

# Электронные и ионные пучки

УДК 621.3.038.625

## Влияние магнитной компоненты ВЧ-поля на движение пучка в циклотроне

С. А. Костромин, Г. А. Карамышева, Е. В. Самсонов, И. Йонген

Получены выражения для компонент магнитного поля от ВЧ-системы в окрестности медианной плоскости циклотрона. Расчетным образом показано влияние этого поля на параметры пучка при ускорении и на входе в электростатический дефлектор. Для протонного циклотрона С235 величина изменения параметров пучка составила до 50 %.

PACS: 20.29 db

**Ключевые слова:** ускоритель, циклотрон, пучок, магнитное поле, движение, ион, протон, динамика, уравнения, дефлектор.

### Введение

Эффективность вывода пучка — одна из важнейших характеристик любого циклического ускорителя. Поэтому оптимизация вывода является важным вопросом в процессе разработки, а затем и запуска циклотрона. В Лаборатории ядерных проблем Объединенного института ядерных исследований (ОИЯИ) создан комплекс программных кодов для расчетов динамики пучка в циклотронах, которые позволяют рассчитывать и затем учитывать в своей работе магнитные поля, которые создает ВЧ-система циклотрона при своей работе.

Учет этих полей в расчете приводит к изменению поперечных размеров пучка и фазовой протяженности сгустков при ускорении, следовательно, изменяется портрет пучка на входе в электростатический дефлектор выводной системы циклотрона.

В данной работе расчетным путем оценено влияние магнитного поля от ВЧ-системы на параметры пучка.

### Выражения для учета поправок к магнитному полю от ВЧ-системы

Меллер и Маарт показали [1], что в изохронном циклотроне при ускорении пучка выполняется условие:

$$V(r)\Delta\varphi(r)\cos(\varphi_c) = \text{const}, \quad (1)$$

где  $V$  — ускоряющее напряжение на дуанте;  
 $\Delta\varphi$  — фазовая протяженность банча частиц;  
 $\varphi_c$  — фаза центральной частицы банча.

Авторы показали, что выполнение условия (1) обеспечивается действием  $B_z$ -компоненты магнитного поля в средней плоскости ускорителя, возникающей при работе ускоряющей системы.

Изучение влияния магнитного поля, которое создает ВЧ-система, проведено на примере расчета динамики ускорения пучка в изохронном циклотроне С235 [2], созданном бельгийской фирмой ИВА для протонной терапии. В этой машине фазовая протяженность банча к концу ускорения должна быть существенно меньше, чем в центре циклотрона из-за значительного роста ускоряющего напряжения с радиусом (рис. 1).

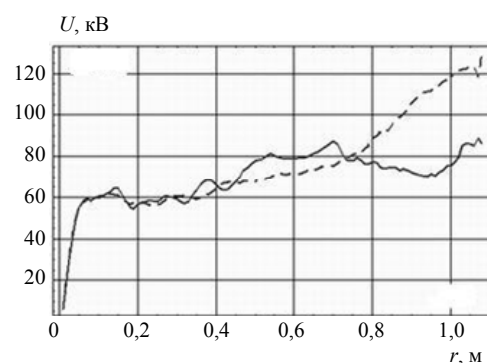


Рис. 1. Зависимость ускоряющего напряжения от радиуса на двух краях дуанта циклотрона С235

**Костромин Сергей Александрович**, начальник сектора.  
**Карамышева Галина Анатольевна**, начальник научного отдела.  
**Самсонов Евгений Васильевич**, старший научный сотрудник.  
 Объединенный институт ядерных исследований (ОИЯИ).  
 Россия, 141980, г. Дубна МО, ул. Жолио-Кюри, 6.  
 Тел. (7-09621) 62-344. E-mail: kostromin@jinr.ru  
**Йонген Ив**, главный научный сотрудник.  
 Фирма ИВА.  
 Бельгия, Лювен-ла-Нев.  
 E-mail: Yves.Jongen@iba-group.com

Статья поступила в редакцию 20 сентября 2011 г.

© Костромин С. А., Карамышева Г. А., Самсонов Е. В., Йонген И., 2012

Для численного изучения вопроса и учета эффекта при расчете ускорения пучка необходима карта  $B_z$ -компоненты магнитного поля от ВЧ-системы. Ее можно получить, используя карты компонент электрического поля ВЧ-системы  $E_r$  и  $E_\varphi$ . Ниже получены аналитические выражения для  $B_z$ -компоненты через  $E_r$  и  $E_\varphi$ .

Рассмотрим уравнения Максвелла для электромагнитного поля циклотрона в объеме около средней плоскости  $z = 0$  ускорителя.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \mathbf{E} = 0, \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \mathbf{B} = 0. \end{array} \right. \quad (5)$$

Электрическое поле в средней плоскости зависит от времени и может быть выражено как:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r, \varphi, z, t) &= \mathbf{E}(r, \varphi, 0, t) = \\ &= \{ E_r(r, \varphi) \cos \psi \quad E_\varphi(r, \varphi) \cos \psi \quad 0 \} = \\ &= \{ E_r \cos \psi \quad E_\varphi \cos \psi \quad 0 \}, \end{aligned}$$

где  $E_r(r, \varphi)$  и  $E_\varphi(r, \varphi)$  могут быть взяты из расчетов ускоряющей системы. Здесь введено выражение

$$\psi = h(2\pi f_{rev} t_i + \xi_i + \varphi_k),$$

где  $\psi$  — фаза ускоряющего поля для каждой отдельно взятой из банча ускоряемой частицы;

$t_i$  — время для каждой частицы;

$\xi_i$  — начальная фаза каждой частицы;

$\varphi_k$  — начальная фаза ВЧ-напряжения на дуантах;

$f_{rev}$  — резонансная частота обращения.

Очевидно, что  $h f_{rev} = f_{rf}$ , где  $f_{rf}$  — частота работы ускоряющей системы, а  $h$  — номер гармоники ускорения.

Производная по времени фазы электрического поля равна:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \dot{\psi} = 2\pi h f_{rev} = 2\pi f_{rf}.$$

Выражение (2) в цилиндрической системе координат выглядит следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = - \frac{\partial B_r}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = - \frac{\partial B_\varphi}{\partial t}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (r E_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = - \frac{\partial B_z}{\partial t}. \end{array} \right.$$

Из последнего уравнения этой системы для  $z = 0$  получаем

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} E_\varphi - \frac{\partial E_\varphi}{\partial r}. \quad (6)$$

Интегрируя (6) по времени, получим:

$$B_z = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} E_\varphi - \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} \right] \sin \psi \frac{1}{\dot{\psi}} \equiv B_z(rf). \quad (7)$$

Это дополнительное магнитное поле  $B_z(rf)$ , создаваемое ускоряющей системой в средней плоскости циклотрона. Для получения выражений для компонент магнитного поля в окрестности средней плоскости ускорителя рассмотрим уравнения (5) и (3). Для  $z = 0$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial (r B_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} = - \epsilon_0 \mu_0 E_r \sin \psi \cdot \dot{\psi}, \end{array} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = - \epsilon_0 \mu_0 E_\varphi \sin \psi \cdot \dot{\psi}, \end{array} \right. \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial (r B_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} = 0. \end{array} \right. \quad (11)$$

Из (8) имеем:

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = - \frac{1}{r} \left[ B_r + r \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} \right]. \quad (12)$$

Дифференцируя по  $z$ -координате, получаем:

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} = - \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial B_r}{\partial z} + r \frac{\partial^2 B_r}{\partial z \partial r} + \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial z \partial \varphi} \right]. \quad (13)$$

Из (10) получаем:

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial r} - \epsilon_0 \mu_0 E_\varphi \sin \psi \cdot \dot{\psi}.$$

Дифференцируя по  $r$ , получаем:

$$\frac{\partial^2 B_r}{\partial r \partial z} = \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} \sin \psi \cdot \dot{\psi}. \quad (14)$$

Аналогичным способом из (9) получаем:

$$\frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial \varphi \partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 B_z}{\partial \varphi^2} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \sin \psi \cdot \dot{\psi}. \quad (15)$$

Предполагая, что  $B(r, \varphi, z)$  — регулярная функция в окрестности медианной плоскости циклотрона:

$$\frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial \varphi \partial z} = \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial z \partial \varphi}, \quad \frac{\partial^2 B_r}{\partial r \partial z} = \frac{\partial^2 B_r}{\partial z \partial r}.$$

Подставляя (14) и (15) в (13) и учитывая (9) и (10), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} = & -\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial B_z}{\partial r} - \varepsilon_0 \mu_0 E_\varphi \sin \psi \cdot \dot{\psi} + \right. \\ & + r \left( \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} \sin \psi \cdot \dot{\psi} \right) + \\ & \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 B_z}{\partial \varphi^2} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \sin \psi \cdot \dot{\psi} \right] \end{aligned}$$

для плоскости  $z = 0$ .

Используя разложение в ряд Тейлора для  $B_z(z)$  в окрестности  $z = 0$  с учетом членов до второго порядка малости включительно, получаем:

$$B_z(z) = B_z(0) + z \frac{\partial B_z}{\partial z}(0) + \frac{z^2}{2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2}(0).$$

Если в средней плоскости  $z = 0$  отсутствуют компоненты  $B_r$  и  $B_\varphi$ , а магнитное поле от ВЧ-системы присутствует только в этой плоскости (нет перекоса и сдвига относительно друг друга дуантов), то  $\frac{\partial B_z}{\partial z}(0) = 0$ . Тогда можно записать следующее соотношение:

$$\begin{aligned} B_z(z) = & B_z(0) + \frac{z^2}{2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2}(0) = (B_z \text{map}(0) + B_z(rf)) - \\ & - \frac{z^2}{2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial \varphi^2} - \right. \\ & \left. - \varepsilon_0 \mu_0 \sin \psi \cdot \dot{\psi} \left( \frac{1}{r} E_\varphi + \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right) \right]. \end{aligned}$$

Здесь имеем очевидные равенства

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}; \quad \varepsilon_0 \mu_0 \dot{\psi} = \frac{2 \pi f_{rf}}{c^2}.$$

Численные расчеты показывают, что величина слагаемого

$$\frac{z^2}{2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial \varphi^2} \right] \equiv \Delta_1$$

может составить несколько десятков гаусс, в то время как член

$$\frac{z^2}{2} \left[ \varepsilon_0 \mu_0 \sin \psi \cdot \dot{\psi} \left( \frac{1}{r} E_\varphi + \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right) \right] \equiv \Delta_2$$

меньше, чем 0,001 Гс. Таким образом, отношение  $\frac{\Delta_2}{\Delta_1} \cong 10^{-4}$  и можно пренебречь слагаемым  $\Delta_2$ .

Окончательно имеем:

$$\begin{aligned} B_z(z) = & B_z \text{map}(0) + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} E_\varphi - \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} \right] \sin \psi \frac{1}{\dot{\psi}} - \\ & - \frac{z^2}{2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial \varphi^2} \right], \end{aligned}$$

где  $B_z \text{map}(0) = B_z(r, \varphi, 0)$  — вертикальная компонента магнитного поля в средней плоскости циклотрона, полученная из измерений или расчетов магнитной системы.

Таким образом, величина магнитного поля, которую частица "видит" во время ускорения, зависит от ее фазы по отношению к ускоряющему напряжению на дуантах циклотрона. Это может приводить к уменьшению или увеличению фазовой протяженности банча во время ускорения.

Аналогичным образом получают выражения для компонент  $B_r$  и  $B_\varphi$  в окрестности средней плоскости циклотрона. Для  $B_r$  имеем:

$$B_r(z) = B_r(0) + z \frac{\partial B_r}{\partial z}(0),$$

а в развернутом виде:

$$\begin{aligned} B_r(z) = & z \frac{\partial B_r}{\partial z}(0) = \left[ \frac{\partial B_r \text{map}}{\partial r}(0) + \left( -\frac{1}{r^2} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 E_r}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} E_\varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial r^2} \right) \sin \psi \frac{1}{\dot{\psi}} \right] z. \end{aligned}$$

Соответственно, для  $B_\varphi$  имеем:

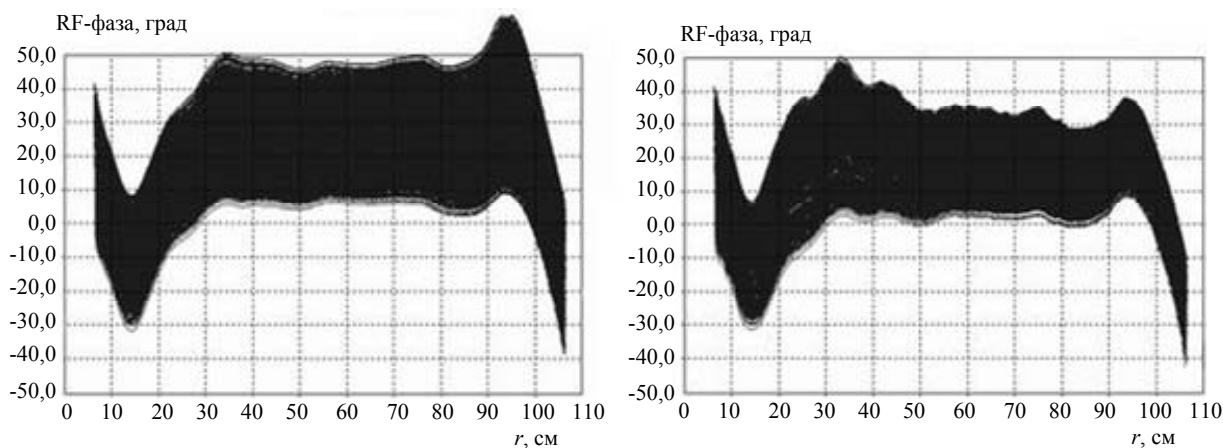
$$B_\varphi(z) = B_\varphi(0) + z \frac{\partial B_\varphi}{\partial z}(0),$$

а в развернутом виде:

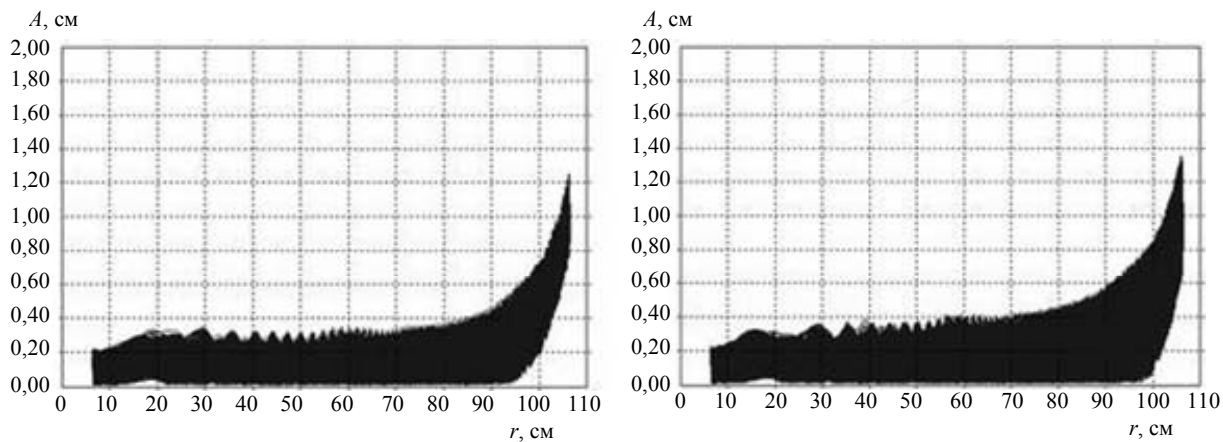
$$B_{\varphi}(z) = \frac{z}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi}(0) = \left[ \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} \right]_{\text{map}}(0) + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 E_r}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_{\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 E_{\varphi}}{\partial \varphi \partial r} \right) \sin \psi \frac{1}{\dot{\psi}} \left] \frac{z}{r}.$$

**Моделирование ускорения пучка в циклотроне С235**

Банч из 1000 протонов с начальными амплитудами радиальных колебаний до 2 мм (эмиттанс ~2π мм·мрад) и фазовой протяженностью ~45° от периода ВЧ-поля был ускорен от радиуса 6 см до входа в электростатический дефлектор, расположенный на радиусе 105 см. Сравнение результатов расчета ускорения с учетом поля от ВЧ-системы B<sub>z</sub>(ВЧ) и без него показано на рис. 2—4.



**Рис. 2. Фазовое движение банча протонов в зависимости от среднего радиуса орбиты.**  
 Слева — без учета V<sub>z</sub>(ВЧ), справа — с учетом V<sub>z</sub>(ВЧ)



**Рис. 3. Амплитуды A радиальных колебаний в зависимости от среднего радиуса орбиты.**  
 Слева — без учета V<sub>z</sub>(ВЧ), справа — с учетом V<sub>z</sub>(ВЧ)

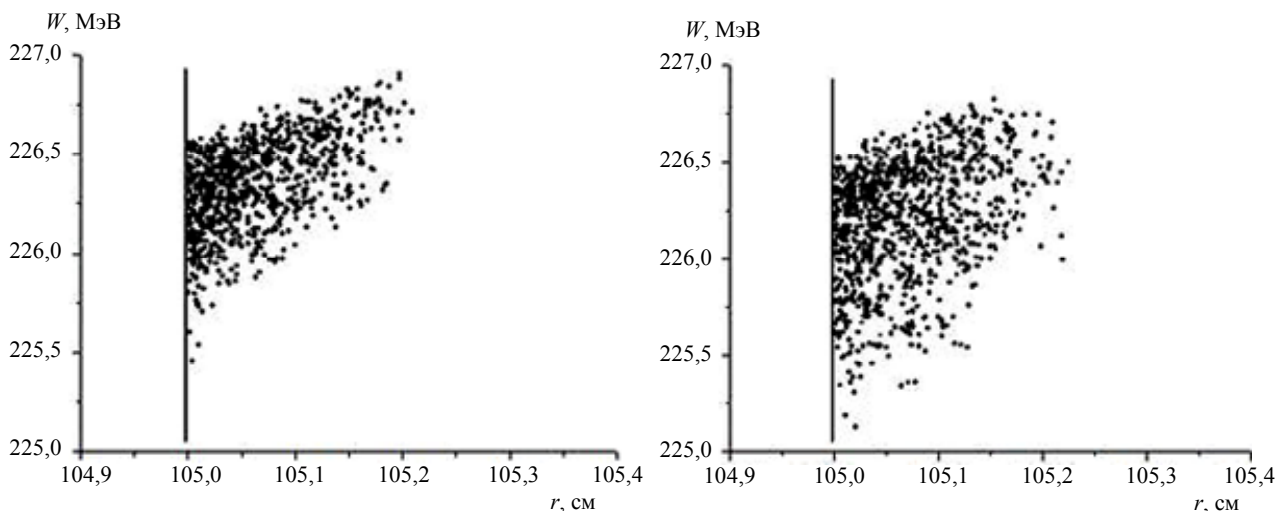


Рис. 4. Положение протонов на плоскости  $(r, W)$ , на входе в электростатический дефлектор.

Слева — без учета  $B_z(BЧ)$ , справа — с учетом  $B_z(BЧ)$

Результаты расчетов подтвердили существование интеграла движения (1) с точностью  $\sim 5\%$ , причем фазовая протяженность банча частиц при ускорении обратно пропорциональна величине ускоряющего напряжения на дуантах в зависимости от радиуса.

Параметры пучка на входе в электростатический дефлектор (т. е. в конце ускорения) представлены в таблице.

### Заключение

Получены аналитические выражения для компонент магнитного поля, создаваемого ВЧ-системой циклотрона при ускорении пучка, которые используют карты электрических полей, полученные предварительно при расчете этой системы. Учет  $B_z(BЧ)$  как поправки к основному магнитному полю ускорителя позволил оценить эффект

### Параметры пучка на входе в электростатический дефлектор

Начальный эмиттанс, $\epsilon_r$ [ $\mu\text{м}\cdot\text{мрад}$ ]	Параметры на входе в дефлектор			
	Конечный эмиттанс, $\epsilon_r$ [ $\mu\text{м}\cdot\text{мрад}$ ]		Энергетический разброс, $\Delta W/W$ [ $\pm\%$ ]	
	без учета $B_z(BЧ)$	с учетом $B_z(BЧ)$	без учета $B_z(BЧ)$	с учетом $B_z(BЧ)$
2,25	1,00	1,57	0,21	0,27

Несмотря на уменьшение ( $\sim 40\%$ ) фазовой протяженности банча к концу ускорения, качество фазовых портретов пучка на входе в дефлектор ухудшилось. Можно предположить, что это произошло из-за увеличения амплитуд радиальных колебаний (см. рис. 3). Величина изменения параметров пучка на входе в электростатический дефлектор составила до  $50\%$ .

фазовой компрессии в циклотроне. Для протонного циклотрона С235 величина изменения параметров пучка доходит до  $50\%$ .

### Литература

1. Muller R. W., Mahrt R. // NIM. 1970. V. 86. P. 241.
2. Jongen Y. et al. The proton therapy system for the NPTC. 4<sup>th</sup> European Conference on Accelerators in Applied Research and Technology. Zurich. 1995.

## Influence of the HF-field magnetic component on beam dynamics in a cyclotron

S. A. Kostromin, G. A. Karamysheva, E. V. Samsonov  
Joint Institute for Nuclear Research  
6 Joliot-Curie str., Dubna, Moscow region, 141980, Russia  
E-mail: kostromin@jinr.ru

I. Jongen  
Ion Beam Application, Inc.  
Louvain-la-Neuve, Belgium

*Analytical description of the magnetic field components from HF-system is obtained in a vicinity of a cyclotron median plane. Influence of this field on the beam parameters during acceleration and at the deflector entrance is shown by numerical simulation of the beam dynamics in C235 cyclotron. The value of changes in the parameters of beam can be estimated as up to ~50 % for this machine.*

PACS: 20.29 db

*Keywords:* accelerator, cyclotron, beam, magnetic field, motion, ion, proton, dynamics, equations, deflector.

Bibliography — 2 references.

*Received September 20, 2011*