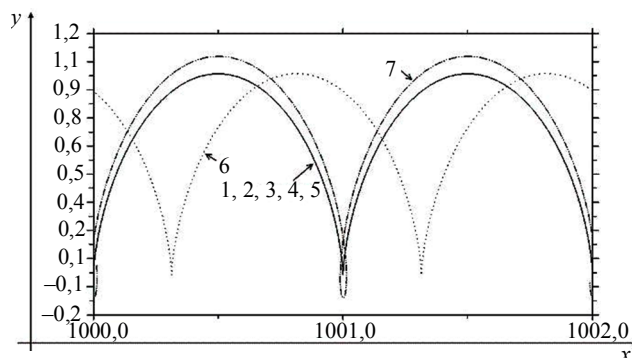


Рис. 4. Электронные траектории при  $N = 50$ . Указаны только кривые для методов Бориса и Адамса—Башфорта, поскольку остальные дают результаты, графически совпадающие с аналитическим решением

Среди различных вариантов метода Рунге—Кутты наименьшей точностью обладает классический метод 4-го порядка. При  $N = 10$  точность определения как радиуса вращения, так и фазы оказывается около 10 %. Интересно отметить, что метод 4-го порядка, но модифицированный по правилу "3/8", дает примерно на порядок более высокую точность при том же  $N$ . При  $N = 20$  и более уже все варианты метода Рунге—Кутты дают точность не хуже 1 %. Если же  $N$  уменьшить до  $N = 5$ , то методы 4-го порядка дают погрешность в фазе около  $1/3 T_c$  и в  $r_{\perp}$  до 50 %. В то же время методы 5-го и 7-го порядков имеют погрешность по радиусу 10 %, а по фазе — 5 %.

Табличные данные иллюстрируются рис. 2—4, где приведены электронные траектории, вычисленные разными методами. Координаты  $x$  и  $y$  нормированы соответственно на шаг электронной траектории и диаметр ларморовской орбиты электрона.

Таким образом, проведенные модельные численные эксперименты позволяют сделать вывод, что наиболее перспективным представляется метод Рунге—Кутты 4-го порядка, модифицированный по правилу "3/8". Он требует такого же числа обращений к правой части, как стандартный метод Рунге—Кутты, и в то же время при  $N > 10$ —15 мало уступает по точности методу Дорманда—Принса 5-го порядка и наиболее точному методу Фельберга. Важно отметить, что, согласно [4], метод Дорманда—Принса требует уже 7 обращений к правой части, а метод Фельберга — 11 вместо 4 в правиле "3/8".

Меньшие значения  $N$  ( $N < 10$ —15), когда высокую точность сохраняют только методы Дорманда—Принса и Фельберга, использовать нецелесообразно, поскольку, согласно оценкам, при этом будет недостаточно точно вычисляться распределение пространственного заряда в ячейках сетки пространственного заряда. Очевидно, что для достаточно адекватного описания распределения кулоновского поля пучка, на диаметре ларморовской окружности должно укладываться хотя бы 5—10 шагов сетки, а частица за один шаг должна смещаться на расстояние, не превышающее шага сетки. Отсюда легко оценить, что в практических задачах численного моделирования ВЭП необходимо использовать  $N \geq 10$ —20.

Более высокая эффективность метода Рунге—Кутты в модификации "3/8", по-видимому, вызвана более равномерным распределением пробных точек по независимой координате внутри интервала интегрирования длиной  $dt$  (0, 1/2, 1/2, 1 от величины  $dt$  в классическом методе и 0, 1/3, 2/3, 1 в модификации "3/8" — см. [4, стр. 144]) и более полным учетом результатов оценок приращений функции на пробных шагах (классический метод Рунге—Кутты использует значение приращения только на последнем из предыдущих шагов, в то время как правило "3/8" — со всех предыдущих шагов — см. [4, стр. 144]).

Предварительные оценки показывают, что реализация метода Рунге—Кутты в модификации "3/8" вместо метода Адамса—Башфорта в программе динамического анализа ВЭП при той же точности расчета величины захваченного заряда

может снизить время моделирования, примерно, на порядок, что открывает возможность анализа динамики переходных процессов в МИП гиротронов миллиметрового диапазона длин волн.

## Заключение

Проведенные тестовые расчеты показывают, что при решении уравнений движения электронов в системе с комбинированными электрическим и магнитным полями, в которых частицы совершают десятки и сотни оборотов по ларморовской окружности, и в то же время необходимо точное вычисление фазы колебательного движения частиц и радиуса вращения, методы Бориса и Адамса—Башфорта дают низкую точность при малом числе временных шагов на циклотронном периоде. Существенно более экономичными оказываются методы Рунге—Кутты, особенно вариант метода 4-го порядка по правилу "3/8", сочетающий в себе малое число обращений к правой части уравнения движения с малой ошибкой расчета фазы и радиуса вращения.

*Авторы благодарны В. А. Вишневому, В. Н. Корниенко, М. А. Монастырскому и В. М. Свешникову за многочисленные полезные дискуссии.*

## Литература

1. Молоковский С. И., Сушков А. Д. Интенсивные электронные и ионные пучки. — Л.: Энергия, Ленингр. отд., 1972.
2. Ильин В. П. Численные методы решения задач электрооптики. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд., 1974.
3. Хокни Р., Иствуд Дж. Численное моделирование методом частиц/Пер. с англ. — М.: Мир, 1987.
4. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений/Нежесткие задачи/Пер. с англ. — М.: Мир, 1990.
5. Цимринг Ш. Е. Формирование винтовых электронных пучков. В кн.: Лекции по электронике СВЧ (3-я зимняя школа-семинар для инженеров). Кн. 4. — Саратов: СГУ, 1974.
6. Гапонов-Грехов А. В., Петелин М. И. Мазеры на циклотронном резонансе. В кн.: Наука и человечество. — М., 1980.
7. Кривошеев П. В., Мануилов В. Н. // Прикладная физика. 2002. № 3. С. 80.
8. Мануилов В. Н. // Известия вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49. № 10. С. 872.
9. Запелов В. Е., Куфтин А. Н., Лыгин В. К., Цимринг Ш. Е. // Известия вузов. Радиофизика. 1992. Т. 35. № 11—12. С. 999.

## Приложение

Результаты вычисления погрешности фазы  $\Delta\phi$  и радиуса вращения  $r_{\perp}$  для различных методов решения УД.  $T_c$  — период циклотронной частоты,  $r_{\perp 0}$  — точное значение радиуса вращения,  $N$  — число шагов на один период циклотронной частоты.

Таблица 1

Результаты вычисления  $\Delta\phi$  и  $r_{\perp}$  при  $N = 5$ 

Метод решения	$\Delta\phi/T_c, \%$	$r_{\perp}/r_{\perp 0}, \%$
Адамса—Башфорга	18,92	217,36
Бориса	31,02	8,19
Классический метод Рунге—Кутты 4-го порядка	19,87	49,05
Метод Рунге—Кутты 4-го порядка по правилу "3/8"	22,37	23,09
Метод Мерсона	39,25	44,79
Метод Дорманда—Принса	1,25	9,32
Метод Фельберга	0,00	11,47

Таблица 3

Результаты вычисления  $\Delta\phi$  и  $r_{\perp}$  при  $N = 20$ 

Метод решения	$\Delta\phi/T_c, \%$	$r_{\perp}/r_{\perp 0}, \%$
Адамса—Башфорга	0,34	21,64
Бориса	11,41	0,57
Классический метод Рунге—Кутты 4-го порядка	0,50	0,23
Метод Рунге—Кутты 4-го порядка по правилу "3/8"	0,10	0,28
Метод Мерсона	0,29	0,12
Метод Дорманда—Принса	0,00	0,00
Метод Фельберга	0,00	0,00

Таблица 2

Результаты вычисления  $\Delta\phi$  и  $r_{\perp}$  при  $N = 10$ 

Метод решения	$\Delta\phi/T_c, \%$	$r_{\perp}/r_{\perp 0}, \%$
Адамса—Башфорга	4,66	70,69
Бориса	11,25	1,96
Классический метод Рунге—Кутты 4-го порядка	8,13	6,58
Метод Рунге—Кутты 4-го порядка по правилу "3/8"	1,55	1,10
Метод Мерсона	4,11	5,25
Метод Дорманда—Принса	0,02	0,12
Метод Фельберга	0,00	0,04

Таблица 4

Результаты вычисления  $\Delta\phi$  и  $r_{\perp}$  при  $N = 50$ 

Метод решения	$\Delta\phi/T_c, \%$	$r_{\perp}/r_{\perp 0}, \%$
Адамса—Башфорга	0,15	8,69
Бориса	31,46	0,07
Классический метод Рунге—Кутты 4-го порядка	0,02	0,00
Метод Рунге—Кутты 4-го порядка по правилу "3/8"	0,01	0,00
Метод Мерсона	0,01	0,01
Метод Дорманда—Принса	0,00	0,00
Метод Фельберга	0,00	0,00

## Efficiency of numerical algorithms for solving particle motion equations in the formation systems of helical electron beams

V. N. Manuilov, E. T. Yusupov  
Nizhny Novgorod State University,  
23 Gagarin av., Nizhny Novgorod, 603950, Russia  
E-mail: manuilov@rf.unn.ru

*The comparison of the accuracy provided by different numerical algorithms for solving the electron motion equations is performed. The typical for the gyrotron helical electron beams with high pitch-factor case, when particles perform hundreds or thousands turns and at the same time it is necessary to find the phase of the oscillatory motion with high accuracy about 0.1 %, is considered. Such well known methods as Boris method, Adams—Bashford one and different versions of Runge—Kutta method of 4, 5 and 7-th orders are considered. It is shown that for the case when the time interval of particle motion exceeds some hundreds of cyclotron period, the most preferable approach is the so-called 4-th order Runge—Kutta method with the "rule 3/8", which provides the mentioned above accuracy even when the number of steps on the cyclotron period is 15—20 only.*

PACS: 41.75.Fr, 41.85.Ct

*Keywords:* gyrotron, crossed electric and magnetic fields, numerical methods to solve the particle motion equations.

Bibliography — 9 references.

Received April 15, 2012

\* \* \*