

УДК 517.983: 519.2: 519.6

## Об одной возможности статистического анализа распределения неосновных носителей заряда, генерированных электромагнитным излучением в полупроводниковом материале

Е. В. Серегина, М. А. Степович, А. М. Макаренков

*Рассмотрены некоторые возможности использования проекционного метода для теоретической оценки влияния случайного характера изменений электрофизических параметров на распределение неосновных носителей заряда, генерированных электромагнитным излучением в полупроводниковом материале.*

PACS: 72.10.Bg, 72.20.Jv, 72.40.+w, 78.56.-a

*Ключевые слова:* полупроводники, электрофизические параметры, проекционный метод, оценка, распределение, неосновные носители заряда.

### Введение

Эффективность работы различных полупроводниковых устройств во многом зависит от электрофизических параметров используемых полупроводниковых структур, и знание этих параметров может позволить провести теоретическую оценку эффективности работы этих приборов. Для устройств полупроводниковой оптоэлектроники (элементов солнечных батарей, фотодиодных структур, регистрирующих электромагнитное излучение различных диапазонов, и т. п.) одной из важных характеристик, во многом определяющих работу приборов, является эффективность детектирования неосновных носителей заряда (ННЗ), генерированных электромагнитным излучением в приповерхностной области полупроводниковой структуры. При этом при моделировании процессов диффузии ННЗ в полупроводниковых материалах фотоприемников влияние статистического разброса электрофизических параметров вещества обычно не учитывают. Однако на практике локальные значения электрофизических параметров полупроводниковых материалов в силу ряда причин могут иметь случайный разброс относительно своих усредненных по объему значений, и не исключено, что наличие разброса в значениях

локальных параметров может оказать существенное влияние на процесс диффузии, а значит, и на распределение неравновесных ННЗ в объеме полупроводника.

Количественное описание влияния разброса в значениях локальных параметров полупроводников на распределение ННЗ в результате их диффузии может быть проведено методами математического моделирования; ранее такая задача решалась только для случая генерации ННЗ электронным пучком применительно к модели независимых источников [1, 2].

В данной работе авторы продолжают такие исследования и ставят перед собой задачу разработать методику расчета распределений ННЗ, генерированных электромагнитным излучением в полупроводниковом материале. Предполагается использование модели коллективного движения носителей заряда, согласно которой на диффузию генерированных внешним энергетическим воздействием неравновесных ННЗ из любого микрообъема полупроводникового материала фотоприемника оказывают влияние другие электроны (или дырки) из других микрообластей материала. Расчеты проводятся для наиболее простой модели, в которой процесс диффузии ННЗ рассматривается в однородном полупроводниковом материале без учета влияния электрического поля  $p$ — $n$ -перехода фотодиодной структуры. Тогда, аналогично случаю генерации ННЗ электронным пучком [3], для одномерной диффузии в полупроводнике распределение ННЗ по глубине  $\Delta p(z)$  находится как решение дифференциального уравнения

$$D \frac{d^2 \Delta p}{dz^2} - \frac{\Delta p}{\tau} = -I \quad (1)$$

Серегина Елена Владимировна, преподаватель.  
Степович Михаил Адольфович, зав. кафедрой, профессор.  
Калужский государственный университет  
им. К. Э. Циолковского.  
Россия, 248023, г. Калуга, ул. Степана Разина, 26.  
Тел./факс: 8 (4842) 57-61-20. E-mail: rector@kspu.kaluga.ru  
Макаренков Александр Михайлович, доцент.  
Калужский филиал МГТУ им. Н. Э. Баумана.  
Россия, 248600, г. Калуга, ул. Баженова, 2.  
E-mail: mail@bmstu-kaluga.ru

Статья поступила в редакцию 15 декабря 2011 г.

© Серегина Е. В., Степович М. А., Макаренков А. М., 2012

с граничными условиями

$$D \frac{d\Delta p}{dz} \Big|_{z=0} = v_s \Delta p \Big|_{z=0}, \quad \Delta p \Big|_{z=\infty} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $D$ ,  $\tau$  и  $v_s$  — электрофизические параметры полупроводниковой мишени, а именно, коэффициент диффузии, время жизни и скорость поверхностной рекомбинации ННЗ, соответственно. Через  $I(z)$  обозначена плотность потока энергии светового пучка, рассеянной в тонком слое мишени на глубине  $z$ . Для пучка света  $I(z)$  определяется следующим образом:  $I(z) = \beta \alpha I_0 \exp(-\alpha z)$  [4], где  $I_0$  — интенсивность света (плотность потока энергии) на входе в образец,  $\alpha$  — коэффициент поглощения,  $\beta$  — внутренний квантовый выход.

### Постановка задачи

Задача анализа моделей стохастических процессов, подобных процессу диффузии ННЗ, с учетом случайного изменения электрофизических параметров исследуемого полупроводникового материала является достаточно сложной проблемой, для решения которой существует сравнительно мало методов. Большинство таких методов являются либо слишком сложными для использования на практике, либо требуют принятия слишком грубых упрощающих допущений, например, о малости случайных возмущений параметров. При этом далеко не всегда удается найти точное аналитическое решение.

Для проведения анализа модели (1), (2) с учетом случайных составляющих в коэффициентах  $D$ ,  $\tau$  и  $v_s$ , предлагается использовать проекционный метод, который не только позволяет решить поставленную задачу, но и построить эффективный вычислительный алгоритм. При сравнении с конечно-разностными методами преимущество предлагаемого подхода проявляется не только в возможности существенно сократить размерность аппроксимированной модели, но и представить решение в операторной форме, что позволяет применять наиболее эффективные методы при исследовании аппроксимированных систем. При этом проекционный метод трактуется не как метод приближенного решения уравнения, а как метод аппроксимации непрерывной системы конечно-мерной задачи [5].

Ранее в работе [6] было получено решение стационарного уравнения диффузии ННЗ данным методом без учета случайных возмущений. Приближенное решение было найдено в аналитическом виде с использованием сравнительно небольшого числа членов функционального ряда ( $m = 15$ ).

Данная работа посвящена разработке приближенно-аналитического метода решения рассматриваемой задачи, позволяющего сравнительно просто находить статистические характеристики распределения ННЗ  $\Delta p(z)$ , а именно, математическое ожидание и автокорреляционную функцию с учетом случайных изменений коэффициентов  $D$ ,  $\tau$  и  $v_s$  и использованием проекционной аппроксимации модели коллективного движения, т. е. уравнений (1) и (2).

Напомним, что математическое ожидание случайной функции представляет собой неслучайную усредненную функцию (среднее значение функции), а автокорреляционная функция характеризует линейную статистическую связь между сечениями рассматриваемой случайной функции, а также разброс сечений относительно усредненного значения. Для реализации проекционного метода был выбран базис из модифицированных функций Лагерра с параметром, ускоряющим сходимость ряда [7].

### Проекционная аппроксимация исходной модели, основанная на применении метода наименьших квадратов

Рассмотрим проекционную аппроксимацию модели, выраженную уравнениями (1) и (2). Введем ортонормированный базис из модифицированных функций Лагерра  $\varphi_i(z) = \exp(-\gamma z/2) L_i(\gamma z; \eta)$  в функциональном пространстве  $L_2(0, \infty)$ , которые определяются через многочлены Чебышева—Лагерра  $L_i(\gamma z; \eta)$  [7],  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Здесь параметры  $\gamma$  и  $\eta$  используются для оптимизации вычислительной схемы. Тогда каждую функцию от переменной  $z$ , входящую в систему уравнений (1) и (2), аппроксимируем частичной суммой порядка  $m$  ее ряда Фурье по системе модифицированных функций Лагерра, а затем последовательно применим к каждому уравнению системы операторы проектирования  $Q^m$  на подпространство с базисом из  $m$  первых модифицированных функций Лагерра.

Перейдем от системы уравнений (1), (2) к приближенной системе уравнений:

$$\begin{cases} 10^4 D \tau Q^m \left( \frac{d}{dz} Q^m \left( \frac{d\Delta p^m}{dz} \right) \right) - 10^4 \Delta p^m = \\ = -10^4 \tau I^m, \\ Q^m \left( \frac{d\Delta p^m}{dz} \right) \Big|_{z=0} - D^{-1} v_s \Delta p^m \Big|_{z=0} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

и вместо задачи (3) рассмотрим функционал:

$$J \Delta p^m z = \left\| \tilde{L}_1^{(\Delta p)} \Delta p^m z + 10^4 \tau I^m z \right\|_{L_2}^2 + \tilde{L}_2^{(\Delta p)} \Delta p^m z \Big|_{z=0}^2,$$

где  $\tilde{L}_1^{(\Delta p)}$  и  $\tilde{L}_2^{(\Delta p)}$  — операторы, стоящие в левых частях уравнений системы (3), соответственно. Приближенное решение  $\Delta p^m z$  разыскивается из требования, чтобы оно доставляло минимум функционалу  $J \Delta p^m z$ .

Обозначим через  $C_m^p$  и  $C_m^I$  столбцы из коэффициентов разложений неизвестной функции  $\Delta p(z)$  и известной функции  $I(z)$  по базису  $\varphi_i(z)$ , соответственно, далее введем матрицу дифференцирования  $D^m$  в базисе  $\varphi_i(z)$  и обозначим через  $\varphi^m(z)$  столбец из  $m$  первых модифицированных функций Лагерра по переменной  $z$ , а в силу ортогональности функций Лагерра на полуоси  $0, \infty$  функционал  $J \Delta p^m z$  можно представить в виде:

$$J \Delta p^m z = J C^p = A_p C^p - G^T A_p C^p - G$$

и перейти к алгебраической векторно-матричной системе уравнений

$$A_p C^p = G, \tag{4}$$

где  $A_p$  — матрица переопределенной системы (4), которая имеет вид

$$A_p \text{ } m+1 \times m = \begin{bmatrix} 10^4 D \tau D_m^2 - 10^4 E & & & & \\ \varphi^m & 0 & D_m - D^{-1} v_s & \varphi^m & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Столбец, стоящий в правой части системы уравнений (4), определяется как:

$$G_{m+1 \cdot 1} = \begin{bmatrix} -10^4 \tau C_m^I & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Разложение функции  $I(z)$  по базису из  $m$  первых модифицированных функций Лагерра дает выражение:

$$I z \approx I^m z = \varphi^m z^T C_m^I, \quad z \in 0, \infty. \tag{5}$$

Далее, найдем столбец  $C^p$ , который минимизирует сумму квадратов невязок всех уравнений, входящих систему (4):

$$J C^p = A_p C^p - G^T A_p C^p - G \rightarrow \inf,$$

т. е. решим ее, используя метод наименьших квадратов (МНК). Тогда нормальное псевдорешение переопределенной системы уравнений (4) можно найти с помощью псевдообратной матрицы [5]

$$C^{p+} = A_p^T A_p^{-1} A_p^T G. \tag{6}$$

Получив нормальное псевдорешение  $C^{p+}$ , можно теперь восстановить приближенное решение исходной задачи (1), (2) по формуле:

$$\Delta p z \approx \Delta p^m z = \varphi^m z^T C^{p+}, \quad z \in 0, \infty. \tag{7}$$

### Решение задачи статистического анализа

Задачу статистического анализа будем рассматривать в смысле определения статистических характеристик решения уравнений (1), (2) при условии, что время жизни  $\tau$ , коэффициент диффузии  $D$  и скорость поверхностной рекомбинации  $v_s$  ННЗ являются случайными величинами и имеют гауссов закон распределения.

Ниже подробно рассмотрен случай, когда коэффициент  $\tau$ , входящий в дифференциальное уравнение (1), является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Для остальных случайных коэффициентов, т. е.  $D$  и  $v_s$ , рассмотрение проводится аналогично, поэтому приводятся только результаты такого анализа.

Итак, полученная выше проекционная модель (4) включает случайный параметр  $\tau$ , потому решение  $\Delta p z$  будет случайной функцией. Таким образом, возникает задача статистического анализа, которая формулируется следующим образом: необходимо определить статистические характеристики решения уравнения (1) в виде  $\Delta p z$ , а именно, математическое ожидание и автокорреляционную функцию, при условии, что время жизни  $\tau$  является случайной величиной, которая распределена по нормальному закону с математическим ожиданием  $m_\tau$ , дисперсией  $D_\tau$  и средним квадратическим отклонением  $\sigma_\tau$ .

Известно [8], что справедливо следующее представление:  $\tau = m_\tau + r \cdot \sigma_\tau$ , где  $r$  — непрерывная случайная величина, распределенная по нормальному закону и имеющая нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию.

Перейдем от системы (4) к равносильной системе

$$W_{p_0} r W_p r C^p = W_{p_0} r Y_p r, \tag{8}$$

где  $W_p = A_p^T A_p$ ,  $Y_p = A_p^T G$ ,  $W_{p_0} r = \exp -r^2/\mu \times \times W_p 0^{-1}$ ,  $\mu > 0$ . Матрицы  $W_p$  и  $Y_p$  имеют следующую структуру:  $W_p = \tau^2 r W_1 + \tau r W_2 + W_3$ ,  $Y_p = \tau^2 r Y_1 + \tau r Y_2$ , где  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$ ,  $Y_1$  и  $Y_2$  — детерминированные матрицы.

Итерационный процесс, определяющий проекционную характеристику математического ожидания и автокорреляционной функции решения уравнения диффузии ННЗ по глубине, построим таким же образом, как и в [2]:

$$C_i^{m_p} = M \left[ C_i^{p^+} r \right] = \int_a^b C_i^{p^+} \tau f \tau d\tau = M \left[ C_{i-1}^{p^+} r \right] - h_i^k M \left[ \tilde{W}_p r C_{i-1}^{p^+} r \right] + h_i^k M \left[ W_{p_0} r Y_p r \right], \quad i = 1, 2, \dots; \quad (9)$$

$$h_i^k = 2 / \left( \hat{M} + \hat{m} + \hat{M} - \hat{m} \cos \frac{\pi 2i-1}{2k} \right), \quad i = \overline{1, k}; \quad (10)$$

$$C_i^{R_p} = M \left[ \left( C_{i-1}^{p^+} - h_i^k \tilde{W}_p r C_{i-1}^{p^+} - W_{p_0} r Y_p r \right) \times \left( C_{i-1}^{p^+} - h_i^k \tilde{W}_p r C_{i-1}^{p^+} - W_{p_0} r Y_p r \right)^T \right] - C_i^{m_{p^+}} \left( C_i^{m_{p^+}} \right)^T, \quad i = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Здесь функция  $f \tau$  представляет собой плотность нормального усеченного закона распределения случайной величины  $\tau$  [9], причем ее возможные значения принадлежат промежутку  $\tau \in a, b$ ;  $M \left[ C_0^{p^+} \right] = h \cdot M \left[ W_{p_0} r Y_p r \right]$  — начальное приближение, а  $\tilde{W}_p r = W_{p_0} r W_p r$ ,  $h = 2 / \left( \hat{M} + \hat{m} \right)$ ,  $\hat{m} = \min_r \left( \min_j \lambda_j \tilde{W}_p r \right)$ ,  $\hat{M} = \max_r \left( \max_j \lambda_j \tilde{W}_p r \right)$ ,  $\lambda_j \tilde{W}_p r$  — собственные значения матрицы  $\tilde{W}_p r$ , т. е. спектр  $\text{Sp } \tilde{W}_p r \in \left[ \hat{m}, \hat{M} \right]$ .

Найдем  $i$ -е приближение математического ожидания распределения ННЗ по глубине:

$$i m_{p_m} z = \varphi^m z^T C_i^{m_p}, \quad z \in 0, \infty.$$

Найдем  $i$ -е приближение автокорреляционной функции решения дифференциальных уравнений (1), (2):

$$i R_{p_m} z_1, z_2 = \varphi^m z_1^T \cdot C_i^{R_p} \cdot \varphi^m z_2, \quad z_1 \in 0, \infty, \quad z_2 \in 0, \infty.$$

Для получения оценок математического ожидания и автокорреляционной функции решения дифференциального уравнения (1) методом статистических испытаний воспользуемся формулами [10]:

$$C_i^{m_p^*} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( C_i^{p^+} \right)_k, \quad i = \overline{1, m},$$

$$C_{ij}^{R_p^*} = \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \left( C_i^{p^+} \right)_k \cdot \left( C_j^{p^+} \right)_k \right) - C_i^{m_{p_m^*}} \cdot C_j^{m_{p_m^*}} \right) \frac{n}{n-1}, \quad i, j = \overline{1, m},$$

где  $n$  — число реализаций случайной функции  $\Delta p(z)$ , а  $\left( C_i^{p^+} \right)_k$  —  $i$ -й коэффициент  $k$ -й реализации  $\Delta p(z)$ .

В результате получим оценки математического ожидания и автокорреляционной функции решения дифференциального уравнения (1):

$$m_{p_m}^* z = \varphi^m z^T C^{m_p^*}, \quad z \in 0, \infty,$$

$$R_{p_m}^* z_1, z_2 = \varphi^m z_1^T \cdot C^{R_p^*} \cdot \varphi^m z_2, \quad z_1 \in 0, \infty, \quad z_2 \in 0, \infty.$$

### Результаты расчетов и их обсуждение

Ниже представлены результаты расчетов, проведенных для параметров мишени, характерных для монокристаллического кремния ( $Z=14$  и  $A=28$ ), при длине волны поглощаемого электромагнитного излучения  $\lambda = 1$  мкм и коэффициенте поглощения  $\alpha = 10^{-2}$  мкм<sup>-1</sup> [11]. Константа  $I_0\beta$  была принята равной единице. Точность аппроксимации модели коллективного движения существенно зависит от точности расчета коэффициентов Фурье и приближения функции  $I(z)$ , поэтому задача построения приближенного решения сводится к приближенному представлению функции  $I(z)$  с заданной точностью. Приемлемое для проведения практических расчетов приближение функции  $I(z)$  было получено уже для 9 членов ряда Фурье по модифицированным функциям Лагерра с параметрами  $\gamma = 0,01$  и  $\eta = 0$ . Оценка относительной погрешности приближения по норме пространства  $L_2 0, \infty$  [12]

(среднее квадратическое отклонение) определяется по формуле:

$$\Delta I, I^m = \frac{\|I(z) - I^m(z)\|_{L_2, 0, \infty}}{\|I(z)\|_{L_2, 0, \infty}} \cdot 100 \% =$$

$$= \frac{\left(\int_0^{\infty} I(z) - I^m(z)^2 dz\right)^{1/2}}{\left(\int_0^{\infty} I(z)^2 dz\right)^{1/2}} \cdot 100 \% = 0,0095 \%.$$

Результаты таких расчетов приведены на рис. 1. Кривые точных и приближенных (формула (5)) представлений функции  $I(z)$  при использовании в разложении 9 членов ряда по базису из функций Лагерра в выбранном масштабе практически совпадают.

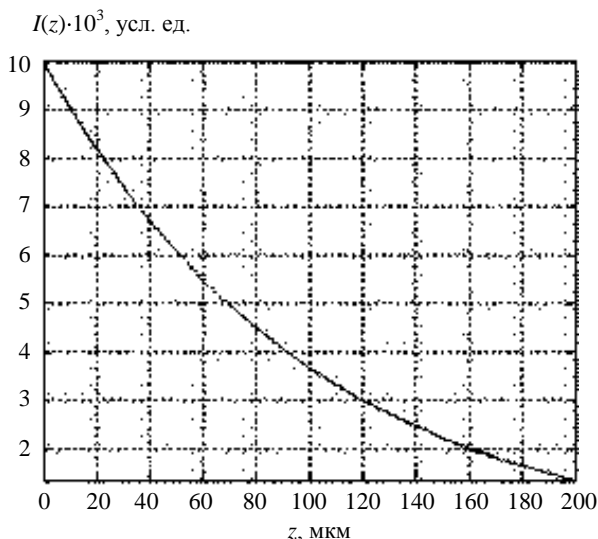


Рис. 1. Распределение плотности потерь энергии световым пучком в кремнии и результат его аппроксимации 9-м приближением

Для оценки относительной погрешности между 8-м и 9-м приближением решения дифференциального уравнения (1) получено:

$$\Delta \delta p^8, \delta p^9 = 0,2183 \%.$$

Из этого выражения видно, что проекционный метод позволяет получить приближенное решение с использованием небольшого числа членов разложения ( $m = 9$ ) по базису из модифицированных функций Лагерра для достижения приемлемой точности.

Далее приведем оценки относительных погрешностей между 3-м и 4-м приближениями математического ожидания и автокорреляционной функции  $\Delta p(z)$  (9), (11), при условии, что скорость поверхностной рекомбинации  $v_s$  является случайной величиной, которая распределена по нормаль-

ному усеченному закону с математическим ожиданием  $m_{v_s} = 10^{10}$  мкм/с и средним квадратическим отклонением  $\sigma_{v_s} = 10^{10}$  мкм/с, а ее возможные значения принадлежат промежутку:  $v_s \in [10^9 \hat{\epsilon} \hat{\epsilon} / \bar{n}, 10^{11} \hat{\epsilon} \hat{\epsilon} / \bar{n}]$ .

Были получены следующие результаты:

$$\Delta {}_4 m_{p_9}, {}_3 m_{p_9} = 0,011 \%,$$

$$\Delta {}_4 R_{p_9}, {}_3 R_{p_9} = 2,92 \%.$$

Здесь использовались следующие параметры итерационных процессов:  $\mu = 30, k = 1$ .

Проверка результатов анализа выполнена методом статистических испытаний. В расчетах бралось  $n = 1000$  реализаций случайной функции  $\Delta p(z)$ .

Приведены следующие оценки относительных погрешностей, которые показывают сравнение результатов, полученных двумя методами, а именно, методом статистических испытаний и новым, приближенно-аналитическим, рассмотренным в данной работе:

$$\Delta m_{p_9}^*, {}_4 m_{p_9} = 1,12 \%,$$

$$\Delta R_{p_9}^*, {}_4 R_{p_9} = 3,65 \%.$$

Приведем оценки относительных погрешностей между 3-м и 4-м приближениями математического ожидания и автокорреляционной функции случайной функции  $\Delta p(z)$  при условии, что коэффициент диффузии  $D$  является случайной величиной, которая распределена по нормальному усеченному закону с математическим ожиданием  $m_D = 10^8$  мкм<sup>2</sup>/с и средним квадратическим отклонением  $\sigma_D = 10^8$  мкм<sup>2</sup>/с, причем ее возможные значения принадлежат промежутку:  $D \in [10^7 \hat{\epsilon} \hat{\epsilon}^2 / \bar{n}, 10^9 \hat{\epsilon} \hat{\epsilon}^2 / \bar{n}]$ .

Были получены следующие результаты для параметров итерационных процессов:  $\mu = 20, k = 1$ :

$$\Delta {}_4 m_{p_9}, {}_3 m_{p_9} = 0,25 \%,$$

$$\Delta {}_4 R_{p_9}, {}_3 R_{p_9} = 1,96 \%.$$

Приведены оценки относительных погрешностей, которые показывают сравнение результатов, полученных двумя методами, а именно, методом статистических испытаний и новым, приближенно-аналитическим:

$$\Delta m_{p_9}^*, {}_4 m_{p_9} = 2,95 \%,$$

$$\Delta R_{p_9}^*, {}_4 R_{p_9} = 4,49 \%.$$

Приведем оценки относительных погрешностей между 3-м и 4-м приближениями математического ожидания и автокорреляционной функции случайной функции  $\Delta p(z)$  при условии, что время жизни  $\tau$  является случайной величиной, которая распределена по нормальному усеченному закону с математическим ожиданием  $m_\tau = 10^{-8}$  с и средним квадратическим отклонением  $\sigma_\tau = 2 \cdot 10^{-9}$  с, а ее возможные значения принадлежат промежутку:  $\tau \in [10^{-9} \tilde{n}, 10^{-7} \tilde{n}]$ . Были получены следующие результаты для параметров итерационных процессов  $\mu = 10, k = 1$ :

$$\Delta {}_4 m_{p_9}, {}_3 m_{p_9} = 0,38 \%,$$

$$\Delta {}_4 R_{p_9}, {}_3 R_{p_9} = 2,45 \%.$$

Используя метод статистических испытаний, были найдены оценки математического ожидания и автокорреляционной функции решения дифференциального уравнения (1) со случайным коэффициентом  $\tau$ :

$$\Delta m_{p_9}^*, {}_4 m_{p_9} = 2,22 \%,$$

$$\Delta R_{p_9}^*, {}_4 R_{p_9} = 3,02 \%.$$

Также были найдены следующие оценки относительных погрешностей, которые показывают влияние на распределение ННЗ по глубине дисперсии:

случайного коэффициента  $v_s$ :

$$\begin{aligned} \Delta {}_4 m_{p_9}, \Delta p^9 &= 1,56 \%, \\ \tilde{\Delta} \sqrt{{}_4 D_{p_9} z}, {}_4 m_{p_9} z &= \quad (12) \\ &= \frac{\left\| \sqrt{{}_4 D_{p_9} z} \right\|_{L_2, 0, \infty}}{\left\| {}_4 m_{p_9} z \right\|_{L_2, 0, \infty}} \cdot 100 \% = 1,58 \%; \end{aligned}$$

случайного коэффициента  $D$ :

$$\begin{aligned} \Delta {}_4 m_{p_9}, \Delta p^9 &= 1,13 \%, \\ \tilde{\Delta} \sqrt{{}_4 D_{p_9}}, {}_4 m_{p_9} &= 0,01 \%; \end{aligned} \quad (13)$$

случайного коэффициента  $\tau$ :

$$\begin{aligned} \Delta {}_4 m_{p_9}, \Delta p^9 &= 1,22 \%, \\ \tilde{\Delta} \sqrt{{}_4 D_{p_9}}, {}_4 m_{p_9} &= 14,95 \%. \end{aligned} \quad (14)$$

Из соотношений (12)—(14) видно, что оценки относительных погрешностей между 9-м приближением усредненной случайной функции распределения ННЗ по глубине (ее математическим ожиданием) и 9-м приближением функции распределения ННЗ по глубине (см. (7)) не превышают пяти процентов, а статистический разброс (среднее квадратическое отклонение) распределения ННЗ по глубине относительно его усредненного значения (математического ожидания) не превышает 15 %. Это означает, что данным дисперсиям коэффициентов  $D, \tau$  и  $v_s$  исходной модели соответствует сравнительно небольшой разброс (дисперсия) распределения ННЗ по глубине относительно его усредненного значения, а усредненное значение распределения ННЗ по глубине будет незначительно отличаться от неслучайной функции  $\Delta p(z)$ .

Результаты статистического анализа модели коллективного движения ННЗ в кремнии для выбранных значений электрофизических параметров полупроводника представлены на рис. 2, 3. На рис. 1 изображено распределение плотности потерь энергии световым пучком в кремнии и результат его аппроксимации для этой мишени с использованием 9 функций Лагерра (формула (5)). На рис. 2 изображены средние значения распределения ННЗ по глубине (математические ожидания) при случайном изменении коэффициентов  $D, \tau$  и  $v_s$ . На рис. 3 показана степень линейной статистической зависимости между сечениями случайной функции распределения ННЗ на глубине  $z = z_1$  и  $z = z_2$  при случайных коэффициентах  $D, \tau$  и  $v_s$ , соответственно.

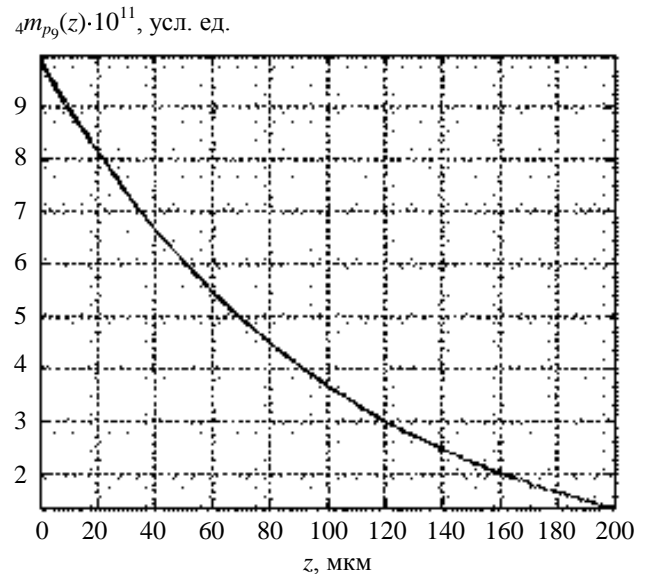
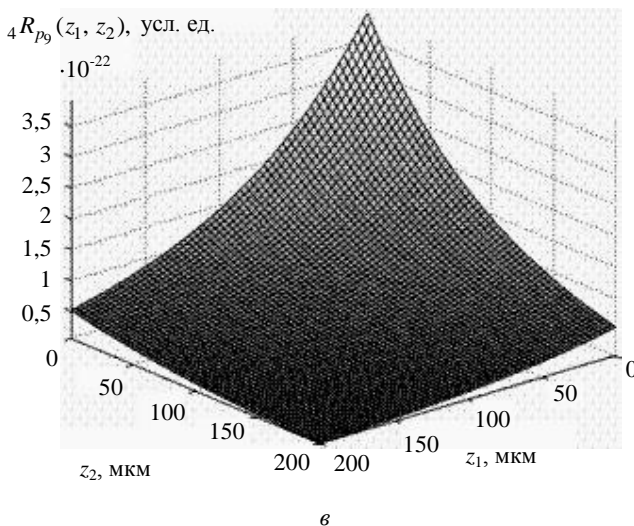
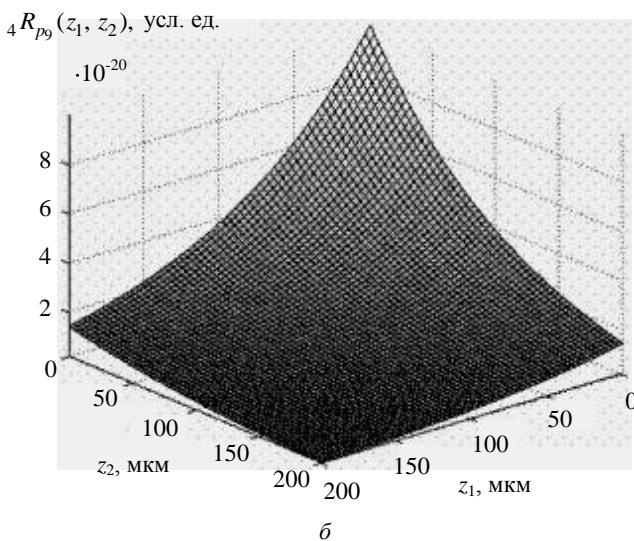
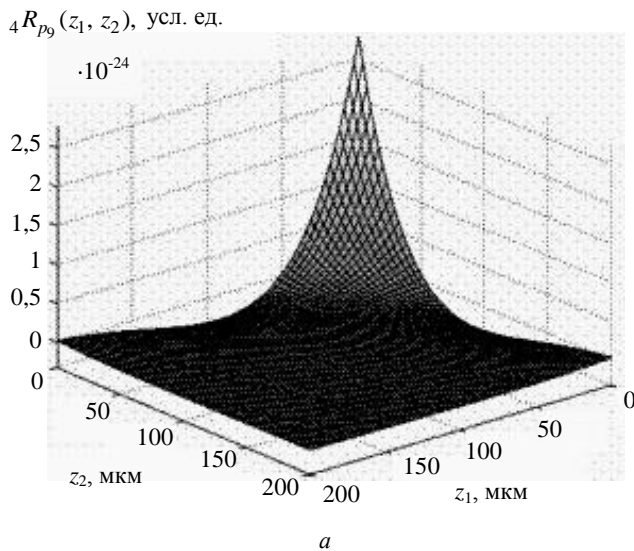


Рис. 2. Усредненные значения (математические ожидания) распределения ННЗ после их диффузии, вычисленные в 9-м приближении при случайном изменении  $D, \tau$  и  $v_s$



**Рис. 3. Автокорреляционные функции распределений ННЗ по глубине, характеризующие линейную статистическую связь между сечениями случайной функции распределения ННЗ на глубине  $z = z_1$  и  $z = z_2$ , вычисленные в 9-м приближении при случайном изменении параметров полупроводника:**  
а —  $\nu_s$ ; б —  $D$ ; в —  $\tau$

## Выводы

1. Разработан приближенно-аналитический метод решения задачи диффузии ННЗ, генерированных в полупроводниковом материале электромагнитным излучением, позволяющий сравнительно просто находить статистические характеристики распределения ННЗ после их диффузии в материале, а именно, математическое ожидание и автокорреляционную функцию. Расчеты учитывают случайные изменения электрофизических параметров полупроводника: коэффициента диффузии, времени жизни и скорости поверхностной рекомбинации ННЗ. Разработанный метод использует проекционную аппроксимацию модели коллективного движения ННЗ.

2. Представленный метод можно считать достаточно универсальным, поскольку его применение не ограничивается гипотезой о нормальности закона распределения указанных электрофизических параметров. Данный метод также можно распространить на любую корректную краевую задачу для любого линейного дифференциального уравнения в частных производных.

3. Анализ полученных результатов показал, что если в рассмотренной модели монокристаллического кремния закон распределения электрофизических параметров будет близок к нормальному усеченному, то величина статистического разброса (среднее квадратическое отклонение) до 100 % коэффициента диффузии и скорости поверхностной рекомбинации ННЗ, а времени жизни до 20 % относительно их средних значений не приведет к значительному (более 15 %) статистическому разбросу распределения ННЗ по глубине относительно его среднего значения. При этом максимум разброса распределения ННЗ при случайном изменении этих параметров находится вблизи поверхности образца.

Исследования проведены при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и правительства Калужской области (проект № 09-02-99027).

## Литература

1. Серегина Е. В., Макаренков А. М., Степович М. А. Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2009. № 6. С. 80.
2. Серегина Е. В., Макаренков А. М., Степович М. А. Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2009. № 10. С. 75.
3. Kyser D. F., Wittry D. B. // Proc. IEEE. 1967. V. 55. No. 3. P. 733.
4. Воробьев Л. Е., Данилов С. Н., Зегря Г. Г. и др. Фотоэлектрические явления в полупроводниках и размерно-квантованных структурах. — Санкт-Петербург: Наука, 2001.

5. Лалин С. В., Егунов Н. Д. Теория матричных операторов и ее приложение к задачам автоматического управления. — М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1997.
6. Петров В. И., Самохвалов А. А., Степович М. А. и др.// Изв. РАН. Сер. физ. 2002. Т. 66. № 9. С. 1310.
7. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. — М.: Физматлит, 2007.
8. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. — М.: Академия, 2005.
9. Куликов Е. И. Прикладной статистический анализ. — М.: Горячая линия-Телеком, 2008.
10. Пупков К. А., Егунов Н. Д., Макаренков А. М. и др. Теория и компьютерные методы исследования стохастических систем. — М.: Физматлит, 2003.
11. Уханов Ю. И. Оптические свойства полупроводников. — М.: Наука. Физматлит, 1977.
12. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Физматлит, 2004.

## Statistical analysis of the distribution of charge minority carriers generated by electromagnetic radiation in a semiconductor material

*E. V. Seregina, M. A. Stepovich*

Kaluga State University,  
26 Stepan Razin str., Kaluga, 248023, Russia  
E-mail: rector@kspu.kaluga.ru

*A. M. Makarenkov*

Kaluga Branch of Bauman Moscow State Technical University,  
2 Bazhenov str., Kaluga, 248600, Russia  
E-mail: mail@bmstu-kaluga.ru

*The projective method has been used for a statistical analysis of the distribution of charge minority carriers generated by electromagnetic radiation in a semiconductor material.*

PACS: 72.10.Bg, 72.20.Jv, 72.40.+w, 78.56.-a

*Keywords:* semiconductors, electrophysical parameters, projective method, an assessment of distribution of minority carriers of a charge.

Bibliography — 12 references.

*Received December 15, 2011*