УДК 681.7.069.24: 53.088

Изменение моды при движении фазового скелета излучения

Б.В. Мелкумян

Представлена теория лазерного акселерометра нового типа. Рассмотрено изменение моды излучения при ускоренном движении в пространстве его резонатора. Получены выражения для частоты, фазы и для разрешённых направлений излучения в жёстком прямоугольном резонаторе, движущемся с постоянным ускорением, в зависимости от ускорения движения резонатора и начального распределения фазы.

PACS: 01.65.+g, 03.30.+p, 07.60.Ly, 42.87.Bg
Ключевые слова: вектор излучения, прямоугольный резонатор, ускорение, фаза, частота.

Введение

В работе представлена теория лазерного акселерометра нового типа. Рассмотрено изменение моды излучения при ускоренном движении в пространстве его резонатора. При этом рассматривается движение в пространстве поля без зарядов под действием внешних сил, которые одновременно сдвигают элементы обрамления излучения, в том числе резонатор и фотоприёмник. Ускорение элементов обрамления, закреплённых на движущемся объекте, определяется через параметры излучения, если у поля, движущегося как целое, есть «фазовый скелет», неизменный за время движения.

Мы предположили, что неравномерное движение источника света приводит к появлению у поля излучения в собственной системе отсчёта комплексной фазы, определяемой ускорением источника и пространственными параметрами фазовой структуры источника, поскольку наблюдалось нелинейное изменение интенсивности излучения и появление дополнительных, не дифракционных пучков при движении резонатора. Данное предположение подтвердилось экспериментально и теоретически [1─8, 10].

Изменение состояния света, или его полной фазы, исследовались теоретически и экспериментально в неравномерно движущейся системе небольшого размера [3─5], когда все вещественные элементы резонатора лазера и элементов обрамления остаются неподвижными друг относительно друга.

В инерциальной системе отсчёта излучение в резонаторе ─ это стоячая волна (одномодовый режим), или совокупность стоячих волн (многомодовый режим).

Мелкумян Баграт Владимирович, докторант[1], доцент[2].
[1]Институт общей физики РАН.
Россия, 119991, Москва, ул. Вавилова, 38.
[2]Московский университет им. С.Ю. Витте.
Россия, 115432, Москва, 2-й Кожуховский проезд, 12
Тел.: +7 495-500-03-63, доб. 41-29.
E-mail: bgo@bk.ru

Статья поступила в редакцию 25 апреля 2014 г.

Уравнение для частоты излучения в ускоренном резонаторе

В [2, 7, 8] приведено общее уравнение движения линейного багрона, или динамической системы собственных мод излучения в линейном резонаторе. Рассмотрим подробнее его решение в случае равноускоренного движения. Общее уравнение движения линейного багрона, занимающего односвязную область, имеет вид:

$$\begin{aligned}&\ddot{\Phi}(\vec{r},t)-\left\{\frac{3}{2}a^2t^2\right\}\Delta\Phi(\vec{r},t)=\\&=\dot{\omega}-\left(\vec{\dot{S}}\cdot\vec{\nabla}\right)\omega-\left(\vec{\ddot{S}}\cdot\vec{\nabla}\right)\cdot\Phi(0)\end{aligned}\qquad(1)$$

Здесь $\Phi(\vec{r},t)$ – фаза, $\omega(\vec{r},t)$ – частота излучения при движении багрона с модулем постоянного ускорения a, $\vec{S}(t)$ – вектор смещения багрона, одинаковый для всех точек его фазового скелета, Φ(0) – распределение фазы излучения в начальный (t = 0) момент времени. Решение (1) ищем в виде суммы общего решения $\Phi^0(\vec{r},t)$ однородного уравнения

$$\ddot{\Phi}^0(\vec{r},t)-\left\{\frac{3}{2}a^2t^2\right\}\Delta\Phi^0(\vec{r},t)=0\qquad(2)$$

и частного решения $\tilde{\Phi}(\vec{r},t)$ уравнения (1).

Решение $\Phi^0(\vec{r},t)$ было получено ранее в [6]. Частное решение для (1) ищем в виде:

$$\tilde{\Phi}(\vec{r},t)=\omega(\vec{r},t)\cdot t-\left(\vec{S}(t)\cdot\vec{\nabla}\right)\cdot\tilde{\Phi}(0).\qquad(3)$$

Отметим, что здесь в (3) частота излучения $\omega(\vec{r},t)$ – неизвестная функция. Вычислив из (3) частные производные для функции $\tilde{\Phi}(\vec{r},t)$, получим из (1) уравнение для частоты:

$$\ddot{\omega}\cdot t+\dot{\omega}+t\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\right)\omega=\left\{\frac{3}{2}a^2t^2\right\}\Delta\tilde{\Phi}.\qquad(4)$$

Уравнение (4) записано относительно неизвестной, возможно, комплексной функции $\omega(\vec{r},t)$ частоты излучения неравномерно движущегося источника. Правая часть (4) определяется пространственной частью частного решения уравнения (1).

Пространственная задача уравнения (2) имеет вид уравнения Гельмгольца:

$$\Delta V^0(\vec{r}) + (\vec{\Xi})^2 \cdot V^0(\vec{r}) = 0 \tag{5}$$

где $V^0(\vec{r})$ – пространственная часть общего решения $\Phi^0(\vec{r},t) = T^0(t)\cdot V^0(\vec{r})$ однородного уравнения (2), $T^0(t)$ – его временная часть, а собственные значения «вектора излучения» $\vec{\Xi}$ определяют разрешённые изменённые направления излучения для каждого значения ускорения резонатора, как в [8]. Общее решение уравнения (5) в прямоугольном резонаторе с двумя выходными зеркалами имеет, как было показано ранее в [2, 4], следующий вид:

$$V^0(\vec{r}) = i\cdot C(t)\cdot \sin(\vec{\Xi}\cdot\vec{r}). \tag{6}$$

Здесь функция $C(t)$ – произвольная и не зависящая от $\vec{r}$ вещественная функция. Лапласиан в правой части (4), с учётом вида функции (6), запишем как:

$$\Delta\tilde{\Phi} = -i\cdot(\vec{\Xi})^2\cdot\sin(\vec{\Xi}\cdot\vec{r}). \tag{7}$$

С учётом (7) уравнение (4) примет вид:

$$\begin{aligned}&\ddot{\omega}\cdot t + \dot{\omega} + t\cdot(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\omega = \\ &= -i\frac{3}{2}(\vec{a})^2 t^2 (\vec{\Xi})^2\cdot\sin(\vec{\Xi}\cdot\vec{r})\end{aligned} \tag{8}$$

Решение уравнения (8) для комплексной частоты излучения неравномерно движущегося линейного багрона ищем в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения уравнения (8):

$$\omega(\vec{r},t) = \omega^0(\vec{r},t) + \tilde{\omega}(\vec{r},t). \tag{9}$$

Однородная часть уравнения (8) имеет вид уравнения:

$$\ddot{\omega}^0\cdot t + \dot{\omega}^0 + t\cdot(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\omega^0 = 0. \tag{10}$$

Оно допускает разделение переменных общего однородного решения в виде:

$$\frac{\ddot{\omega}_t^0}{\omega_t^0} + \frac{\dot{\omega}_t^0}{t\cdot\omega_t^0} = -\frac{(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\omega_r^0}{\omega_r^0} = -\nu^2. \tag{11}$$

В уравнении (11) разделительная постоянная ν^2 не зависит от переменных $(\vec{r},t)$. Для каждой из переменных получим, соответственно, следующие уравнения:

$$t\cdot\ddot{\omega}_t^0 + \dot{\omega}_t^0 + \nu^2\cdot t\cdot\omega_t^0 = 0. \tag{12}$$

$$(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\omega_r^0 = \nu^2\cdot\omega_r^0. \tag{13}$$

Временная часть общего однородного решения для частоты

Уравнение (12) является частным случаем уравнения Бесселя:

$$x\cdot y'' + y' + \lambda\cdot x\cdot y = 0. \tag{14}$$

Если в уравнение (14) подставить значения $y(x) = \omega_t^0$ и $\lambda = \nu^2$, то решение, ограниченное в нуле, примет вид:

$$\omega_t^0(t) = C_t\cdot J_0(\nu,t). \tag{15}$$

Частоты, запрещённые к генерации

Частоты ν_k, запрещённые к генерации в резонаторе, движущегося с постоянным ускорением, определяются нулями α_k функции Бесселя с нулевым индексом J_0. Тогда

$$\nu_k\cdot t = \alpha_k. \tag{16}$$

Пространственная часть общего однородного решения для частоты

Уравнение для пространственной составляющей (13) будем решать, разделив переменные для прямоугольного резонатора, а именно:

$$\begin{aligned}&\frac{a_x}{\omega_x^0}\frac{\partial(\omega_x^0)}{\partial x} + \frac{a_y}{\omega_y^0}\frac{\partial(\omega_y^0)}{\partial y} + \\ &+ \frac{a_z}{\omega_z^0}\frac{\partial(\omega_z^0)}{\partial z} = \nu^2.\end{aligned} \tag{17}$$

Введём в (17) соответствующие разделительные постоянные:

$$\frac{a_x}{\omega_x^0}\frac{\partial(\omega_x^0)}{\partial x} = \nu_x^2;$$

$$\frac{a_y}{\omega_y^0}\frac{\partial(\omega_y^0)}{\partial y} = \nu_y^2;$$

$$\frac{a_z}{\omega_z^0}\frac{\partial(\omega_z^0)}{\partial z} = \nu_z^2;$$

так, чтобы выполнялось соотношение:

$$\nu^2 = \nu_x^2 + \nu_y^2 + \nu_z^2. \tag{19}$$

Введём координаты (компоненты) вектора излучения:

$$\Xi_x = \frac{\nu_x^2}{a_x};\quad \Xi_y = \frac{\nu_y^2}{a_y};\quad \Xi_z = \frac{\nu_z^2}{a_z}. \tag{20}$$

Следовательно,

$$\nu^2 = (\vec{\Xi}\cdot\vec{a}) = const. \tag{21}$$

Как видим из (21), для любого ускорения существует свой вектор излучения $\vec{\Xi}$. Другими словами, каждое неравномерное движение определяет соответствующее направление излучения. Из соотношений (18)-(21) следуют решения для частот излучения:

$$\begin{aligned}&\ln(\omega_x^0) = \Xi_x x + \bar{C}_x;\\ &\ln(\omega_y^0) = \Xi_y y + \bar{C}_y;\\ &\ln(\omega_z^0) = \Xi_z z + \bar{C}_z;\end{aligned} \tag{22}$$

Для констант в (22) введем обозначения:

$$C_x = \exp\left(\bar{C}_x\right); \quad C_y = \exp\left(\bar{C}_y\right); \quad C_z = \exp\left(\bar{C}_z\right);$$

Пространственное решение (21) однородной части примет вид:

$$\omega_r^0\left(\vec{r}\right) = C_x C_y C_z \cdot \exp\left(\vec{\Xi}\cdot\vec{r}\right). \tag{23}$$

Выражения (14.1), (20) и (23) определяют общее решение однородного уравнения для частоты излучения:

$$\omega^0\left(\vec{r},t\right) = C_t C_x C_y C_z \cdot J_0\left(\sqrt{\left(\vec{\Xi}\cdot\vec{a}\right)}\cdot t\right)\cdot \exp\left(\vec{\Xi}\cdot\vec{r}\right). \tag{24}$$

Как видим, величина (24) равна нулю при нулевом ускорении. Она не удовлетворяет начальным условиям, когда резонатор неподвижен, или движется с нулевым ускорением, а излучение никто не выключал. Поэтому мы ожидаем, что частное решение для (12) должно содержать частоту излучения неподвижного резонатора.

Проверим решение (24) для однородного уравнения (14), учитывая очевидное:

$$\frac{d}{dt}\left(t\cdot\frac{d\omega^0}{dt}\right) = \ddot{\omega}^0\cdot t + \dot{\omega}^0, \tag{25}$$

и правила дифференцирования функций Бесселя [9] для ($x = \nu t$) в виде:

$$\frac{d}{dt}\left(t\cdot\frac{d}{dt}\left(J_0\left(\nu t\right)\right)\right) = -\left(\nu^2 t\right)\cdot J_0\left(\nu t\right). \tag{26}$$

Подставив (26) в (25) и (14), получим тождество (с учетом (21)):

$$-\left(\nu^2 t\right)\cdot J_0\left(\nu t\right)\cdot \exp\left(\vec{\Xi}\cdot\vec{r}\right) + \\ +\left(\vec{\Xi}\cdot\vec{a}\right)\cdot t\cdot J_0\left(\nu t\right)\cdot \exp\left(\vec{\Xi}\cdot\vec{r}\right) = 0$$

Частное решение уравнения для частоты излучения

Для определения частного решения уравнения для частоты (12), запишем его, с учётом (25), для функции $\tilde{\omega}\left(\vec{r},t\right)$ в виде:

$$\frac{d}{dt}\left(t\cdot\frac{d\tilde{\omega}}{dt}\right) + t\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\right)\tilde{\omega} = \\ = -i\cdot\frac{3}{2}\left(\vec{a}\right)^2 t^2\left(\vec{\Xi}\right)^2 \sin\left(\vec{\Xi}\cdot\vec{r}\right). \tag{27}$$

Будем искать частное решение для (27), при котором выполняется условие:

$$t\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\right)\tilde{\omega} = 0. \tag{28}$$

С учётом (28), уравнение примет вид:

$$\frac{d}{dt}\left(t\cdot\frac{d\tilde{\omega}}{dt}\right) = \\ = -i\cdot\frac{3}{2}\left(\vec{a}\right)^2 t^2\left(\vec{\Xi}\right)^2 \sin\left(\vec{\Xi}\cdot\vec{r}\right). \tag{29}$$

Проинтегрировав (29) дважды по t, получим следующую цепочку соотношений:

$$\int d\left(t\cdot\frac{d\tilde{\omega}}{dt}\right) = \\ = -i\frac{3}{2}\cdot\left(\vec{a}\right)^2\cdot\left(\vec{\Xi}\right)^2 \sin\left(\vec{\Xi}\cdot\vec{r}\right)\cdot\int t^2 dt;$$

$$t\cdot\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \\ = -i\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\vec{a}\right)^2\cdot\left(\vec{\Xi}\right)^2\cdot t^3\cdot\sin\left(\vec{\Xi}\cdot\vec{r}\right) + C_1;$$

$$\int d\tilde{\omega} = \\ = -\frac{i}{2}\cdot\left(\vec{a}\right)^2\cdot\left(\vec{\Xi}\right)^2\cdot\sin\left(\vec{\Xi}\cdot\vec{r}\right)\cdot\int t^2 dt + \\ +\int\frac{C_1}{t}dt;$$

$$\tilde{\omega} = -\frac{i}{6}\cdot\left(\vec{a}\right)^2\cdot\left(\vec{\Xi}\right)^2\cdot t^3\cdot\sin\left(\vec{\Xi}\cdot\vec{r}\right) + \\ +C_1\cdot\ln\left(t\right) + C_0. \tag{30}$$

Определим константы в (30) из начальных условий, когда $\tilde{\omega}\left(t=0;\ \vec{a}=0\right) = \omega_0$. Чтобы избежать особенностей в начальный момент времени, в таком случае в (30) должно быть $C_1 = 0;\ C_0 = \omega_0$. Тогда частное решение для частоты запишем в виде:

$$\tilde{\omega} = \omega_0 - i\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\left(\vec{a}\right)^2\cdot t^3}{4}\cdot\left(\vec{\Xi}\right)^2\cdot\sin\left(\vec{\Xi}\cdot\vec{r}\right). \tag{31}$$

Для частного решения фазы, с учётом (4) и соотношения $\vec{S} = \dfrac{\vec{a}\cdot t^2}{2}$, , получим выражение:

$$\tilde{\Phi} = \left[\omega_0 t - \left(\vec{S}\left(t\right)\cdot\vec{\nabla}\right)\cdot\tilde{\Phi}\left(0\right)\right] - \\ -i\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\vec{S}\left(t\right)\right)^2\cdot\left(\vec{\Xi}\right)^2\cdot\sin\left(\vec{\Xi}\cdot\vec{r}\right). \tag{32}$$

Разрешённые направления излучения при неравномерном движении

Вспомним, что формулы (31) и (32) получены при выполнении «частного случая» (28). Подставив (31) в (28), получим следующие соотношения:

$$t\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\right)\tilde{\omega} = \\ = -i\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\vec{S}\left(t\right)\right)^2\cdot\left(\vec{\Xi}\right)^2\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\right)\sin\left(\vec{\Xi}\cdot\vec{r}\right) = 0$$

или

$$t\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\right)\tilde{\omega} = \\ = -i\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\vec{S}\right)^2\cdot\left(\vec{\Xi}\right)^2\cdot\left(\vec{\Xi}\cdot\vec{a}\right)\cdot\cos\left(\vec{\Xi}\cdot\vec{r}\right) = 0. \tag{33}$$

Как видим из (33), условие (28) выполняется, если:

а) резонатор движется равномерно и прямолинейно, когда $\vec{a} = 0$;

б) резонатор движется перпендикулярно вектору излучения, т.е. $\vec{a} \perp \vec{\Xi}$;

в) выполняется условие:

$$\cos\left(\vec{\Xi} \cdot \vec{r}\right) = 0. \qquad (34)$$

Условие (34) выполняется в точках пространства, в которых справедливо равенство:

$$\left(\vec{\Xi} \cdot \vec{r}\right) = \pi \cdot \left(k + \frac{1}{2}\right). \qquad (35)$$

где k – любое целое число, и на линиях, определяемых уравнениями:

$$\Xi_x \cdot x + \Xi_y \cdot y + \Xi_z \cdot z = \\ = \pi\left(k + \frac{1}{2}\right). \qquad (36)$$

Уравнения (36) определяют положение рукавов излучения резонатора в пространстве при тех же целых значениях k, как И в (35).

Заключение

Частоты, фазы и разрешённые направления излучения в ускоренном резонаторе определяются ускорением, начальным распределением фазы и геометрией резонатора.

Идентификация вида выходных сигналов и параметров движения ускоренных резонаторов лазеров позволит создавать лазерные акселерометры нового типа [10] и системы на их основе для измерения параметров движения в широких диапазонах.

Автор выражает свою глубокую благодарность участникам теоретического семинара в Институте общей физики им. А.М. Прохорова РАН за плодотворные обсуждения.

Литература

1. *Melkoumian B.V.* // Proceedings of the 11th International Workshop on Magneto-Plasma Aerodynamics (Abstracts), Joint Institute of High Temperature of RAS, Moscow, April 10-12, 2012, p. 131-132.

2. *Melkoumian B.V.* // Proceedings of the 11th Workshop on Magneto-Plasma Aerodynamics. Ed. V. A. Bityurin, Moscow, Joint Institute of High Temperature of RAS, 2012, pp. 366-372.

3. *Melkoumian B.V. //* Peoceedings of the 12th International Workshop on Magneto-Plasma Aerodynamics (Abstracts), Moscow, 26-28 March, 2013, Joint Institute of High Temperature of RAS, pp. 126-127.

4. *Melkoumian B.V.* // Proceedings of SPIE. 2007. No. 6736. P. 67360B-1.

5. *Melkoumian B.V.* // SPIE paper. 2007. No. 6736-12. P. 67360D-1

6. *Melkoumian B.V.* // Proceedings of SPIE. 2000. V. 4348. P. 4348-02.

7. *Мелкумян Б.В.* // Успехи прикладной физики. 2014. Т. 2. № 3. С. 322.

8. *Мелкумян Б.В.* // Краткие сообщения по физике. 2014. № 2, в печати.

9. *Ватсон Г.* Теория бесселевых функций. – М.: Иностранная литература, 1949.

10. *Melkoumian B.V.* “Method and device for autonomous measurement of an irregular movement based on resonatory sensor”. Application № 08/568,815; priority date: Dec. 07, 1995; US patent № 5,652,390; date of patent: July 29, 1997. Class: 073-657.000.

Change of the mode at movement of a radiation phase skeleton

B. V. Melkoumian

A. M. Prokhorov General Physics Institute, RAS
38 Vavilov str., Moscow, 119991, Russia
E-mail: bgo@bk.ru

Received April 25, 2014

The theory of a new laser accelerometer is presented. Change of the resonator mode has been considered at movement of a radiation phase skeleton.

PACS: 01.65.+g, 03.30.+p, 07.60.Ly, 42.87.Bg
*Keywords***:** radiation vector, rectangular resonator, acceleration, phase, frequency.

References

1. B.V. Melkoumian, in *Proceedings of the 11th International Workshop on Magneto-Plasma Aerodynamics* (Abstracts, Joint Institute of High Temperature of RAS, Moscow, April 10-12, 2012), pp. 131-132.
2. B.V. Melkoumian, in *Proceedings of the 11th Workshop on Magneto-Plasma Aerodynamics.* Ed. V. A. Bityurin (Moscow, Joint Institute of High Temperature of RAS, 2012), pp. 366-372.
3. B.V. Melkoumian, in *Peoceedings of the 12th International Workshop on Magneto-Plasma Aerodynamics* (Abstracts, Moscow, 26 - 28 March, 2013, Joint Institute of High Temperature of RAS), pp. 126-127.
4. B.V. Melkoumian, Proceedings of SPIE, No. 6736, 67360B-1 (2007).
5. B.V. Melkoumian, SPIE paper, No. 6736-12, 67360D-1 (2007)
6. B.V. Melkoumian, Proceedings of SPIE. **4348,** 4348-02 (2000)
7. B.V. Melkoumian, Uspekhi Prikladnoi Fiziki **2,** 322 (2014)
8. B.V. Melkoumian, Bulletin of the Lebedev Physics Institute, No. 2, (2014).
9. G, Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* (London, 1945; Inostrannaya Literarura, Moscow, 1949)
10. B.V. Melkoumian, “Method and device for autonomous measurement of an irregular movement based on resonatory sensor”. Application № 08/568,815; priority date: Dec. 07, 1995; US patent № 5,652,390; date of patent: July 29, 1997. Class: 073-657.000.