Общая физика

УДК 538.956

Статистическое описание флуктуаций тока через конденсатор с приложенным к нему случайным напряжением

А.Н. Морозов, А.В. Скрипкин

Исследуется протекание тока через конденсатор, заполненный диэлектриком, релаксация которого после скачка напряжения выражается степенным законом Кюри – фон Швайдлера. Показано, что при случайном изменении напряжения, подаваемого на конденсатор, флуктуации тока через него относятся к классу немарковских процессов. Найдены статистические характеристики указанных флуктуаций.

PACS: 05.40.Ca, 77.22.Gm

Ключевые слова: конденсатор, диэлектрик, закон Кюри – фон Швайдлера, немарковский процесс.

Введение

Изменение напряжения, подаваемого как на идеальный (без заполняющего диэлектрика) конденсатор, так и на конденсатор, межэлектродное пространство которого заполнено диэлектрической средой, приводит к изменению тока в цепи. В частности, скачок напряжения на идеальном конденсаторе, происшедший в момент времени t_0, порождает дельта-импульс тока на нем [1]. Другими словами, если напряжение подчиняется закону

$$U(t)=\begin{cases}U_0=\text{const}, & t<t_0;\\ U_0+\Delta U(t_0)=\text{const}, & t>t_0,\end{cases} \tag{1}$$

то через вакуумный конденсатор пройдет ток

$$I_0(t)=C_0\Delta U(t_0)\delta(t-t_0), \tag{2}$$

где C_0 – емкость (геометрическая емкость) конденсатора, $\delta(x)$ – дельта-функция.

В том случае, если между электродами конденсатора находится диэлектрик, к импульсу тока (2) добавится ток $I_1(t)$, связанный с наличием этой диэлектрической среды, и монотонно спадающий с течением времени (это связано с необратимыми потерями энергии в среде). Суммарный ток, текущий через неидеальный конденсатор после скачка напряжения, таким образом, равен

$$I(t)=I_0(t)+I_1(t). \tag{3}$$

Релаксация тока $I_1(t)$ в простейшем случае (модель Дебая) описывается экспоненциальной функцией

$$I_1(t)=I_1(\tau)\exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right),\quad \tau>0. \tag{4}$$

Данная формула может быть получена, если потери энергии в диэлектрике учитывать путем введения в схему замещения резистора. Функция (4) позволяет использовать для описания процессов релаксации тока в конденсаторе дифференциальные операторы. В частности, случайные изменения тока с моделью релаксации (4) приводят к стохастическим дифференциальным уравнениям, теория которых в настоящее время хорошо разработана [2]. Сами флуктуации тока в этом случае будут относиться к классу марковских случайных процессов.

Однако проведенные более ста лет назад эксперименты [3, 4] показали, что модель (4) справедлива лишь на очень коротком начальном участке спада тока. Подавляющую же часть времени релаксация тока через конденсатор, связанная с наличием диэлектрика, происходит по степенному закону

$$I_1(t)=\frac{A\Delta U(t_0)}{(t-t_0)^{1-\alpha}},\quad t>t_0, \tag{5}$$

где A – некоторая постоянная, параметр α заключен в пределах $0<\alpha<1$. Закон релаксации (5) называют законом Кюри – фон Швайдлера. Указанный закон подвергался многочисленной проверке в широком временном интервале. В частности, для высокомолекулярных диэлектриков (полистирен, полипропилен и др.) он показал хорошее согласие с опытом [5], причем параметр α для таких диэлектриков оказался близок к нулю.

Интегральное стохастическое уравнение

Пусть теперь напряжение, подаваемое на конденсатор, характеризуется не однократным скачком в момент времени t_0, а его непрерывным изменением: $\Delta U=\Delta U(t)$.

Морозов Андрей Николаевич, профессор, заведующий кафедрой.
Скрипкин Алексей Владимирович, доцент.
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
Россия, 105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, 5.
Тел.: 8 (499) 263-63-68.
E-mail: amor@mx.bmstu.ru; skripkin@bmstu.ru

Статья поступила в редакцию 20 февраля 2014 г.

В этом случае, очевидно, ток $I_1(t)$ выражается интегралом

$$I_1(t) = A\int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1-\alpha}} dU(\tau). \qquad (6)$$

В последней формуле предполагается, что при $t < 0$ напряжение на конденсатор не подается.

Будем далее считать, что под действием внешних факторов (флуктуации в цепи и т.п.), напряжение $U(t)$ на конденсаторе будет представлять собой гауссов процесс. Тогда дифференциал $dU(t)$ может быть записан в виде $dU(t) = \xi(t)dt$, где $\xi(t)$ – белый шум с интенсивностью σ. Выражение (6) запишется в виде

$$I_1(t) = A\int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \xi(t)d\tau. \qquad (7)$$

Полученное интегральное стохастическое уравнение не сводится к конечной системе дифференциальных операторов, а поэтому описываемые им флуктуации тока $I_1(t)$ будут представлять собой немарковский случайный процесс [6]. Заметим, что марковская модель, вообще говоря, является лишь первым приближением, реальные же процессы будут в общем случае немарковскими. Так, в частности, движение броуновской частицы в вязкой среде, учитывающее увлечение ею окружающих частиц среды [7], процессы теплопроводности [8], диффузии [9] и многие другие процессы более точно описываются с использованием немарковской модели.

Статистические характеристики

Будем далее полагать, что флуктуации тока, вызванные изменением напряжения на конденсаторе, связаны, в основном, с наличием диэлектрика. Ввиду этого, будем искать статистические характеристики тока $I_1(t)$, считая их аналогичными характеристикам общего тока $I(t)$. Воспользуемся методом описания немарковских процессов, задаваемых линейными интегральными уравнениями, разработанным в [10]. Для одномерной характеристической функции $g_1(\lambda; t)$ получим

$$g_1(\lambda;t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma\lambda^2 \frac{A^2}{2\alpha-1} t^{2\alpha-1}\right). \qquad (8)$$

Найденная функция позволяет найти моменты любого порядка случайного процесса $I_1(t)$. В частности, для математического ожидания и дисперсии получим

$$\langle I_1(t)\rangle = \left.\frac{\partial g_1(\lambda;t)}{i\partial\lambda}\right|_{\lambda=0} = 0, \qquad (9)$$

$$\langle I_1^2(t)\rangle = -\left.\frac{\partial^2 g(\lambda;t)}{\partial\lambda^2}\right|_{\lambda=0} = \sigma\lambda^2 \frac{A^2}{2\alpha-1} t^{2\alpha-1}. \qquad (10)$$

Заметим, что записанные формулы (8)–(10) справедливы при $\alpha > \frac{1}{2}$. Для важного случая, когда заполняющим межэлектродное пространство конденсатора диэлектриком является высокомолекулярное соединение (как было указано выше, для таких диэлектриков можно считать $\alpha = 0$), получим

$$g_1(\lambda;t) = \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma\lambda^2 A^2\left(\frac{1}{\delta t} - \frac{1}{t}\right)\right], \qquad (11)$$

где δt – характерное время, близкое к времени хаотизации диэлектрической среды. Его можно оценить по формуле

$$\delta t = \frac{1}{c}\left(\frac{\mu}{\rho N_A}\right)^{1/3}, \qquad (12)$$

где c – скорость звука в диэлектрике, μ и ρ – его молярная масса и плотность соответственно, N_A – число Авогадро.

Математическое ожидание $\langle I_1(t)\rangle$ в рассматриваемом случае, как и прежде, равно нулю, а дисперсия $\langle I_1^2(t)\rangle$ выражается соотношением

$$\langle I_1^2(t)\rangle = \sigma\lambda^2 A^2\left(\frac{1}{\delta t} - \frac{1}{t}\right). \qquad (13)$$

Для определения спектральной плотности мощности флуктуаций тока $I_1(t)$, проведем преобразование Лапласа исходного уравнения (7). Получим

$$\tilde{\Gamma}_1(p) = \frac{\Gamma(\alpha)}{p^\alpha}\tilde{\xi}(p), \qquad (14)$$

где p – параметр преобразования, $\tilde{\Gamma}_1(p)$ и $\tilde{\xi}(p)$ – преобразование Лапласа соответствующих функций, $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция.

Из выражения (14) для искомой спектральной мощности находим

$$G_{I_1}(\omega) = \frac{\sigma\Gamma^2(\alpha)}{\omega^{2\alpha}}. \qquad (15)$$

Заметим, что полученное выражение справедливо уже при любых α из диапазона возможных значений параметра. Из соотношения (15) видно, что флуктуации тока $I_1(t)$ относятся к одному из типов так называемых цветных шумов. В частности, при $\alpha = \frac{1}{2}$ ток будет испытывать флуктуации типа фликкер-шум [11]. При $\alpha = 0$ (высокомолекулярные диэлектрики), как видно из (15), спектральная плотность $G_{I_1}(\omega)$ будет иметь характер белого шума. Это связано, по-видимому, с большими временами релаксации среды в этом случае.

Заключение

В работе показано, что экспериментально установленная степенная релаксация диэлектрика в конденсаторе приводит к немарковскому характеру флуктуаций тока в нем при наличии случайной составляющей в подаваемом на конденсатор напряжении. Спектральная плотность мощности установившихся флуктуаций тока имеет степенной (цветной) характер.

Литература

1. *Westerlund S.* // Physica Scripta. 1991. V. 43. P. 174.

2. *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. – М.: Наука, 1990.
3. *Curie M.J.* // Annales de chimie et de physique. Ser. 6. 1889. V. 18. P. 203.
4. *Schweidler von E.R.* // Annalen der Physik. 1907. V. 24. P. 711.
5. *Nutting, P. G.* // Journal of Franklin Institute. 1921. V. 191. P. 679.
6. *Морозов А.Н.* Необратимые процессы и броуновское движение. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1997.
7. *Morozov A.N., Skripkin A.V.* // Physics Letters A. 2011. V. 375. P. 4113.
8. *Морозов А.Н., Скрипкин А.В.* // Инженерно-физический журнал. 2011. Т. 84. № 6. С. 1121.
9. *Морозов А.Н., Скрипкин А.В.* // Известия вузов. Физика. 2010. Т. 53. № 11. С. 55.
10. *Морозов А.Н.* // Вестник МГТУ. Естественные науки. 2004. № 3. С. 47.
11. *Бочков Г.Н., Кузовлев Ю.Е.* // Успехи физических наук. 1983. Т. 141. С. 151.

Statistical description of the current fluctuations through a capacitor with a random superposed voltage

A. N. Morozov and A. V. Skripkin

Bauman Moscow State Technical University
5 2-nd Baumanskaya str., Moscow, 105005, Russia
E-mail: skripkin@bmstu.ru

Received February 20, 2014

Investigated is the flow of a current through a capacitor filled with a dielectric. A current relaxation after a power surge is expressed by the power Curie - von Schweidler law. It is shown that at the random changes in the voltage applied to the capacitor, the current fluctuations there through are classified as non-Markov processes. The statistical characteristics of these fluctuations have been founded.

PACS: 05.40.Ca, 77.22.Gm
Keywords: capacitor, dielectric, Curie – von Schweidler law, non-Markov process.

References

1. S. Westerlund, Physica Scripta **43**, 174 (1991).
2. V. S. Pugachev and I. N. Sinitsin, *Stochastic Differential Syst*ems (Nauka, Moscow, 1990) [in Russian].
3. M. J. Curie, Annales de Chimie et de Physique. Ser. 6., **18,** 203 (1889).
4. E. R. von Schweidler, Annalen der Physik **24,** 711 (1907).
5. P. G. Nutting, Journal of Franklin Institute **191,** 679 (1921).
6. A. N. Morozov, *Irreversible Processes and Brownian Motion* (MGTU, Moscow, 1997) [in Russian].
7. A. N. Morozov and A. V. Skripkin, Physics Letters A, **375,** 4113 (2011).
8. A. N. Morozov and A. V. Skripkin, Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal **84.** 1121 (2011).
9. A. N. Morozov and A. V. Skripkin, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Fizika, **53** (11), 55 (2010).
10. A. N. Morozov, Vestnik MGTU, Estestven, Nauki, No. 3, 47 (2004).
11. G. N. Bochkov and Yu. E. Kuzovlev, Usp. Phys. **141,** 151 (1983).