УДК 533.537

РЕЗУЛЬТАТЫ И ПРОБЛЕМЫ ГЕОМЕТРИЗОВАННОЙ ТЕОРИИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ

В. А. Сыровой
РГНЦ "Всероссийский электротехнический институт", Москва, Россия

Представлен обзор результатов геометризованной теории плотных электронных пучков одного из новых разделов корпускулярной оптики. Обсуждаются задачи синтеза непараксиальных релятивистских потоков, вопросы построения приближенных методов решения и численного интегрирования геометризованных уравнений пучка, а также проблемы, возникающие при дальнейшем развитии теории.

ТЕРМИНОЛОГИЯ И ИСТОРИЯ ВОПРОСА

При решении задачи синтеза — задачи о расчете потока с некоторыми наперед заданными свойствами — естественно строить теорию в системе координат, связанной с геометрией потока. Так, можно требовать, чтобы координатные линии совпадали с траекториями частиц или чтобы одно из семейств координатных поверхностей описывало трубки тока. При рассмотрении осесимметричных течений в магнитном поле, например, второй подход представляется более простым, так как трубки тока при этом являются поверхностями вращения, а траектории частиц — сложными пространственными спиралями, навитыми на эти поверхности. Поскольку геометрия потока заранее неизвестна, неизвестна и связанная с ней система координат, в которой мы хотели бы работать. Ясно, однако, что свойства системы и физические параметры среды при таком подходе перестают быть независимыми. В качестве предельного выражения этой связи можно говорить о полном сведении физической задачи о расчете электронного пучка к геометрической проблеме определения соответствующей системы координат (полная геометризация).

Аналогичная задача ставится в классических вариантах единой теории поля (геометродинамика Уилера), откуда и перенята терминология, обозначающая название обсуждаемого нами нового раздела теории плотных электронных пучков.

Идея о введении системы координат, связанной с геометрией течения, впервые появилась в работах [1, 2], разделенных небольшим промежутком времени, в связи с теорией однокомпонентных течений, т. е. течений, которые в выбранной системе координат имеют только одну компоненту скорости. При этом координатные линии x^1 криволинейной системы совпадают с траекториями частиц. Система, связанная с трубками тока, предложена в работе [3].

Использование криволинейных систем в математической физике диктуется либо соображениями удобства, либо они возникают в связи с проблемой разделения переменных при решении исследуемого уравнения. Так, приводящиеся в справочниках по методам математической физики одиннадцать криволинейных ортогональных систем возникли в результате совместного анализа уравнения Шредингера и шести тождеств Ляме, которым удовлетворяют коэффициенты Ляме ортогональной системы [4—6].

В соответствии со взглядом, принятым на криволинейные системы [1—3], они предполагались ортогональными, а задача теории однокомпонентных течений, о которой мы еще будем говорить, сводилась к априорному выбору координат, а не к их расчету.

Подход, аналогичный [4] в применении к электронным пучкам, выявил четыре ортогональные системы (декартовы, цилиндрические, спиральные и сферические координаты), в которых возможны однокомпонентные течения [7].

Теория однокомпонентных потоков, результаты и заблуждения которой подробно проанализированы в [8], представляет собой предысторию геометризованной теории.

Первым примером последовательно геометризованного подхода, в котором, однако, явно прослеживаются черты теории однокомпонентных пучков, является работа [9], посвященная синтезу непараксиальных нерелятивистских электростатических потоков, допускающих использование ортогональных координат. Высшее приближение для тонких трубчатых потоков построено в [10]. В работе [9] предложен способ численного решения задачи Коши для системы с мнимыми характеристиками, основанный на идее аналитического продолжения уравнений пучка и переходе в комплексное пространство, где эти характеристики становятся действительными. Метод, изложенный в работе [9], явился обобщением алгоритмов численного интегрирования уравнения Лапласа применительно к проблеме определения формирующих электродов [11]. Подход [11], в свою очередь, основывался на результатах расчетов околозвуковых газовых потоков [12]. Последнее замечание особенно интересно в свете взаимного обмена идеями между оптикой плотных пучков и механикой жидкости, о котором сейчас пойдет речь.

В механике жидкости известно, что поле скорости может быть задано не только тремя проекциями на координатные оси, но и с помощью переменных Клебша ξ, η, ζ

$$\vec{v} = \nabla\xi + \eta\nabla\zeta. \tag{1}$$

Из выражения (1) следует, что траектории не всегда могут быть включены в ортогональную тройку. На это можно надеяться в случае потенциальных потоков, когда второй член в (1) отсутствует, и траектории, по определению градиента, ортогональны поверхностям ξ = const. Однако формула (1) не дает ответа на вопрос о минимальной "степени неортогональности" системы, к которой естественно стремится, и о варианте геометризации, связанном с трубками тока.

В теории вязких сверхзвуковых струй существует подход, основанный на использовании укороченных уравнений Навье-Стокса, в которых опущены вторые производные по продольной координате. Эта операция помогает избежать проблем, возникающих при численном решении задачи Коши для уравнений с мнимыми характеристиками, которая является некорректной в классическом смысле. Однако для сильно недорасширенных струй линии тока составляют значительный угол с осью симметрии, что не позволяет работать в координатах z, R и отбрасывать вторые производные по z. Вместе с тем ясно, что необходимая операция легко осуществляется в системе координат типа [9], связанной с геометрией течения, хотя теперь, в отличие от [9], задача формулируется в общем виде с использованием заранее неизвестной неортогональной системы [13, 14]. В дальнейшем результаты работы [13, 14] были перенесены не геометризованную теорию пространственных релятивистских пучков [15—18].

С основными понятиями тензорного анализа, обозначения которого используются ниже, можно ознакомиться в [19, 20]. Для эмиссии, ограниченной пространственным зарядом и температурой, примем термины: эмиссия в ρ-режиме, эмиссия в T-режиме.

ГЕОМЕТРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ПУЧКА

Тензорная форма уравнений пучка. Формулировку геометризованных уравнений пучка и возникающие при этом проблемы удобно продемонстрировать на примере нерелятивистских потоков в заданном внешнем магнитном поле. Подобное течение описывается уравнениями движения, уравнением сохранения тока и уравнением Пуассона. В первой строке приведены уравнения в векторной форме, во второй — их тензорная запись:

$$\nabla H = \vec{v} \times \vec{R},\ \mathrm{div}\,(\rho \vec{v}) = 0,\ \Delta \varphi = \rho,$$
$$H_{,i} = e_{ik\lambda}\, v^k R^\lambda,\ \left(\sqrt{g}\,\rho v^i\right)_{,i} = 0,\ \left(\sqrt{g}\, g^{ik} \varphi_{,k}\right)_{,i} = \sqrt{g}\,\rho \equiv \sigma. \tag{2}$$

Уравнения (2) и последующие соотношения представлены в нормировке, исключающей все физические постоянные.

Здесь и ниже H — полная энергия;

$\vec{R}$ — ротор обобщенного импульса $\vec{P} = \vec{v} + \vec{A}$;

$\vec{A}$ — векторный потенциал;

φ — потенциал электрического поля $\vec{E} = \nabla\varphi$;

ρ — плотность пространственного заряда;

g_{ik} — ковариантный метрический тензор криволинейной системы x^i;

g — его детерминант;

v_i — ковариантные компоненты скорости; верхние индексы при тех же символах используются для обозначения контравариантных объектов;

$e_{ik\lambda}$ — объект, составленный из нулей (два совпадающих индекса) и $\pm\sqrt{g}$ в зависимости от того, четным или нечетным числом перестановок индексы $ik\lambda$ приводятся к набору 123;

v без индекса имеет смысл модуля скорости; нижний индекс после запятой ›значает частную производную о соответствующей координате.

Для H, $\vec{R}$ имеем:

$$H = \frac{1}{2}(v)^2 - \varphi\,,\ \ \vec{R} = \mathrm{rot}\,\vec{P}\,,\ \ R^{\lambda} = e^{jl\lambda}\, P_{l,\,j}\,. \tag{3}$$

Если записать выражение для квадрата расстояния между двумя бесконечно ;лизкими точками, то получится квадратичная форма, коэффициенты которой ›пределяют элементы метрическго тензора

$$(ds)^2 = g_{ik}dx^i dx^k = g_{11}\ (dx^1)^2 + g_{22}\ (dx^2)^2 + g_{33}\ (dx^3)^2 + 2g_{12}dx^1dx^2 + \\ + 2g_{13}dx^1dx^3 + 2g_{23}dx^2dx^3,\ g_{11} \equiv b_1^2, g_{22} \equiv b_2^2, g_{33} \equiv b_3^2\,. \tag{4}$$

Важно отметить, что уравнения пучка в тензорной форме, помимо физических :еременных, включают информацию о системе координат — шесть функций g_{ik}.

Система, связанная с траекториями. Специализируем систему координат x^i, :отребовав, чтобы ось x^1 была направлена вдоль траекторий. При этом лишь ›дна контравариантная компонента скорости v^1 будет отлична от нуля

$$v^1 = \frac{d\,x^1}{d\,t},\ \ v^2 = v^3 = 0,\quad u = b_1 v^1\,. \tag{5}$$

Число искомых физических переменных уменьшилось без уменьшения числа 'равнений: в пять соотношений (2) входят только три функции u, φ, ρ. Вспомним, ›днако, что система координат, определяемая шестью функциями g_{ik}, является :еизвестной. Пространство, в котором мы работаем — пространство класси-еской физики — является эвклидовым пространством. Условия эвклидовости в ,ифференциальной геометрии [19, 20] выражаются равенством нулю тензора 'имана-Кристоффеля

$$R_{\beta\gamma\lambda\mu} = 0. \tag{6}$$

В трехмерном пространстве этот тензор имеет 81 компоненту, но среди них олько шесть независимых. Шесть возникающих таким образом равенств назы-аются тождествами Ляме и представляют собой нелинейные уравнения второго :орядка относительно g_{ik}:

$$R_{\beta\gamma\lambda\mu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\beta\mu}}{\partial x^{\gamma}\,\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial^2 g_{\beta\lambda}}{\partial x^{\gamma}\partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\gamma\mu}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial^2 g_{\gamma\lambda}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\mu}}\right) - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\beta}\,\Gamma_{\alpha,\,\mu\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\gamma}\,\Gamma_{\alpha,\,\mu\beta}\,;$$

$$\Gamma_{i,\,\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{i\,\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{i\,\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{i}}\right),\ \ \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = g^{i\lambda}\,\Gamma_{i,\,\alpha\beta}\,. \tag{7}$$

В формулах (7) в обозначении для символов Кристоффеля $\Gamma_{i,\alpha\beta}$ индексы после апятой не относятся к операции дифференцирования.

Разобьем шесть тождеств Ляме (6) на две группы: первая тройка содержит торые производные по x^1

$$R_{2113} = 0;\quad R_{1221} = 0;\quad R_{1331} = 0, \tag{8}$$

а во второй таких производных нет

$$R_{1223} = 0;\quad R_{1332} = 0;\quad R_{2332} = 0. \tag{9}$$

Добавление уравнений (6) к (2) не привело к получению полной системы: теперь мы имеем 11 уравнений относительно 9 искомых функций u, φ, ρ, g_{ik}.

Для выхода из этого затруднительного положения приходится обратиться к результатам общей теории относительности [21], уравнения которой переходят в условия (6) при отсутствии гравитирующих масс и полей, искривляющих пространство.

Задача о расчете пучка, стартующего с поверхности $x^1 = 0$, в геометризованной постановке аналогична задаче Коши для уравнений Эйнштейна в общей теории относительности. Можно показать [13, 14], что условия эвклидовости, подобно уравнениям Эйнштейна, находятся в инволюции: при выполнении (8) в полупространстве $x^1 \geq 0$ и (9) на начальной поверхности $x^1 = 0$ уравнения (9) удовлетворяются тождественно при $x^1 > 0$. Что касается справедливости соотношений (9) при $x^1 = 0$, то на любой поверхности, заданной в эвклидовом пространстве относительно декартовой системы y^i, уравнения (9) превращаются в тождества по определению.

Следовательно, для девяти искомых функций должны быть выполнены лишь восемь уравнений (2), (8). Имеющуюся свободу можно было бы использовать для упрощения метрики в координатах x^i, положив $g_{12} \equiv 0$. Отложим, однако, окончательное решение до постановки задачи Коши для геометризованных уравнений пучка. Будем пока считать, что g_{12} — заданная функция.

Из сказанного выше следует. что траектории немоноэнергетического вихревого пространственного пучка во внешнем магнитном поле могут быть включены в качестве координатных линий лишь в существенно неортогональную систему с пятью, по меньшей мере, отличными от нуля элементами метрического тензора. Переход к моноэнергетическим течениям или вихревым потокам в отсутствие магнитного поля не упрощает ситуацию по сравнению с общим случаем.

Для потенциальных электростатических течений существование потенциала скорости

$$v_i = W_{,i} \tag{10}$$

позволяет использовать “более ортогональную” систему, в которой

$$g_{12} = g_{13} = 0, \qquad g_{23} \neq 0. \tag{11}$$

Параметры потока при этом легко выражаются через метрику

$$u = b_1^{-1}; \qquad 2\varphi = b_1^{-2}, \tag{12}$$

и уравнения (2) сводятся к одному соотношению

$$\left\{\frac{1}{g_{11}}\left[\sqrt{g}\, g^{ik}\left(\frac{1}{g_{11}}\right)_{,k}\right]_{,i}\right\}_{,1} = 0. \tag{13}$$

Это — случай полной геометризации: физическая задача о расчете пространственного потенциального электростатического потока сведена к вычислению функций g_{11}, g_{22}, g_{33}, g_{23}, удовлетворяющих четырем уравнениям (8), (13). Решение уравнений (8), (13) может быть получено в криволинейной системе x^i. Для перехода к декартовым координатам y^i служат соотношения

$$y^{\mu}_{,11} = \Gamma^{l}_{11}\, y^{\mu}_{,l}. \tag{14}$$

Начальные условия для последних дают уравнение стартовой поверхности $x^1 = 0$, определенной относительно y^i, и выражение для единичной нормали к ней, вычисляемое по формулам дифференциальной геометрии.

Система, связанная с трубками тока. Рассмотрим пространственные потоки, не обладающие симметрией, определив систему x^i требованием

$$v^2 = \frac{dx^2}{dt} = 0; \qquad v^1 = \frac{dx^1}{dt}; \qquad v^3 = \frac{dx^3}{dt}. \tag{15}$$

Появление новой неизвестной функции v^3 позволяет использовать более простую криволинейную систему с $g_{13} \cong 0$.

Уравнения для двумерных течений. Существование циклической координаты — азимута ψ — приводит к заметным упрощениям. Рассмотрение будем вести в системе, которая имеет в меридиональной плоскости z, R неортогональную сетку в силу $g_{12} \neq 0$. Пять из шести тождеств Ляме становятся тривиальными, так как $g_{13} = g_{23} = 0$ (третья координата $x^3 = \psi$ ортогональна меридиональной плоскости), а элемент $g_{33} = R^2$ известен до решения задачи; исключение составляет уравнение $R_{1221} = 0$. В работе [18] показано, что его можно представить как условие совместности двух уравнений первого порядка

$$\theta_{,1} = \frac{1}{b_2 \sin\theta_{12}}\left[\left(\frac{g_{12}}{b_1}\right)_{,1} - b_{1,2}\right]; \quad \theta_{,2} = \frac{1}{b_1 \sin\theta_{12}}\left[-\cos\theta_{12}\, b_{1,2} + b_{2,1}\right]. \tag{16}$$

Здесь и ниже θ, ϑ — углы наклона осей x^1, x^2 к оси z; θ_{12} — угол между осями x^1, x^2, причем

$$\vartheta = \theta + \theta_{12}, \quad g_{12} = b^1\, b^2 \cos\theta_{12}. \tag{17}$$

Для вихревых релятивистских течений с эквипотенциального эмиттера при нулевой скорости старта уравнения, аналогичные (2), принимают вид

$$1+\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-(v)^2}}; \quad (1+\tilde{\varphi})\, b_3\, w + A_3 = P_3(x^2);$$

$$\frac{w P_3'}{b_3} = \frac{u}{b_1}\left\{b_1 b_2 \sin\theta_{12} N + \left[(1+\tilde{\varphi})\frac{g_{12} u}{b_1}\right]_{,1} - \left[(1+\tilde{\varphi}) b_1 u\right]_{,2}\right\};$$

$$\left[\sqrt{g}\left(g^{11}\varphi_{,1} + g^{12}\varphi_{,2}\right)\right]_{,1} + \left[\sqrt{g}\left(g^{12}\varphi_{,1} + g^{22}\varphi_{,2}\right)\right]_{,2} = \sigma, \left(\frac{\sigma u}{b_1}\right)_{,1} = 0; \tag{18}$$

$$H_{2,1} - H_{1,2} = \frac{\tilde{\sigma} w}{b_3}, \quad \left(\sqrt{g}\, H^1\right)_{,1} + \left(\sqrt{g}\, H^2\right)_{,2} = 0;$$

$$L = b_1 H^1;$$

$$M = b_2 H^2.$$

Символом тильда здесь отмечены релятивистские члены:

L, M, N — косоугольные проекции самосогласованного магнитного поля на оси координат;

ω — азимутальная скорость;

P_3 — произвольная функция интегрирования, производная которой выражается через параметры на катоде (нижний индекс нуль):

$$P_3' = (b_2 b_3 L)_0 . \quad (19)$$

Азимутальное магнитное поле определяется формулой

$$N = \frac{H_3}{b_3}; \; H_3 = \int_{x_*^2}^{x^2} (b_2 b_3)_0 \tilde{J} \, dx^2 + H_0; \quad H_0 = \mathrm{const}, \quad (20)$$

где интегрирование ведется вдоль катода от нижней границы пучка, J — плотность тока эмиссии.

Задача Коши для двумерных потоков. Существует два варианта задачи Коши, когда начальные данные задаются либо на гладкой эммитирующей поверхности $x^1 = 0$ (плотность тока эмиссии и распределения L_0, M_0 магнитного поля), либо на базовой трубке тока $x^2 = 0$ (распределения φ, L, M, N). В первом случае начальная физическая информация позволяет построить вблизи катода полную гидродинамическую картину течения и найти метрику системы x^i [16].

Выше отмечалось, что с точки зрения полноты системы геометризованных уравнений пучка рассмотрение можно было бы вести в ортогональных координатах при $g_{12} \equiv 0$. Анализ третьего уравнения движения в (18) показывает, что при эмиссии в ρ-режиме первый член в правой части имеет порядок $x^{2/3}$, а член слева — порядок $x^{3/3}$, $x \equiv x^1$. При $g_{12} \equiv 0$ они не могут быть сбалансированы последним слагаемым, разложение которого начинается с $x^{4/3}$.

В результате следствием условия $g_{12} \equiv 0$ являются ограничения на ориентацию магнитного поля на катоде:

$$N_0 = 0; \qquad L_0 M_0 = 0. \quad (21)$$

Первое из них означает, что мы должны пренебречь собственным азимутальным полем, или, что более правильно, перейти к нерелятивистским течениям; второе — специальную конфигурацию магнитного поля, направленного на эмиттере либо по касательной, либо по нормали к нему. Ограничения (21) будут сняты [18], если определить функцию g_{12} с помощью соотношения

$$g_{12} = a_0 b_0 \left[-\overline{N}_0 x^{1/3} + \left(\frac{3}{4} \overline{L}_0 \overline{M}_0 - \frac{5}{4} \overline{a}_1 \overline{N}_0 \right) x^{2/3} \right] \exp\left(-a^2 x^{6/3} \right), \; a = \mathrm{const},$$

$$b_1 = a_0 \left(1 + \bar{a}_1 x^{1/3} + \bar{a}_2 x^{2/3} + \ldots \right), \; b_2 = b_0 \left(1 + \bar{b}_3 x^{3/3} + \bar{b}_4 x^{4/3} + \ldots \right), u = V_2 x^{2/3} \left(1 + \overline{V}_3 x^{1/3} + \ldots \right), \quad (22)$$

$$\overline{L}_0 \equiv \frac{a_0 L_0}{V_2}; \quad \overline{M}_0 \equiv \frac{a_0 M_0}{V_2}; \quad \overline{N}_0 \equiv \frac{a_0 N_0}{V_2}.$$

Таким образом, локальная неортогональность системы x^1, x^2, обеспечиваемая затухающим экспоненциальным множителем в (22), обусловлена необходимостью выполнения условий термоэмиссии при рассмотрении релятивистских пучков или нерелятивистских потоков в произвольно ориентированном внешнем магнитном поле.

Теория однокомпонентных течений. В основе уже упоминавшегося подхода [1—3] лежит исключительно привлекательная мысль о возможности описания пространственного пучка обыкновенным дифференциальным уравнением. Именно поэтому мало кто из специалистов прошел мимо модели однокомпонентных потоков, а в редакции журналов основанные на использовании этой идеи статьи поступают и поныне. Изложение теории содержится в монографиях [22—24], а ее перспективы оценивались весьма оптимистично в обзоре [25]. Вместе с тем за четыре десятилетия, прошедших с выхода работ [1, 2], конструктивных результатов в виде новых решений уравнений пучка получено крайне мало.

Столь разительный контраст между ожиданиями и результатами нуждается в объяснении. Мы можем дать его, основываясь на изложенных выше результатах геометризованной теории. Подробный анализ работ по теории однокомпонентных течений приведен в работе [8].

Рассмотрим потенциальные электростатические нерелятивистские потоки (10) в системе, связанной с траекториями. Три положения теории однокомпонентных течений состоят в следующем.

1. Любой пространственный пучок можно представить как однокомпонентный за счет введения специальных координат, причем действие W (потенциал скорости) будет функцией только одной из них:

$$W = W(x^1), \quad \vec{v} = \nabla W = \{u, 0, 0\}. \tag{23}$$

2. Рассмотрение можно вести в ортогональной системе.

3. Действие, будучи функцией x^1, для произвольного пространственного потока удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению.

Это уравнение получается после подстановки (23) в уравнение четвертого порядка для W, к которому может быть сведена система уравнений пучка:

$$\left[f\left(x^i\right)w'\right]' + f\left(x^i\right)b\left(x^i\right)w = \frac{F\left(x^2, x^3\right)}{\sqrt{w}}; \quad \sqrt{w} = W' \equiv \frac{dW}{dx^1}. \tag{24}$$

Соотношение (24) интерпретировалось как уравнение относительно $w\,(x^1)$ с коэффициентами, которые через коэффициенты Ляме h_1, h_2, h_3 зависят от всех трех координат. Дальнейшие усилия были направлены на формулировку требований к системе, при выполнении которых уравнение (24) становилось бы обыкновенным дифференциальным.

Ошибочность второго положения теории однокомпонентных течений следует из (11). В системе, связанной с трубками тока (15), два среди недиагональных элементов метрического тензора отличны от нуля: g_{12}, $g_{23} \neq 0$.

Траектории или трубки тока пространственных течений не могут быть отнесены к чисто геометрическим понятиям. На них выполняются условия силового баланса и действуют прикатодные асимптотики, что включает их в класс более сложных объектов, чем криволинейные оси или координатные поверхности ортогональной системы. В силу ограничений (21) результаты теории однокомпонентных течений могут относиться только к двумерным нерелятивистским электростатическим потокам или релятивистским пучкам с собственным магнитным полем, если эмиттер исключается из области рассмотрения. Более того, в общем случае двумерные нерелятивистские пучки описываются системой уравнений в частных производных, а не обыкновенным дифференциальным уравнением, как это должно быть согласно третьему положению:

$$2\varphi = u^2, \qquad (b_1 u)_{,2} = 0; \qquad (b_2 b_3 \rho u)_{,1} = 0;$$

$$\left(\frac{b_2 b_3}{b_1}\varphi_{,1}\right)_{,1} + \left(\frac{b_1 b_3}{b_2}\varphi_{,2}\right)_{,2} = b_1 b_2 b_3 \rho, \qquad \left(\frac{b_{2,1}}{b_1}\right)_{,1} + \left(\frac{b_{1,2}}{b_2}\right)_{,2} = 0. \tag{25}$$

Последнее уравнение в (25) представляет собой условие эвклидовости $R_{1221} = 0$. Соотношение (24) следует рассматривать совместно с ним как уравнения для коэффициентов Ляме b_1, b_2, если w (x^1), F (x^2, x^3) — заданные функции. Справедливость этого утверждения вытекает из первичности уравнений движения, Пуассона и сохранения тока в (25) по отношению к уравнению для действия W, из которого получено (24).

Интегрирование второго уравнения (25) дает функцию W' (x^1) как произвольную функцию интегрирования:

$$b_1 u = W' \, (x^1). \tag{26}$$

Также обстоит дело с функцией F в правой части (24), которая возникает при интегрировании третьего уравнения в (25) и связана с плотностью тока эмиссии

$$b_2 b_3 \rho u = (b_2 b_3)_0 J \, (x^2) \equiv F \, (x^2). \tag{27}$$

Произвольная функция интегрирования W' не обязана удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению, но выражается подобно F в (27) через условия на начальной поверхности: $\sqrt{w}$ имеет смысл скорости u на линии $x^2 = 0$, от которой ведется интегрирование.

Теория однокомпонентных течений, по сути, занимается отысканием условий, при которых система (25) может быть сведена к обыкновенным дифференциальным уравнениям, т. е. поиском их точных решений, класс которых существенно более узок, чем решения с разделением переменных $W = W_1 \, (x^1) \, W_2 \, (x^2) \, W_3 \, (x^3)$. От задачи расчета произвольных трехмерных потенциальных потоков мы пришли к поиску некоторых частных двумерных течений.

Инвариантные решения геометризованных уравнений. Построение наиболее полных наборов точных решений основано, как известно, на анализе групповых свойств соответствующей системы уравнений в частных производных. Для уравнений пучка исследование проведено в работах [26, 27], причем результаты не сводятся только к мультипликативному разделению переменных. Тот же подход в применении к специализации системы (25) для плоских течений [15, 16] привел к решению задачи, которую не удалось решить в рамках теории однокомпонентных пучков: наиболее общие плоские потоки в декартовых, цилиндрических и спиральных координатах описываются инвариантными решениями геометризованных уравнений.

СИНТЕЗ НЕПАРАКСИАЛЬНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ПУЧКОВ

Преобразование геометризованных уравнений. Ниже будет рассмотрен второй вариант задачи Коши для геометризованных уравнений пучка, когда начальная информация задается на базовой трубке тока. Эта постановка аналогична подходам традиционной асимптотической теории (см. [28] и цитированную в ней литературу) и позволяет контролировать протяженные потоки. В работах [18, 29] геометризованные уравнения для двумерных потоков преобразованы к виду, включающему соотношение для b_2 на трубке тока $x^2 = \text{const}$, которое содержит только продольные производные, и уравнения эволюционной системы. Первое может быть записано следующим образом:

$$(1+\tilde{\varphi})u^2(L\,b_2)=G_1(b_2\sin\theta_{12})_{,1}-w\,M\sin^2\theta_{12}\,b_{2,1}+$$
$$+b_2\sin\theta_{12}\,G_2+\frac{(b_2\,b_3)_0\,J}{b_3(1+\tilde{\varphi})^2\,u}+\frac{(b_2\,b_3\,L)_0}{b_3(1+\tilde{\varphi})}G_3. \quad (28)$$

Оператор L, в который входит операция двукратного дифференцирования, и функции G_1, G_2, G_3 определены в [29]. Эволюционная система представляет собой систему уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных по поперечной координате от физических и геометрических параметров u_k $(k = 1,..., n)$ потока [29]

$$u_{k,2}\equiv\frac{\partial u_k}{\partial x^2}=F_k\,(u_1,\ldots,u_n,\ldots u_{n,1},\ldots u_{n,11}). \quad (29)$$

Геометризованные уравнения пучка (28), (29) являются точными соотношениями. Этим они отличаются от уравнений асимптотической теории (см. например [28]), которые могут оставаться уравнениями в частных производных, но в которых опущен ряд членов с порядком малости, превышающим принятую точность рассмотрения.

О пределах применимости теории трубчатых пучков. Тонкие трубчатые релятивистские пучки в рамках асимптотической теории [30] описываются уравнением, которое получается из (28) переходом к ортогональной системе. При выводе этого уравнения в [30] предполагалось, что главные кривизны k_1, k_2 базовой трубки тока, компоненты магнитного поля на ней и продольные производные имеют порядок ε.

Учитывая смысл уравнения (28), можно констатировать, что асимптотическая теория [30] имеет дело с точным соотношением на трубке тока и приближенными формулами, описывающими параметры пучка.

Анализ последних обнаруживает, что при достаточном удалении от оси симметрии $k_2 \sim \varepsilon$ в режиме магнитного сопровождения, когда в качестве образующей базовой поверхности выбрана силовая линия магнитного поля, допустимо рассмотрение случая сильного сопровождающего магнитного поля. В работе [30] использовалась ортогональная система, связанная с базовой поверхностью; учитывая (22), становятся понятными ограничения (21) на ориентацию магнитного поля, которые возникают в [30] как условия реализации эмиссии в ρ-режиме.

Задание базовой трубки тока и начальных условий. Обычно начальная кривая и данные Коши на ней произвольно задаются по нашему усмотрению. При синтезе непараксиальных трубчатых пучков и эмиссии с нулевой скоростью существование особенности на эмиттере принципиальным образом меняет ситуацию. Поставим прежде всего вопрос о том, возможно ли задание самой траектории и потенциала на ней за счет введения необходимой информации в точке старта для нерелятивистских электростатических потоков. Положительный ответ означал бы, что коэффициенты разложения потенциала и траектории, определенной относительно локальных декартовых координат X, Y (нормаль, касательная к катоду в точке старта), могут быть заданы произвольно:

$$\varphi=\varphi_4\,x^{4/3}\left(1+\overline{\varphi}_7\,x^{3/3}+\overline{\varphi}_{10}\,x^{6/3}+\overline{\varphi}_{13}\,x^{9/3}+\ldots\right);$$
$$Y=\alpha_6\,X^{6/3}+\alpha_9\,X^{9/3}+\alpha_{12}\,X^{12/3}+\ldots,\quad x\equiv x^1. \quad (30)$$

Анализ результатов антипараксиальных разложений [31] показывает, что это возможно: коэффициенты φ_4, φ_7, φ_{10}, φ_{13} произвольны за счет задания J, $æ_{10}$, J'',

$æ''_{10}$, соответственно, а траекторные коэффициенты α_6, α_9, α_{12} — за счет задания J', $æ'_{10}$, J''' ($æ_{10}$ — главная кривизна катода, штрихи означают производные вдоль эммитирующей поверхности). Таким образом, мы можем распоряжаться двумя произвольными функциями $J(x^2)$, $æ_{10}(x^2)$.

Известно [31], что при появлении любого усложняющего фактора (магнитное поле, релятивизм, ионный фон) между каждыми двумя "электростатическими" членами возникают два дополнительных слагаемых, так как теперь разложение идет по степеням параметра $(x^1)^{1/3}$. Поскольку к J, $æ_{10}$ не добавились какие-либо новые произвольные функции (производные от магнитного поля вдоль катода выражаются с помощью уравнений Максвелла через L_0, M_0, N_0 в точке старта), то новые члены записываются через ранее появившиеся произвольные элементы, уже использованные для задания "электростатических" коэффициентов, и являются регламентированными.

Аналогичная ситуация имеет место и с компонентами самосогласованного магнитного поля на базовой трубке тока, в разложениях которых оказываются произвольными коэффициенты с индексами, кратными трем.

Таким образом, мы не можем правильно задать ни форму базовой трубки тока, ни распределения потенциала и магнитного поля на ней, так как в принципе не располагаем бесконечными асимптотиками. В свете сказанного первая постановка задачи Коши, о которой шла речь выше, представляется безупречной: форма катода и распределения физических параметров при $x^1 \equiv 0$ задаются произвольными аналитическими функциями x^2. Однако с практической точки зрения принципиальные отличия между первой и второй постановками отсутствуют. Действительно, чтобы рассчитать поток от эмиттера, необходимо воспользоваться прикатодными — и по необходимости конечными — асимптотиками. Аналогичные ряды можно построить и во втором случае. Кроме того, в области сходимости члены высокого порядка малы, а вдали от катода, вне зависимости от сходимости ряда, ведут себя как регулярные функции.

Эволюционные уравнения на эмиттере. Эволюционное уравнение для плотности тока эмиссии J имеет вид [29]:

$$\frac{a_0}{b_0}\frac{J_{,2}}{J} = -5\frac{a_{0,2}}{b_0} + \left(6a_2 + \frac{15}{16}\overline{a}_1^2\right)\overline{N}_0 - \frac{45}{8}\overline{a}_1\,\overline{\mathrm{L}}_0\,\overline{\mathrm{M}}_0 - \frac{9}{4}\overline{\mathrm{L}}_0^2\,N_0 + \frac{9}{4}\overline{\mathrm{M}}_0^2\,\overline{N}_0 - \frac{3}{4}\overline{N}_0^3. \quad (31)$$

Аналогичные по структуре соотношения справедливы для производных $L_{0,2}$, $M_{0,2}$. Интересно отметить, что поперечные градиенты зависят не только от формы базовой поверхности через $a_{0,2}/b_0$ (в электростатическом потоке эта величина пропорциональна кривизне траектории) и компонент магнитного поля в точке старта, но и от способа задания продольной координаты на базовой трубке тока: преобразование перемаркировки $\overline{x}^1 = f(x^1)$ меняет b_1 и коэффициенты a_0, a_1, a_2. Таким образом, формальное в обычных условиях преобразование приобретает физический смысл для релятивистских течений в произвольно ориентированном внешнем магнитном поле.

В ортогональной системе однозначная связь между формой базовой траектории и распределением потенциала на ней, с одной стороны, и формой эммитирующей поверхности и законом изменения плотности тока эмиссии, с другой, достаточно очевидна. В релятивистском случае, учитывая сказанное выше о преобразовании перемаркировки и принципиальной невозможности точной формулировки задачи Коши, к тому же утверждению можно приблизиться, так сказать, итеративно. Зафиксируем базовую поверхность с учетом траекторного коэффициента α_9 и зададим распределения потенциала и магнитного поля на ней с помощью асимптотик с конечным числом членов, выбрав в качестве продольной координаты длину дуги образующей. Преобразование перемаркировки ставит в соответствие этому фиксированному набору несчетное множество электронных потоков, различающихся формой эмиттера и видом функции J (x^2). Однако в точном смысле вариация градиента J в соответствии с (31) приведет к изменению не учтенных нами траекторных коэффициентов, т. е. к изменению формы базовой трубки тока, новому смыслу длины дуги образующей и соответствующей модификации заданных продольных распределений. В этом и состоит механизм установления взаимно однозначного соответствия между базовой трубкой тока, эммитирующей поверхностью и распределениями физических параметров на них.

В рамках дискретного формализма метода узких полос и фиксированных конечных асимптотик интерпретация эффектов, связанных с преобразованием перемаркировки, более интересна. Здесь можно говорить о том, что фиксированной базовой поверхности и распределениям на ней отвечает спектр потоков с разными эммитирующими поверхностями. Ситуация напоминает известный факт, связанный с расчетом формирующих электродов: одному и тому же потоку могут быть поставлены в соответствие различные электронно-оптические системы, которые отличаются одна от другой тем сильнее, чем больше расстояние от границы потока. Этот факт успешно используется для придания формирующим электродам технологичных очертаний. В обсуждаемом нами случае различные реализации эммитирующей поверхности приводят к возмущениям, которые лежат в пределах ошибки, вызываемой использованием конечных асимптотик. Существующая свобода, как и при решении внешней задачи теории формирования, может быть использована для оптимизации потока в некотором принятом смысле.

Метод узких полос. Традиционная асимптотическая теория параксиальных и приповерхностных пучков (см. [28, 32] и цитированную в них литературу) привлекает простотой используемого математического аппарата. Локализованные вблизи произвольной кривой или поверхности потоки описываются одним или несколькими обыкновенными дифференциальными уравнениями. Однако существующие варианты теории обладают рядом ограничений. Для стартующих с эмиттера тонких кольцевых пучков выполняются ограничения (21), которые требуют отсутствия внешнего азимутального магнитного поля и использования в качестве базовой поверхности релятивистского пучка внутренней трубки тока, что приводит к рассмотрению вдвое более узких потоков. Кроме того, магнитное поле в меридиональной плоскости должно быть направлено либо по касательной, либо по нормали к катоду, а базовая трубка тока не может приближаться к оси z.

В результате создается такая ситуация: традиционная теория не может описать столь простой случай, как вырезка из плоского магнетрона при произвольно ориентированном однородном магнитном поле и эмиссии в ρ-режиме. Не следует забывать также, что упростившийся математический аппарат пригоден лишь для описания узких пучков. Синтез непараксиальных потоков, осуществленный на базе сшивания решения в полосах с приосевой и приповерхностной асимптотикой [33], возможен лишь в бескатодном варианте, так как среди уравнений асимптотической теории отсутствуют соотношения, позволяющие воспроизводить форму катода и распределение плотности тока эмиссии, хотя бы и в кусочно-постоянном варианте, за пределами первой полосы.

В работах [29, 34] сформулирован способ приближенного решения геометризованных уравнений пучка методом узких полос для осесимметричных релятивистских потоков. Предлагаемый подход сохраняет преимущества асимптотической теории (модель описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями) и вместе с тем исходит из точных уравнений пучка, что позволяет избежать всех упоминавшихся выше ограничений. Суть метода сводится к интегрированию уравнения (28) на базовой трубке тока, построению решения в первой полосе на основании уравнений эволюционной системы (29) по формулам типа:

$$u_k^{(1)} = u_k^{(0)} + F_k^{(0)} y_1; \quad y = x^2, \tag{32}$$

где верхний индекс в скобках означает номер трубки тока, а y_1 — "ширину" первой полосы, и воссозданию на первой трубке тока той информационной ситуации, которая имела место на базовой поверхности. Для этого необходимо перейти к новой продольной координате — длине дуги первой трубки тока и обновить правую часть уравнения (28) с использованием формул (32). Далее процедура повторяется. Переход к новым трубкам тока невозможен без все более глубокой проработки прикатодной асимптотики на базовой поверхности, которая позволяет вычислить начальные данные для интегрирования уравнения (28). К ним относятся значения кривизны катода новой точке, связанной с $b_{2,1}$, и плотности тока эмиссии. Форма катода воспроизводится в ходе решения задачи.

Приближение одной полосы эквивалентно теории трубчатых пучков [30], но и лишено ее недостатков. Использование двух полос позволяет вычислить те же функции, что и высшее параксиальное приближение [10], но в отличие от [10], где рассматриваются нерелятивистские электростатические пучка, в [29, 34] исследован общий случай релятивистских потоков во внешнем магнитном поле. Для специальных магнитных полей и нерелятивистских течений, включая электростатические потоки, удается построить приближение трех полос. В этом случае при радиусе кривизны базовой трубки тока порядка единицы полуширина пучка достигает значения 0,3. Таким образом, для двух и трех полос речь идет о существенно непараксиальных потоках.

Приближение нескольких полос находится в том же отношении к высшим параксиальным приближениям, что задача о воспроизведении функции за счет сшивания рядов, построенных для ряда узких интервалов, к задаче о представлении фукнции в виде ряда Тэйлора с сохранением все более высоких производных. В теории антипараксиальных разложений [35] известны примеры, когда первая процедура оказывается более эффективной. Так, для плоского магнетрона в ρ-режиме использование одной полосы

$$\varphi(1) = \varphi_4 x^{4/3} + \varphi_6 x^{6/3} + \varphi_8 x^{8/3} + \varphi_{10} x^{10/3}$$

дает ошибку в 4,6 %, в то время как в случае двух полос

$$\varphi(1) = \varphi_4 x^{4/3} + \varphi_6 x^{6/3}, \quad \varphi(2) = \varphi_0 + \varphi_1 \bar{x} + \varphi_2 \bar{x}^2 + \varphi_3 \bar{x}^3,$$

где $\bar{x}$ — ширина второй полосы, ошибка уменьшается до 2,5 %. Сравнение проводилось в точке поворота траекторий.

Образующие трубок тока являются действительными характеристиками системы уравнений в частных производных. Известно [35], что использование системы координат, связанной с траекториями, существенно расширяет рабочую область приближенного решения. В механике вязкой жидкости [36] существует понятие оптимальных координат, обладающих тем же свойством, которые, по сути дела, приближенно воспроизводят систему, связанную с траекториями потока. Приведенные факты позволяют надеяться, что приближенное решение геометризованных уравнений пучка при прочих равных условиях будет иметь большую точность, чем решение уравнений традиционной асимптотической теории.

В работе [37] построено высшее приближение для тонких трубчатых пучков, обобщающее результаты [10] на случай релятивистских потоков в произвольно ориентированном внешнем магнитном поле.

Эмиссия, ограниченная температурой, и произвольные условия инжекции. Алгоритмы синтеза непараксиальных релятивистских пучков при эмиссии в *T*-режиме и при инжекции с ненулевой начальной скоростью сформулированы в

[38]. Эмиссия в T-режиме используется в мощных гиротронах и часто обеспечивает более устойчивую работу пучково-плазменных приборов. Постановка с нулевой скоростью инжекции может быть интересна при рассмотрении проблем транспортировки пучка, в частности, в системах периодической фокусировки, а также при изучении коллекторных проблем при счете вверх по потоку.

При эмиссии в T-режиме в общем случае рассмотрение приходится вести в локально неортогональной системе, хотя ограничения по поводу магнитного поля оказываются менее жесткими, чем в ρ-режиме. Неортогональность системы вблизи катода не связана теперь с произвольной ориентацией магнитного поля в плоскости z, R, но только с собственным или внешним азимутальным магнитным полем.

При инжекции с ненулевой скоростью стартовая поверхность не является особой, что позволяет использовать ортогональные координаты. Показано, что для релятивистских и закрученных нерелятивистских потоков отсутствует эквипотенциаль, нормальная к трубкам тока. Поэтому в общем случае задача формулируется для неэквипотенциальной стартовой поверхности с известной в плоскости криволинейных координат x^1, x^2 (но не в плоскости z, R, так как связь x^1, x^2 и z, R заранее неизвестна) кривизной и распределением инжектируемого тока. Базовая трубка тока и параметры пучка на ней задаются произвольно. Конфигурация поверхности инжекции, ее потенциал и нормальное электрическое поле определяются в ходе решения задачи.

Для нерелятивистских электростатических потоков оказывается возможной постановка о старте незакрученного потока с эквипотенциальной поверхности. Требование эквипотенциальности приводит к необходимости построений, аналогичных прикатодным асимптотикам в ρ- и T-режимах. Трубки тока при этом имеют на старте нулевую кривизну, кривизна поверхности инжекции определяется в ходе решения задачи, а вторая производная потенциала на базовой трубке тока оказывается регламентированной.

Синтез сплошных непараксиальных пучков. В работе [39] алгоритмы [29, 34] распространяются на сплошные потоки за счет введения приосевой области при сохранении структуры периферических слоев. Область вблизи продольной оси системы z, которая является единственной аналитической и вместе с тем вырожденной трубкой тока, требует специального рассмотрения. Основная трудность при увеличении числа полос вообще и при введении приосевого ядра, в частности, состоит в необходимости более глубокого изучения прикатодных асимптотик. При этом построение антипараксиальных разложений более высокого порядка обусловлено не желанием точнее описать прикатодную область, а тем фактом, что имеющие порядок единицы коэффициенты разложений служат для установления начальных данных при интегрировании уравнения (28), определяя первую производную $b_{2,1}$ (или более широко — прикатодную асимптотику b_2), значения плотности тока эмиссии и компонент магнитного поля на катоде.

В работе [39] приосевое ядро потока описано геометризованной параксиальной теорией первого приближения. Точность всей модели в значительной степени определяется ошибкой в приосевой области. Вместе с тем опыт синтеза непараксиального макропотока [33], моделирующего взаимодействие микроструй в многопучковых системах, показывает желательность конструирования возможно более широкого ядра, на которое наращиваются периферические слои.

Из сказанного вытекает актуальность построения высшего приближения, описывающего приосевую область течения, которое реализовано в [40] для релятивистского пучка в произвольно ориентированном внешнем магнитном поле.

В силу того, что геометризованные уравнения пучка представляют собой точные соотношения, связи между распределениями на оси потока и эммитирующей поверхности естественным образом вытекают из уравнений. Переход от прикатодной области к протяженному пучку осуществляется органично в отличие от асимптотической теории параксиальных (см. [28] и цитированную там литературу) и антипараксиальных разложений [31, 35]. Действительно, теория квазиаксиально-симметричных течений [41] допускает описание узких пучков с неоднородным распределением плотности пространственного заряда по сечению при отсутствии в области рассмотрения эмиттирующей поверхности. Однако попытка срастить это решение с антипараксиальными разложениями в прикатодной области обречена на неудачу: разные системы уравнений, параметры разложения и системы координат приводят к тому, что на разделяющей две области поверхности параметры потока, вычисленные от оси пучка и от эмиттера, принимают разные значения. Возникающий дисбаланс может быть допустим с точки зрения конкретных практических задач, но оставляет чувство неудовлетворенности, если говорить о построении качественной теории.

Параксиальная теория второго приближения на основе геометризованных уравнений пучка позволяет найти траектории потока, если предварительно вычислена вторая производная плотности тока эмиссии на оси, в то время как форма катода рассчитывается с сохранением членов порядка ε^4, что соответствует описанию кривизны с точностью до ε^2. Из общих соображений ясно, что форма границы пучка, получаемая интегрированием уравнений движения и вычисляемый с помощью интеграла энергии потенциал при прочих равных условиях, могут быть рассчитаны точнее, чем плотность пространственного заряда, выражаемая через вторые производные последнего. Вместе с тем, при построении приближенных методов повышение точности в прикатодной области в большей степени способствует уменьшению ошибки при решении задачи в целом, чем более тщательный расчет траекторий. Цена ошибки вблизи стартовой поверхности выше по той причине, что около катода сосредоточена значительная часть пространственного заряда пучка и здесь же формируются условия выстрела в область, где разогнанный пучок становится более "жестким".

Высказанные соображения приводят к мысли о целесообразности построения модели, в которой используется параксиальная теория первого приближения, в то время как кривизна катода и распределение плотности тока эмиссии рассчитываются с сохранением членов порядка ε^4. В [40] подобная модель построена для нерелятивистских пучков в специальном внешнем магнитном поле (21) (в том числе, при его отсутствии), допускающем использование ортогональных координат.

Возможные методы интегрирования геометризованных уравнений. Знание характеристик системы уравнений в частных производных важно как при построении приближенных методов решения, так и в вопросах численного интегрирования. Существование мнимых характеристик порождает хорошо известные проблемы неустойчивости конечно-разностных маршевых методов при решении задачи Коши, к которой сводится проблема синтеза плотного пучка, когда начальная информация задается на трубке тока или поверхности катода.

Успешный способ преодоления неустойчивости [9] основан на идее аналитического продолжения и выходе в комплексное пространство, где мнимые характеристики становятся действительными. На примере уравнения Лапласа на плоскости x, y видно, что приведение его к канонической форме гиперболического уравнения в равной мере достигается как аналитическим продолжением переменной $x \to x + i\,\overline{x}$, так и переходом к характеристикам $\xi = x + i\,y$, $\eta = x - i\,y$:

$$\varphi_{,xx} + \varphi_{,yy} = 0, \qquad \varphi_{,yy} - \varphi_{,\overline{x}\overline{x}} = 0, \qquad \varphi_{,\xi\eta} = 0.$$

Однако в более сложных случаях аналитическое продолжение может не обеспечить успеха, и здесь требуется аккуратное исследование характеристик системы.

Подобное исследование геометризованных уравнений пучка выполнено в [42] и дало следующие результаты. Для общего случая релятивистских потоков в произвольно ориентированном внешнем магнитном поле кроме координатных линий $x^1 \equiv x = \text{const}$ (8-кратное вырождение) и $x^2 \equiv y = \text{const}$ (5-кратное вырождение) существуют два комплексных корня с двукратным вырождением и одно действительное решение:

$$\frac{h_2\, dy}{h_1\, dx} = -\exp(\pm i\,\theta_{12}),\quad \frac{h_2\, dy}{h_1\, dx} = -\frac{1}{\cos\theta_{12}}. \qquad (33)$$

Для релятивистских незакрученных пучков характеристиками являются те же иний, но снимается вырождение комплексных корней в (33) в связи с отсутствим внешнего магнитного поля и уменьшается до семи вырождение линий = const.

В случае (21), когда возможно использование ортогональной системы, комлексные корни в (33) становятся чисто мнимыми, а действительный корень на диницу увеличивает вырождение линии x = const:

$$\frac{h_2\, dy}{h_1\, dx} = \pm\, i. \qquad (34)$$

Для нерелятивистских электростатических потоков, как и при переходе от 33) к незакрученному релятивистскому пучку, корни в (34) перестают быть двуратно вырожденными.

Из сказанного следует, что для релятивистских пучков, стартующих с термоатода, а также нерелятивистских потоков при произвольной ориентации внешего магнитного поля алгоритмы [9] перехода в комплексное пространство не огут быть применены из-за одновременного существования комплексных и действительных характеристик. В полной мере эффективность идеи аналитического родолжения может проявить себя в задаче об инжекции с ненулевой скоростью неэквипотенциального эмиттера, когда плотность тока, а также функции h_2, $h_{2,1}$ задаются по нашему усмотрению [38].

Анализ результатов по применению алгоритмов регуляризации [43—45] к реению электронно-оптических задач показывает, что исследования в этой области находятся в самом начале. Единственным эффективным способом интегрироания геометризованных уравнений пучка в настоящее время оказывается риближенный метод узких полос, реализованный для трубчатых и сплошных елятивистских пучков в произвольно ориентированном внешнем магнитном поле случае эмиссии, ограниченной пространственным зарядом, температурой, а акже при инжекции с ненулевой скоростью.

Заключение

Геометризованная теория плотных релятивистских потоков представляет собой новый раздел корпускулярной оптики, основанный на новой форме уравненй пучка. Среди результатов геометризованной теории отметим следующие: пределение границ применимости традиционной теории трубчатых релятивистких потоков; объяснение парадоксов теории однокомпонентных течений; невозожность идеального магнитного сопровождения; разработка не имеющего альэрнатив приближенного метода интегрирования геометризованных уравнений метод узких полос), который дает конструктивное решение проблемы синтеза эпараксиальных релятивистских пучков в произвольно ориентированном внешем магнитном поле, возможное лишь в рамках геометризованного подхода; построение теории первого и второго приближений для приосевых и тонких трубатых пучков, которая не имеет традиционных ограничений по компрессии, риентации магнитного поля и величине его продольной составляющей; формуировка модели, использующей параксиальную теорию первого приближения овместно с уточненным описанием прикатодной области.

Уже в первом приближении геометризованной теории параксиальных и трубатых пучков плотность тока эмиссии не является однородной. При прочих равых условиях геометризованная теория обеспечивает большую точность по сравению с традиционным подходом.

Геометризованная теория заставляет отказаться от ряда установившихся представлений, например, от возможности по нашему усмотрению использовать ортогональную систему координат; произвольно назначать базовую трубку тока и распределения физических параметров на ней при решении задач Коши для трубчатых релятивистских потоков или нерелятивистских пучков в произвольно ориентированном магнитном поле при эмиссии с термокатода; от взгляда на преобразование перемаркировки, определяющее способ отсчета продольной координаты на базовой трубке тока, как на не имеющую физического смысла формальную процедуру.

К возможным приложениям геометризованной теории относятся вопросы расчета пушек с тонкими (в частности,вариант трансформации кольцевого пучка в сплошной) и существенно непараксиальными потоками; синтез непараксиальных макропучков, описывающих взаимодействие микроструй в многопучковых системах; проблемы транспортировки, периодические системы, синтез коллекторных систем.

Основные проблемы геометризованной теории включают эффективную численную реализацию метода узких полос и его тестирование на эталонных точных решениях; построение трехмерной теории синтеза непараксиальных потоков; разработку трехмерной геометризованной теории параксиальных и приповерхностных пучков.

Уравнения пучка в трехмерном случае необходимо представить в виде соотношения на траектории или трубке тока и эволюционной системы уравнений. В системе, связанной с траекториями, эволюция должна осуществляться уже по двум поперечным координатам. Во втором варианте геометризации соотношение на трубке тока может иметь форму уравнения в частных производных. Дальнейшее продвижение в этом случае, возможно, потребует построения точных решений с использованием аппарата непрерывных групп преобразований. Представление условий эвклидовости пространства в виде эквивалентной системы уравнений первого порядка представляет самостоятельную проблему.

Опыт рассмотрения двумерных задач позволяет надеяться, что для пространственных течений удастся освободиться от ограничений традиционного подхода, например от требования однородной деформации поперечного сечения в параксиальной теории трехмерных потоков.

Литература

1. Овчаров В. Т.//ДАН СССР, 1956. Т. 107. № 1. С. 47.
2. Meltzer B.//J. Electronics, 1956. V. 2. № 2. P. 118.
3. Овчаров В. Т.//РЭ, 1957. Т. 2. № 6. С. 696.
4. Eisenhart L. P.//Phys. Rev. 1934. V. 45. № 6. P. 427.
5. Eisenhart L. P.//Phys. Rev. 1948. V. 74. № 1. P. 87.
6. Eisenhart L. P.//Proc. National Acad. Sci. USA. 1949. V. 35. № 7. P. 412.
7. Овчаров В. Т.//РЭ. 1959. Т. 4. № 10. С. 1741.
8. Сыровой В. А.//Известия вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33. № 12. С. 1391.
9. Colburn D. S., Harker K. J., Kino G. S.//Microwaves. Proc. 4-th Int. Congr. Microwave Tubes., Eindhoven: Centrex Publ. Comp. 1963. P. 572.
10. Harker K. J.//Internat. J. Electronics. 1965. V. 18. № 1. P. 43.
11. Harker K. J///J. Appl. Phys. 1960. V. 31. № 12. P. 2165.
12. Garabedian P. R.//J. Mathematics and Mechanics. 1960. V. 9. № 4. P. 905.
13. Борисов Н. Ф.//Труды ЦАГИ. 1976. Вып. 1756. С. 40.
14. Борисов Н. Ф., Сыровой В. А.//Известия АН СССР. Механика жидкости и газа, 1977. № 2. С. 137.
15. Сыровой В. А.//Там же, 1978. № 5. С. 10.
16. Сыровой В. А.//РЭ, 1979. Т. 24. № 11. С. 2336.
17. Сыровой В. А.//ЖТФ, 1982. Т. 52. № 4. С. 625.
18. Сыровой В. А.//РЭ, 1985. Т. 30. № 4. С. 793.
19. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. — М.: АН СССР. 1961, гл. 4.
20. Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ. — М.: Физматгиз, 1963.
21. Петров А. З. Новые методы в общей теории относительности. — М.: Наука, 1966. Гл. 1, § 7. Гл. 9.
22. Кирштейн П., Кайно Г., Уотерс У. Формирование электронных пучков. — М.: Мир, 1970.
23. Алямовский И. В. Электронные пучки и электронные пушки. — М.: Сов. радио, 1966.

24. Молоковский С. И., Сушков А. Д. Интенсивные электронные и ионные пучки. — Л.: Энергия, 1972.
25. Meltzer B.//British J. Appl. Phys. 1959. V. 10. № 9. P. 391.
26. Сыровой В. А.//Журн. прикл. механики и техн. физики, 1963. № 3. С. 26.
27. Сыровой В. А.//РЭ, 1985. Т. 30. № 2. С. 367.
28. Сыровой В. А.//Там же, 1988. Т. 33. № 7. С. 1492.
29. Сыровой В. А.//Там же, 1996. Т. 41. № 10.
30. Сыровой В. А.//Известия вузов. Радиофизика, 1990. Т. 33. № 12. С. 1391.
31. Сыровой В. А.//РЭ, 1991. Т. 36. № 3. С. 540.
32. Сыровой В. А.//Там же, 1988. Т. 33. № 8. С. 1706.
33. Плохов В. В., Сыровой В. А.//Там же, 1990. Т. 35. № 12. С. 2582.
34. Сыровой В. А.//Там же, 1997. Т. 42. № 2.
35. Сыровой В. А.//Там же, 1991. Т. 36. № 8. С. 1545.
36. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. — М.: Мир, 1967.
37. Сыровой В. А.//РЭ, 1997. Т. 42.
38. Сыровой В. А.//Там же, 1997. Т. 42. № 3.
39. Сыровой В. А.//В печати, 1997.
40. Сыровой В. А.//В печати, 1997.
41. Сыровой В. А.//РЭ, 1989. Т. 34. № 12. С. 2586.
42. Сыровой В. А.//В печати, 1997.
43. Бабищевич П. Н.//Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1981. Т. 21. № 3. С. 509.
44. Молоковский С. И., Полякова Ю. С.//Известия ЛЭТИ. — Л., 1975. Вып. 181. С. 50.
45. Полякова Ю. С.//РЭ, 1988. Т. 33. № 11. С. 2355.

RESULTS AND PROBLEMS OF RELATIVISTIC ELECTRON BEAM GEOMETRIZED THEORY

V. A. Syrovoy
RSPC All-Russia Electronical Institute, Moscow, Russia

The survey of dense electron beam geometrized theory results is presented. This theory is one of the newest part of corpuscular optics. The problems of non-paraxial relativistic beam synthesis, construction of approximate and numerical methods of geometrized beam equations integration, the actual tasks of futury are discussed.