

УДК 537.86(075.8)

Дифракция сфокусированного волнового пучка

А. В. Белорозов, А. С. Кудряшов, Н. Д. Наумов

Получено аналитическое выражение для оценки амплитуды поля сфокусированного волнового пучка на основе метода параболического уравнения. Проведено сравнение с результатами измерений плотности потока энергии в пучке миллиметровых волн при небольшом смещении малого зеркала в антенне Кассегрена.

PACS: 42.25.Bs

Ключевые слова: параболическое уравнение, волновой пучок, дифракция, антенна, фокусировка.

Введение

В настоящее время фокусирование волн широко применяется для решения различных научных и технических задач. Существующий методический аппарат ориентирован на расчет характеристик сходящихся волновых фронтов для оценки коэффициента усиления фокусирующих систем [1]. Что касается самих сфокусированных волновых пучков, то здесь аналитические результаты для амплитуды поля известны только в случае гауссовых пучков [2].

Характерной особенностью сфокусированного волнового пучка является наличие области "перетяжки", где происходит уменьшение поперечных размеров пучка и, соответственно, увеличивается плотность потока энергии. Аналитическая модель гауссова пучка позволяет оценить параметры пучка в этой области. Однако на практике излучающая система имеет конечные размеры апертуры, тогда как в модели гауссова пучка используется некоторое характерное значение начального радиуса пучка. В связи с этим возникает вопрос о влиянии конечных размеров апертуры на дифракцию сфокусированного волнового пучка. Для ответа на этот вопрос необходимо построить другую модель сфокусированного пучка, что и является целью данной работы.

Уравнение распространения звукового пучка

Распространение звуковых волн в слабопоглощающей среде описывается следующим уравнением [2]:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + q \frac{\partial}{\partial t} \Delta\varphi = 0, \quad (1)$$

где φ — звуковой потенциал, s — скорость звука,

$$q = \frac{1}{\rho s^2} \left[\chi + \frac{4}{3} \zeta + \kappa \left(\frac{1}{c_p} - \frac{1}{c_V} \right) \right],$$

где ρ — плотность среды;

χ, ζ — коэффициенты вязкости;

κ — коэффициент теплопроводности.

Для монохроматического излучения звуковой потенциал имеет следующий вид:

$$\varphi = \psi(x, y, z) e^{-i\omega t}.$$

В этом случае из уравнения (1) для функции ψ получим:

$$(1 - ip)\Delta\psi + k^2\psi = 0, \quad (2)$$

где $p = \omega q, k = \omega/s$ — волновой вектор.

Пусть звуковой пучок распространяется вдоль оси Oz . Тогда решение уравнения (2) следует искать в следующем виде: $\psi = A(x, y, z) e^{ikz}$. Если длина волны значительно меньше радиуса апертуры, то волновой пучок имеет узкий угловой спектр. Тогда для комплексной амплитуды A выполняется условие:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \ll 2ik \frac{\partial A}{\partial z}. \quad (3)$$

С учетом этого условия для аксиально-симметричного пучка из (2) найдем:

$$2ik \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{ipk^2}{1-ip} A = 0.$$

Учитывая, что в слабопоглощающей среде $p \ll 1$, в итоге для амплитуды звукового пучка получим уравнение параболического типа с мнимым коэффициентом диффузии:

Белорозов Алексей Владимирович, научный сотрудник.
 Кудряшов Алексей Сергеевич, начальник управления.
 Наумов Николай Дмитриевич, ведущий научный сотрудник.
 ФГУ "12 ЦНИИ МО РФ".
 Россия, 141300, Московская обл., г. Сергиев Посад-7.
 Тел. (495) 993-09-62. E-mail: lynx07@yandex.ru
 Статья поступила в редакцию 22 декабря 2011 г.
 © Белорозов А. В., Кудряшов А. С., Наумов Н. Д., 2012

$$2ik \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + 2i\gamma k A = 0, \quad (4)$$

где $\gamma = kp/2$ — коэффициент ослабления звуковой волны [3].

Пучок электромагнитных волн

Уравнение (4) может быть использовано и для описания распространения пучка электромагнитных волн в слабопоглощающей среде, т. е. когда для комплексной диэлектрической проницаемости среды $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$ выполняется условие $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1$. Действительно, в этом случае решение уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} u = 0$$

следует искать в виде $u = A(x, y, z)e^{ikz}$, где $k = \omega\sqrt{\varepsilon_1}/c$. Тогда при выполнении условия (3) для A снова получится уравнение (4), где теперь $\gamma = \omega\varepsilon_2/(2c\sqrt{\varepsilon_1})$. Отметим, что именно такое значение γ получается при $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1$ из известного выражения для коэффициента поглощения электромагнитной волны в среде [4]:

$$\mu = \frac{\omega}{c} \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} - \varepsilon_1 \right) \right]^{1/2}.$$

Если ввести функцию $B = Ae^{\gamma z}$, то для этой функции из (4) получается более простое уравнение:

$$2ik \frac{\partial B}{\partial z} + \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial r} = 0. \quad (5)$$

Влияние дифракции на распространение волнового пучка характеризуется параметром $L = \pi a^2/\lambda$, где a — радиус апертуры, λ — длина волны. Чтобы пучок был сходящимся, он должен иметь искривленный волновой фронт, т. е.

$$A(r, 0) = A_0 H(1 - \xi) \exp\left(-i\xi^2 \frac{L}{R}\right), \quad (6)$$

где $H(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда, $\xi = r/a$, R — начальный радиус кривизны волнового фронта.

Амплитуда поля

Используя известное выражение для функции Грина рассматриваемой краевой задачи [2], реше-

ние уравнения (5) можно записать в следующем виде:

$$B = -2\alpha A_0 \exp(\alpha \xi^2) \int_0^1 \exp(\sigma t^2) J_0(\beta t) dt. \quad (7)$$

Здесь $J_0(x)$ — функция Бесселя, а также введены обозначения:

$$\alpha = \frac{i}{\eta}, \quad \eta = \frac{z}{L}, \quad \beta = 2 \frac{\xi}{\eta}, \quad \sigma = \alpha \theta, \quad \theta = 1 - \frac{z}{R}.$$

Функцию Бесселя при значениях аргумента $|x| \leq 3$ с достаточно высокой степенью точности можно аппроксимировать полиномом:

$$J_0(x) = 1 + \sum_{m=1}^6 a_m x^{2m} + \varepsilon,$$

где $|\varepsilon| < 5 \cdot 10^{-8}$; значения коэффициентов a_m указаны в [5] и здесь для краткости не приводятся. Используя эту аппроксимацию, можно вычислить интеграл, фигурирующий в выражении (7). В итоге для комплексной амплитуды волны найдем:

$$A(r, z) = \frac{A_0}{\theta} \exp(\alpha \xi^2 - \gamma z) \cdot \{1 + F(0) - e^\sigma [1 + F(1)]\}, \quad (8)$$

где функция $F(x)$ имеет следующий вид:

$$F(x) = \sum_{k=0}^6 \left(\frac{i\eta}{\theta}\right)^k \frac{d^k}{dx^k} P(x), \quad P(x) = \sum_{m=1}^6 b_m x^{2m},$$

$$b_m = a_m \beta^{2m}.$$

Выражение (8) получено на основе аппроксимации функции Бесселя, поэтому оно применимо вблизи оси пучка. Результат с более широкой областью применимости можно получить, если последовательно применять для вычисления интеграла в (7) метод интегрирования по частям [6]. Это приводит к представлению амплитуды поля в виде функционального ряда:

$$A(r, z) = \frac{A_0}{\theta} \exp(\alpha \xi^2 - \gamma z) \left[e^{-\alpha \tau \xi} - e^\sigma (U_1 - iU_2) \right], \quad (9)$$

$$\tau = \frac{\xi}{\theta}, \quad U_1 = J_0(\beta) - \tau^2 J_2(\beta) + \tau^4 J_4(\beta) - \dots,$$

$$U_2 = \tau J_1(\beta) - \tau^3 J_3(\beta) + \tau^5 J_5(\beta) - \dots$$

Если пучок на выходе из апертуры имеет плоский волновой фронт, то $\theta = 1$. В этом случае выражение (9) переходит в известный результат для амплитуды поля поршневого излучателя, который

получается на основе приближенного вычисления интеграла Рэлея [7].

Распределение интенсивности излучения

Выражения (8), (9) позволяют получить пространственное распределение плотности потока энергии сфокусированного волнового пучка. Результат для оси пучка имеет более простой вид. Действительно, на оси пучка $\beta = 0$, поэтому $J_0(\beta t) = 1$, и вычисление интеграла в (7) не составляет труда:

$$A(0, z) = \frac{A_0}{\theta} (1 - e^\sigma) e^{-\gamma z}.$$

Отметим, что такой же результат получается из выражений (8), (9) при $\xi = 0$. Отсюда для распределения интенсивности излучения на оси сфокусированного пучка найдем:

$$I(0, z) = I_0 e^{-2\gamma z} \left(\frac{2}{0} \sin \frac{\theta}{2\eta} \right)^2, \tag{10}$$

где I_0 — значение интенсивности излучения на апертуре.

Более простой результат получается и для распределения интенсивности излучения в плоскости геометрического фокуса. С помощью метода интегрирования по частям из (7) можно найти выражение для амплитуды поля в виде другого функционального ряда:

$$A(r, z) = -\frac{A_0}{\xi} \exp(\alpha \xi^2 + \sigma - \gamma z) (V_1 + iV_2), \tag{11}$$

$$V_1 = \frac{1}{\tau} J_2(\beta) - \frac{1}{\tau^3} J_4(\beta) + \frac{1}{\tau^5} J_6(\beta) - \dots,$$

$$V_2 = J_1(\beta) - \frac{1}{\tau^2} J_3(\beta) + \frac{1}{\tau^4} J_5(\beta) - \dots$$

Из выражения (11) следует, что в плоскости, перпендикулярной оси пучка и проходящей через точку геометрического фокуса, отличным от нуля является только один член ряда. Поэтому для распределения интенсивности излучения в этой плоскости найдем:

$$I(r, R) = I_0 e^{-2\gamma R} \left[\frac{L}{R} \frac{2J_1(x)}{x} \right]^2, \tag{12}$$

где введено обозначение $x = 2\xi L/R$.

Сравнение с гауссовым пучком

Для сфокусированного гауссова пучка распределения интенсивности излучения на оси пучка и в плоскости геометрического фокуса описываются следующими выражениями [2]:

$$I_G(0, z) = e^{-2\gamma z} \frac{2I_0}{\theta^2 + \eta^2}, \tag{13}$$

$$I_G(r, R) = 2I_0 \left(\frac{L}{R} \right)^2 \exp\left(-2\gamma R - \frac{1}{2}x^2\right). \tag{14}$$

Как следует из выражений (12), (14), плотность потока энергии на оси гауссова пучка в точке геометрического фокуса $z = R$ вдвое превышает аналогичное значение в случае конечной апертуры:

$$I_G(0, R) = 2I(0, R), I(0, R) = I_0 \left(\frac{L}{R} \right)^2 \exp(-2\gamma R).$$

Это обусловлено тем, что сравниваются пучки с одинаковым потоком энергии, поэтому выбраны такие параметры гауссова пучка, чтобы выполнялось условие

$$2\pi \int_0^\infty I_G(r, R) r dr = 2\pi \int_0^\infty I(r, R) r dr = \pi a^2 I_0 e^{-2\gamma R}.$$

На рис. 1 проиллюстрировано распределение плотности потока энергии на оси гауссова пучка (кривая 1) и в случае конечной апертуры (кривая 2) для начальной кривизны волнового фронта $R = 0,5L$. Аналогичные результаты представлены на рис. 2 для $R = 0,25L$.

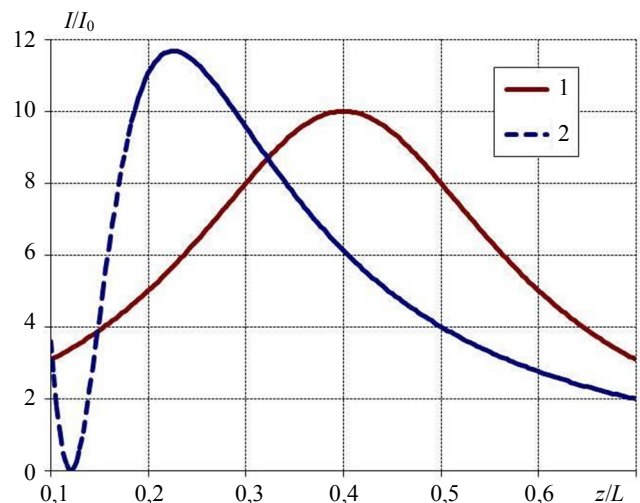


Рис. 1. Распределение плотности потока энергии на оси гауссова пучка (кривая 1) и в случае конечной апертуры (кривая 2) для начальной кривизны волнового фронта $R = 0,5L$ и без учета поглощения в среде

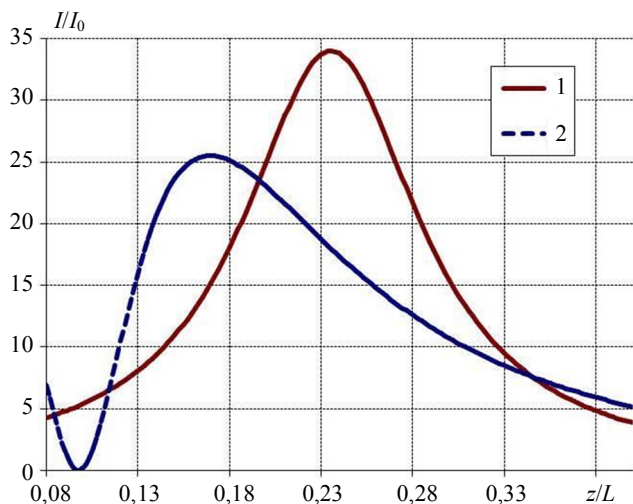


Рис. 2. Распределение плотности потока энергии на оси гауссова пучка (кривая 1) и в случае конечной апертуры (кривая 2) для начальной кривизны волнового фронта $R = 0,25L$ и без учета поглощения в среде

Из выражения (13) следует, что максимальное значение плотности потока энергии на оси гауссова пучка достигается в точке $z = z_m$, которая находится несколько ближе точки геометрического фокуса:

$$z_m = R \frac{L^2}{R^2 + L^2}.$$

Как видно из представленных графиков, в случае конечной апертуры точка максимального значения плотности потока энергии расположена еще дальше от точки геометрического фокуса.

Сравнение с результатами измерений

Были проведены измерения поперечного распределения плотности потока энергии в пучке электромагнитного излучения частоты 94 ГГц на расстоянии $z_1 = 0,43L$ от апертуры. Фокусировка этого пучка осуществлялась с помощью небольшого сдвига малого зеркала в антенне Кассегрена. Как показывают расчеты разницы хода лучей, возникающее при этом искривление начального волнового фронта можно аппроксимировать выражением (6) при $R = 0,08L$.

На рис. 3 представлены результаты измерений (кривая 1) и расчета интенсивности излучения на основе изложенной выше модели сфокусированного волнового пучка (кривая 2). Можно констатировать, что результаты расчета согласуются с экспериментальными данными.

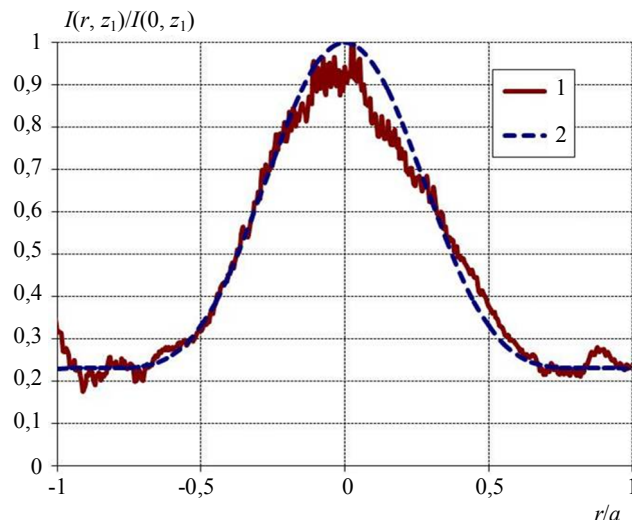


Рис. 3. Результаты измерений (кривая 1) и расчета (кривая 2) интенсивности излучения

Заключение

Полученные результаты показывают, что конечность размера апертуры a оказывает заметное влияние на степень фокусировки пучка, особенно при малых значениях отношения фокусного расстояния R к характерной дифракционной длине $L = \pi a^2/\lambda$. Поэтому модель сфокусированного гауссова пучка нельзя использовать для практической оценки интенсивности излучения в области "перетяжки" пучка.

Сравнение с экспериментальными данными, которое было проведено в данной работе, нельзя считать окончательным суждением об адекватности предлагаемой модели сфокусированного волнового пучка, так как эти данные не включают область фокусировки пучка. Задачей дальнейших исследований является проведение измерений характеристик поля в области "перетяжки" пучка для полноценной проверки изложенного выше описания дифракции сфокусированного волнового пучка.

Литература

1. Каневский И. Н. Фокусирование звуковых и ультразвуковых волн. — М.: Наука, 1977.
2. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. — М.: Наука, 1990.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. — М.: Наука, 1986.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982.
5. Справочник по специальным функциям/ Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. — М.: Наука, 1979.
6. Грей Э., Мэтьюз Г. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. — М.: ИЛ, 1953.
7. Лепендин Л. Ф. Акустика. — М.: Высшая школа, 1978.

Diffraction of the focused wave beam

A. V. Belorosov, A. S. Kudryashov, N. D. Naumov
12-th Central Research Institute
Sergiev Posad-7, Moscow region, 141300, Russia
E-mail: lynx07@yandex.ru

The analytical expression for the field amplitude of the focused wave beam is obtained. This result is compared with experimental data for the flux density of electromagnetic energy in the micro-wave beam.

PACS: 42.25.Bs

Keywords: parabolic equation, wave beam, diffraction, antenna, focusing.

Bibliography — 7 references.

Received December 22, 2011