

УДК 537.84

## Двухфазная трехмерная модель алюминиевого электролизера

Н. П. Савенкова, С. В. Анпилов, Р. Н. Кузьмин, О. Г. Проворова, Т. В. Пискажова

*Представлена новая трехмерная математическая модель алюминиевого электролизера, основанная на полной системе магнитной гидродинамики в двухфазном приближении для смеси двух жидкостей.*

PACS: 47.65.-d, 47.70.Fw, 52.30.Cv

*Ключевые слова:* магнитная гидродинамика, электролиз, численные методы, МГД-устойчивость.

### Введение

Предлагается разработанная трехмерная математическая модель алюминиевого электролизера, используемого в промышленности для производства алюминия, получаемого в результате разложения глинозема, растворенного в жидком криолите под действием тока (250 кА) при температуре 940 °С.

В работах [1, 2] рассматривалась двухмерная математическая модель промышленного алюминиевого электролизера. Результаты моделирования, полученные по этой модели, относились к некоторым средним слоям среды алюминия и среды криолита и достаточно точно отражали гидродинамические процессы, происходящие в электролизной ванне. Однако детальное исследование зависимости устойчивости протекания процесса электролиза алюминия от формы рабочего пространства (геометрии ванны) и различных режимов процесса управления электролизом невозможно без применения трехмерного математического моделирования.

В данной статье представлена новая трехмерная математическая модель алюминиевого электролизера, основанная на полной системе магнитной гидродинамики в двухфазном приближении для смеси двух жидкостей.

### Рабочая гипотеза модели. Математическая модель

В основе предлагаемой модели находится многофазный подход. Предполагается, что в каждом малом элементарном объеме  $\Delta V$  присутствует и алюминий, и криолит. При этом их смесь занимает объем целиком, а каждая из жидкостей — некоторую часть этого объема, а именно,  $\Delta V_1$  для алюминия и  $\Delta V_2$  для криолита.

Для каждой среды (компоненты смеси) вводится параметр  $\alpha_m$  — объемная доля фазы (или объемное содержание фазы):

$$\alpha_1 = \frac{\Delta V_1}{\Delta V}, \quad \alpha_2 = \frac{\Delta V_2}{\Delta V}, \quad (1)$$

при этом

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1. \quad (2)$$

Здесь и далее переменные с индексом  $m = 1$  относятся к среде алюминия, с индексом 2 — к среде криолита. Каждой среде приписывается собственное поле скоростей  $\mathbf{v}$ .

Основными неизвестными являются: скорость движения среды  $\mathbf{v}(u, v, w)$ ; объемные доли металла  $\alpha_1$  и криолита  $\alpha_2$ , давление  $p$ , напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}(H_x, H_y, H_z)$  и сила Лоренца  $\mathbf{f}(f_x, f_y, f_z)$ . Плотность, электропроводность и вязкость каждой из двух сред (компонент смеси) полагаются постоянными величинами.

Рассматриваемая математическая модель представляет собой систему уравнений магнитной гидродинамики [3] для несжимаемой смеси двух вязких жидкостей в приближении двухскоростного континуума с общим давлением.

Уравнение неразрывности для  $m$ -й фазы принимает вид [4—6]:

$$\frac{\partial \alpha_m}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_m \mathbf{v}_m) = \frac{M_{ml}}{\rho_m}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad (3)$$

Савенкова Надежда Петровна, ведущий научный сотрудник.  
 Анпилов Сергей Валерьевич, аспирант.  
 Кузьмин Рунар Николаевич, профессор.  
 Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова.  
 Россия, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы.  
 Тел. 8 (963) 977-38-43. E-mail: mkandrew@mail.ru  
 Проворова Ольга Геннадьевна, профессор.  
 Пискажова Татьяна Валерьевна, доцент.  
 Сибирский федеральный университет.  
 Россия, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79.  
 E-mail: Piskazhova@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 20 ноября 2011 г.

© Савенкова Н. П., Анпилов С. В., Кузьмин Р. Н., Проворова О. Г., Пискажова Т. В., 2012

где  $M_{ml} = -M_{lm}$  — массовая скорость превращения криолита в алюминий в процессе электролиза, отнесенная к единице объема;

$m, l$  — индексы фазы;

$\mathbf{v}_m$  — скорость  $m$ -й фазы.

Уравнение движения для  $m$ -й фазы выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_m \mathbf{v}_m}{\partial t} + (\mathbf{v}_m \nabla)(\alpha_m \mathbf{v}_m) = \alpha_m \frac{\nabla p}{\rho_m} - \alpha_m \mathbf{g} + \\ + \alpha_m \mu_m \frac{1}{\rho_m} \Delta \mathbf{v}_m + \frac{\mathbf{P}_{ml}}{\rho_m} + \mathbf{f}_m, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\mathbf{P}_{ml} = \alpha_m \alpha_l K (\mathbf{v}_m - \mathbf{v}_l), \quad \mathbf{f}_m = \frac{\mathbf{F}_e}{\rho_m}. \quad (5)$$

Уравнение индукции магнитного поля в рамках рабочей гипотезы модели имеет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] - \frac{1}{\sigma} \frac{c^2}{4\pi} \cdot \text{rot} [\nabla \times \mathbf{H}] - \frac{c}{\sigma} \text{rot} \mathbf{j}_0; \quad (6)$$

$$\text{div} \mathbf{H} = 0; \quad (7)$$

$$\mathbf{F}_e = \frac{1}{4\pi} [\text{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{H}]; \quad (8)$$

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2; \quad (9)$$

$$\sigma = \alpha_1 \sigma_1 + \alpha_2 \sigma_2.$$

Уравнения (3)—(5) описывают движение среды как смеси вязких несжимаемых жидкостей. Уравнения (6)—(9) описывают протекание через среду электрического тока и индуцирование им магнитного поля [3]. Электропроводность  $\sigma$  среды и вектор скорости  $\mathbf{v}$  в уравнении (6) вычисляются через объемные доли по формулам (9), в которых  $\sigma_{1,2}$  — постоянные коэффициенты электропроводимости металла и криолита, соответственно.

Условия на границе расчетной области приняты следующие:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_m|_{\Gamma} = 0, \quad \left. \frac{\partial \alpha_m}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma} = 0, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma} = 0, \quad m = \overline{1, 2}; \\ \left. \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Отличие предлагаемой модели от рассматривавшихся ранее, например, в [2, 7—13], состоит в том, что криолит и алюминий представляются не двумя слоями несмешивающихся жидкостей, а единой средой — смесью с переменными объем-

ными долями компонент смеси, разделяющихся за счет разности плотностей.

### Численный метод решения

Расчетная область покрывается регулярной трехмерной сеткой по пространству, по временной координате вводится неравномерная сетка:

$$\begin{aligned} \Omega = \{(x_i, y_j, z_k) | x_i = i \cdot \Delta x, y_j = j \cdot \Delta y, z_k = k \cdot \Delta z, \\ i = \overline{1, N_x}, j = \overline{1, N_y}, k = \overline{1, N_z}\}, \\ T = \{t_{n+1} = t_n + \Delta t_n, t_0 = 0, n = 0, 1, 2, \dots\}. \end{aligned}$$

Дискретные аналоги уравнений (3), (4), (6) строятся по методу конечных разностей согласно схеме "Кабаре" [14]. В исходной системе (3)—(6) нет уравнения, из которого можно было бы определить давление  $p$ , но оно может быть вычислено согласно алгоритму SIMPLER [15, 16].

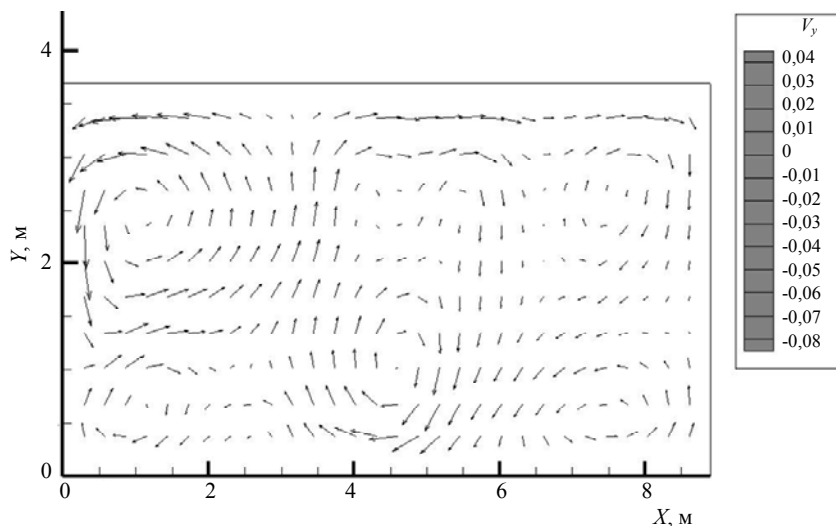
Для модельной задачи  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial F(\varphi)}{\partial x} = 0$  устойчивость схемы "Кабаре" достигается при числе Куранта от нуля до единицы, т. е. при  $0 < ct < h$ .

Экспериментально полученное условие устойчивости разработанного разностного метода:

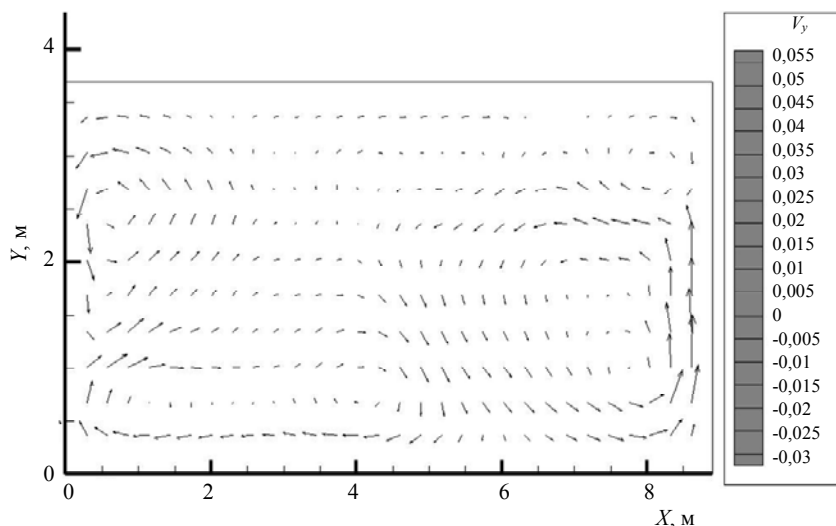
$$\tau_{n+1} < C \frac{\min(\Delta x, \Delta y, \Delta z)}{\max_{A \in \{\bar{V}_1, \bar{V}_2\}} \left( \max_{i,j} |A|_{i,j}^n, 1 \right)}. \quad (11)$$

### Результаты численного эксперимента по моделированию МГД-неустойчивости, возникающей при замене выгоревших анодов

Технология электролиза с обожженными анодами подразумевает периодическую замену анодов, в процессе чего могут происходить нежелательные возмущения среды, приводящие к снижению эффективности производства. При замене выгоревших анодных блоков, которые меняют парами по мере их выгорания, происходит перераспределение токов по анодам, что влечет за собой изменение конфигурации электромагнитного поля в металле и криолите, а значит, ведет к изменению величины электромагнитной силы, действующей в этих средах. Практика показывает, что часто нежелательные колебания возникают при извлечении двух крайних анодов. Проведен численный эксперимент, моделирующий извлечение 7- и 14-го анода в ванне с 14-ю анодами. В качестве начальных данных были использованы экспериментальные данные; распределение скоростей в обеих средах в начальный момент времени приведено на рис. 1 и 2.



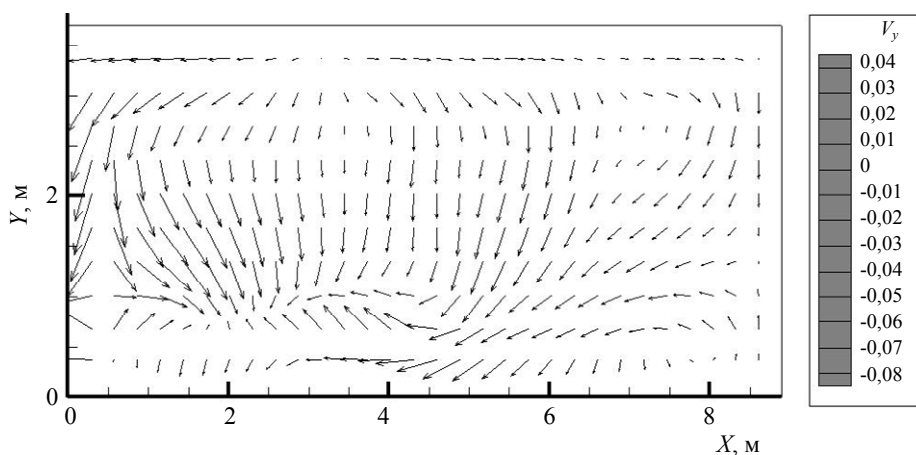
**Рис. 1.** Поле скоростей в среде криолита в начальный момент времени. Горизонтальный срез на высоте 16, 25 см. Ед. измерения — м/с



**Рис. 2.** Поле скоростей в среде алюминия в начальный момент времени. Горизонтальный срез на высоте 48,75 см. Ед. измерения — м/с

Расчет показал, что примерно через 0,3 с после выемки анодов наблюдается всплеск поверхности раздела, при котором модуляция поверхности раздела (МПР) становится равным 2 см, что меньше критического для данного электролизера. Однако затем амплитуда колебаний снижается до допус-

тимой величины. Толщина размытия границы раздела, обусловленная сделанными в начале предположениями, составляет приблизительно 0,1—0,15 см. На рис. 3 и 4 приведены поля скоростей в алюминии и криолите в момент, когда МПР достигает наименьшего значения.



**Рис. 3.** Поле скоростей в среде криолита в момент достижения наименьшего МПР. Горизонтальный срез на высоте 16,25 см. Ед. измерения — м/с

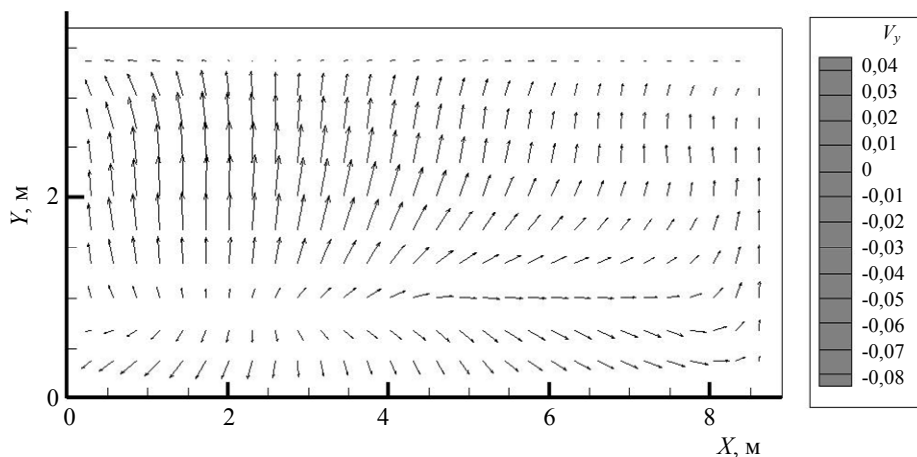


Рис. 4. Поле скоростей в среде алюминия в момент достижения наименьшего МПР. Горизонтальный срез на высоте 48,75 см. Ед. измерения — м/с

На рис. 5 изображена динамика максимальной высоты поверхности раздела. Расчеты показали, что при одновременном извлечении 7- и 14-го анода происходит резкое возрастание амплитуды ко-

лебаний. Это приводит к тому, что МПР становится меньше допустимого и свидетельствует о нарушении стабильности работы электролизера, подтверждаемой наблюдениями.

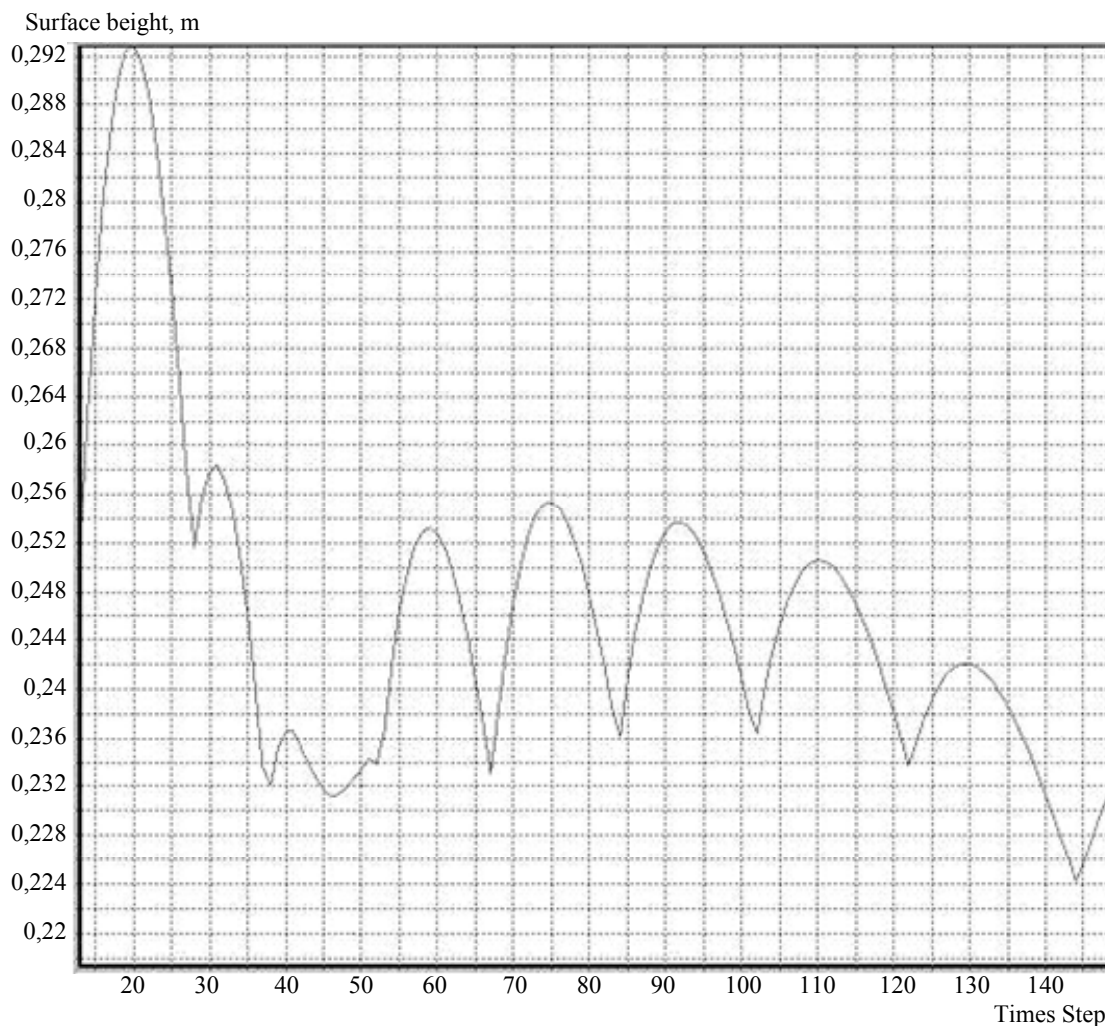


Рис. 5. Динамика МПР после извлечения 7- и 14-го анодов. Шаг по времени — 0,015 с

Таким образом, проведение предварительных расчетов по предложенной модели позволяет заранее делать прогноз о стабильности процесса электролиза при извлечении анодов из конкретного электролизера, не прибегая к дорогостоящим физическим экспериментам.

### Заключение

Разработана трехмерная двухфазная математическая модель промышленного алюминиевого электролизера с учетом реальной геометрии ванны. Предложен эффективный метод численного решения полной системы магнитной гидродинамики в переменных скорость — давление — объемная концентрация, в основе которого находится метод разделения по физическим процессам и конечно-разностный метод решения.

Показано, что предложенная модель позволяет проводить математический эксперимент по наблюдению работы ванны в случае возникновения большинства основных неполадок. При варьировании различных параметров, таких как последовательность замены анодов, форма и расположение анодов, конфигурация настывли, величины подводимых токов, возможно достижение повышения выхода по току и устранения неполадок в работе ванны. Это имеет большое практическое значение, так как может дать рекомендации по оптимизации технологического процесса электро-

лиза алюминия и служить повышению эффективности производства.

### Литература

1. Савенкова Н. П., Шобухов А. В., Анпилов С. В., Кузьмин Р. Н. // Прикладная физика. 2009. № 6. С. 43.
2. Алаторцев А. В., Кузьмин Р. Н., Проворова О. Г., Савенкова Н. П. // Там же. 2004. № 5. С. 33
3. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. — М.: Наука, 1980.
4. Нугматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. — М.: Наука, 1978.
5. Дорохов И. Н., Кафаров В. В., Нугматулин Р. И. // Прикладная математика и механика. 1975. Т. 39. № 3. С. 485.
6. Нугматулин Р. И. // Там же. 1971. Т. 35. № 3. С. 450.
7. Urata N., Mori K., Ikeuchi H. // Light Metals — Japan. 1976. P. 573.
8. Sele T. // Light Metals. 1977. P. 7—24.
9. Moreau R., Ewans J. W. // Jour. Electrochem. Soc. 1984. V. 131. No. 10. P. 2251.
10. Sneyd A. D., Wang A. // Jour. Fluid Mech. 1994. V. 263. P. 343.
11. Bojarevics V. V., Romerio M. V. // Eur. Jour. Mech. B / Fluids. 1994. V. 13. No. 1. P. 33.
12. Davidson P. A., Lindsay R. J. // Jour. Fluid Mech. 1998. V. 362. P. 273.
13. Gerbeau J.-F., Lelievre T., Le Bris C. // Jour. Comput. Phys. 2003. V. 184. P. 163.
14. Головизнин В. М., Самарский А. А. // Математическое моделирование. Т. 10. № 1. С. 86.
15. Versteeg H. K., Malalasekera W. An introduction to computational fluid dynamics. The finite volume method. Longman Scientific & Technical ISBN 0-470-23515-2.
16. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. — М.: Энергоатомиздат, 1984.

## Reduction cell multiphase 3D model

*N. P. Savenkova, S. V. Anpilov, R. N. Kuzmin*  
M. V. Lomonosov Moscow State University,  
Leninsky Gory, Moscow, 119991, Russia  
E-mail: mkandrew@mail.ru

*O. G. Provorova, T. V. Piskazhova*  
Siberian Federal University,  
79 Svobodny passage, Krasnoyarsk, 660041, Russia  
E-mail: Piskazhova@yandex.ru

***New three-dimensional reduction cell model is introduced in this article. Model is based on full system of equations describing magneto-hydrodynamic processes while alumina and cryolite are treated as a single multiphase-mixture.***

PACS: 47.65.-d, 47.70.Fw, 52.30.Cv

**Keywords:** magneto-hydrodynamics, reduction cell, computational methods, cfd.

Bibliography — 16 references.

Received November 20, 2011

\* \* \*