Общая физика

УДК 538.9; 519.216

О спектрах случайных импульсных процессов

Б. И. Якубович

Проанализированы стохастические импульсные процессы. Вычислены выражения общего вида для спектров случайных импульсных процессов. Полученные результаты могут быть широко использованы в физике и технике.

PACS: 05.40.-a; 72.70.+m

Ключевые слова: случайный, импульс, спектр, последовательность.

Введение

Большое количество физических процессов, встречающихся в различных физических системах и технических устройствах, представляют собой случайные импульсные процессы. Существуют стохастические импульсные процессы, которые лежат в основе многочисленных явлений, имеющих различную физическую природу. Такие процессы анализируются при решении многих задач в различных областях физики и техники. Разумеется, анализ проводится с учетом условий, свойственных конкретной физической или технической задаче, и его результаты применимы лишь для конкретных рассматриваемых случаев. В связи с большим количеством подобных задач важно рассмотреть случайные импульсные процессы, имеющие широкое распространение, и определить их характеристики в достаточно общем виде. Впоследствии эти результаты могут быть использованы при изучении физических явлений, связанных с такими процессами, применительно к различным областям физики и техники.

В работах [1—4] такие задачи подробно рассмотрены для процессов с корреляцией между параметрами импульсов. Вместе с тем во многих случайных импульсных процессах параметры различных импульсов статистически независимы. Поэтому в данной статье рассмотрены случайные процессы, в которых имеются статистические связи между параметрами импульса, но статистические связи между параметрами различных импульсов отсутствуют. Важной и во многом определяющей характеристикой стохастического процесса является его спектр.

Якубович Борис Иосифович, старший научный сотрудник.
Петербургский институт ядерной физики.
Национальный исследовательский центр
«Курчатовский институт».
Россия, 188300, Ленинградская обл., г. Гатчина, Орлова роща.
Тел. (81371) 4-64-92. E-mail yakubovich@pnpi.spb.ru

Статья поступила в редакцию 10 февраля 2015 г.

Теоретический анализ

Проанализируем в достаточно общем виде случайные импульсные процессы со статистическими связями между параметрами импульса и вычислим спектры процессов.

Рассмотрим стохастический импульсный процесс со статистическими связями между параметрами импульса. Данный процесс имеет вид случайной последовательности импульсов. Анализируя его в достаточно общем виде, рассматриваем следующую случайную последовательность импульсов. Параметры импульса, а именно, длительность и амплитуда статистически связаны. Статистические связи и распределения параметров заданы в общем виде. Импульсы имеют произвольную форму. Параметры различных импульсов статистически независимы. Рассматриваемый стохастический процесс считаем стационарным. Случайную последовательность импульсов можно записать следующим образом

$$A = \sum_{j=1}^{n} a_j x(t - \tau_1 ... - \tau_{j-1}, \tau_j), \qquad (1)$$

здесь n — число импульсов в последовательности продолжительностью T, $x(t)$ — функция, описывающая форму импульса, a_j — амплитуда, τ_j — длительность импульса. Преобразование Фурье имеет вид:

$$F(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}a_j x\left(t-\tau_1...-\tau_{j-1},\tau_j\right)e^{-2\pi ift}dt= \\ =\sum_{j=1}^{n}a_j e^{-2\pi if(\tau_1+...+\tau_{j-1})}F_0\left(f,\tau_j\right), \quad (2)$$

где

$$F_0\left(f,\tau_j\right)=\int_{-\infty}^{\infty}x\left(t,\tau_j\right)e^{-2\pi ift}dt. \quad (3)$$

Тогда

$$\left|F(f)\right|^2=\sum_{j=1}^{n}a_j^2\left|F_0\left(f,\tau_j\right)\right|^2+ \\ +2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-j}a_j a_{j+i}e^{2\pi if\left(\tau_j+...+\tau_{j+i-1}\right)}F_0\left(f,\tau_j\right)F_0^*\left(f,\tau_{j+i}\right). \quad (4)$$

Вычислим среднее по ансамблю $\langle\left|F(f)\right|^2\rangle$ для случайной последовательности импульсов с указанными выше свойствами:

$$\langle\left|F(f)^2\right|\rangle=\sum_{j=1}^{n}\langle a_j{}^2\left|F_0(f,\tau_j)\right|^2\rangle+ \\ +2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-j}\langle a_j e^{2\pi if\tau_j}F_0(f,\tau_j)\rangle\langle a_{j+i}F_0^*(f,\tau_{j+i})\rangle\times \\ \times\langle e^{2\pi if\tau_{j+1}}\rangle...\langle e^{2\pi if\tau_{j+i-1}}\rangle. \quad (5)$$

Спектральная плотность процесса определяется соотношением

$$S(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{\langle\left|F(f)\right|^2\rangle}{T}. \quad (6)$$

Учитывая стационарность рассматриваемого стохастического процесса, в результате преобразований получаем следующее выражение для спектра:

$$S(f)=\nu\{\langle a^2\left|F_0(f,\tau)\right|^2\rangle+ \\ +2\,\mathrm{Re}\frac{\langle aF_0^*(f,\tau)\rangle\langle aF_0(f,\tau)e^{2\pi if\tau}\rangle}{1-\langle e^{2\pi if\tau}\rangle}\}, \quad (7)$$

где $\nu=\lim_{T\to\infty}\dfrac{n}{T}$ — средняя частота импульсов. Полученное выражение описывает спектр случайного импульсного процесса в следующем общем случае: параметры импульса статистически связаны, статистические связи и распределения параметров заданы в общем виде, а сами импульсы имеют произвольную форму.

Найдем спектры случайной последовательности импульсов для импульсов заданной формы. Рассмотрим часто встречающиеся случаи. Определим спектр случайной последовательности импульсов *прямоугольной* формы. В этом случае преобразование Фурье одиночного импульса имеет вид

$$F_0(f,\tau)=\int_0^{\tau}x(t)e^{-2\pi ift}dt=\frac{e^{-\pi if\tau}\sin\pi f\tau}{\pi f}. \quad (8)$$

Подставляя это соотношение в формулу (7) , получаем выражение для спектра случайной последовательности импульсов прямоугольной формы

$$S(f)=\frac{\nu}{\pi^2 f^2}\{\langle a^2\sin^2\pi f\tau\rangle+2\,\mathrm{Re}\frac{\langle ae^{\pi if\tau}\sin\pi f\tau\rangle^2}{1-\langle e^{2\pi if\tau}\rangle}\}. \quad (9)$$

Далее найдем спектр случайной последовательности импульсов *треугольной* формы. Треугольный импульс имеет вид $a\dfrac{t}{\tau}$ при $0\le t\le\tau$. Преобразование Фурье треугольного импульса:

$$F_0(f,\tau)=\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}te^{-2\pi ift}dt= \\ =\frac{1}{4\pi^2 f^2\tau}(e^{-2\pi if\tau}+2\pi if\tau e^{-2\pi if\tau}-1). \quad (10)$$

Подставляя это выражение в формулу (7), получаем выражение для спектра случайной последовательности импульсов треугольной формы:

$$S(f)=\frac{\nu}{8\pi^4 f^4}\{\langle a^2(1-\cos 2\pi f\tau+2\pi^2 f^2\tau^2- \\ -2\pi f\tau\sin 2\pi f\tau)\frac{1}{\tau^2}\rangle+ \\ +\mathrm{Re}\langle a(e^{2\pi if\tau}-2\pi if\tau e^{2\pi if\tau}-1)\frac{1}{\tau}\rangle\times \\ \times\langle a(1+2\pi if\tau-e^{2\pi if\tau})\frac{1}{\tau}\rangle/(1-\langle e^{2\pi if\tau}\rangle)\}. \quad (11)$$

Полученные выражения (9) и (11) дают универсальное описание спектров стохастических импульсных процессов со статистически независимыми параметрами различных импульсов, соответственно, с импульсами прямоугольной и треугольной формы, так как учтены статистические связи между параметрами импульса, а статистические связи и распределения параметров импульса заданы в общем виде.

Далее рассмотрим следующую случайную последовательность импульсов: распределения амплитуд и длительностей импульсов заданы в общем виде, импульсы имеют произвольную форму, параметры импульсов статистически независимы. Из общей формулы (7) находим:

$$S(f) = \nu\{\langle a^2\rangle\langle|F_0(f,\tau)|^2\rangle + \\ +2\,\mathrm{Re}\frac{\langle a\rangle^2\langle F_0^*(f,\tau)\rangle\langle F_0(f,\tau)e^{2\pi i f\tau}\rangle}{1-\langle e^{2\pi i f\tau}\rangle}\}. \quad (12)$$

Отметим, что данное выражение описывает спектр случайной последовательности импульсов, в которой амплитуда и длительность импульса статистически независимы.

Заключение

В работе проанализированы стохастические импульсные процессы. Вычислено выражение общего вида для спектра следующей случайной последовательности импульсов: параметры импульса статистически связаны, статистические связи и распределения параметров импульса заданы в общем виде, импульс имеет произвольную форму, параметры различных импульсов статистически независимы. Вычислены универсальные выражения для спектров таких последовательностей с импульсами прямоугольной и треугольной форм. Подстановка соответствующих распределений параметров в полученные формулы позволяет легко получить выражения для спектров процессов в многочисленных частных случаях. Результаты статьи могут быть широко использованы для анализа случайных импульсных процессов в различных областях физики и многих отраслях техники.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Якубович Б. И.* Электрические флуктуации в твердых телах. — Germany: AV Akademikerverlag, 2013.

2. *Якубович Б. И.* Электрический шум и дефекты структуры твердых тел. — Germany: LAP Lambert Academic Publishing, 2012.

3. *Якубович Б. И.* Электрические флуктуации в неметаллах. — СПб.: Энергоатомиздат, 1999.

4. *Якубович Б. И.* // Успехи прикладной физики. 2013. Т. 1. № 6. С. 649.

Spectra of stochastic pulse processes

B. I. Yakubovich

Petersburg Nuclear Physics Institute
Orlova Roshcha, Gatchina, Leningrad district, 188300, Russia
E-mail yakubovich@pnpi.spb.ru

Received February 10, 2015

Stochastic pulse processes are analyzed. Expressions of general form for spectra of random pulse processes are calculated. The obtained results can be widely used in physics and technique.

PACS: 05.40.-a; 72.70.+m

Keywords: stochastic, pulse, spectrum, sequence.

REFERENCES

1. B. I. Yakubovich, *Electric Fluctuations in Solids* (Germany: AV Akademikerverlag, 2013).
2. B. I. Yakubovich, *Electric Noise and Structural Defects of Solids* (Germany: LAP Lambert Academic Publishing, 2012).
3. B. I. Yakubovich, *Electric Fluctuations in Nonmetals* (Energoatomizdat, SPb, 1999) [in Russian].
4. B. I. Yakubovich, Uspekhi Prikladnoi Fiziki **1,** 649 (2013).