

УДК 517.95: 53.091: 681.7.069.24

**Мнимая фаза излучения и доплеровские частоты**

Б. В. Мелкумян

*Обсуждается обнаруженное ранее комплексное изменение фазы излучения в ускоренно движущемся линейном лазерном резонаторе с неподвижными друг относительно друга элементами обрамления. Показано, что переменная мнимая фаза излучения не зависит от показателя преломления однородной среды, заполняющей ускоренный лазерный резонатор с неизменной структурой фазы. Рассмотрена фаза излучения в пределе постоянной скорости движения собственной системы отсчёта излучателя (резонатора). Из закона сохранения энергии при равномерном перемещении (в операторном виде) получено, что фаза излучения инвариантна величине скорости. Получено, что зависимость частоты излучения от постоянной скорости резонатора является доплеровской в различных инерциальных системах отсчёта. Так, из закона сохранения энергии можно получить постоянную фазовую скорость света для любых собственных инерциальных систем.*

PACS: 07.60.Ly, 42.87.Bg

*Ключевые слова:* действие, энергия, показатель преломления, мнимая фаза, доплеровская частота.

**Введение**

Данная работа продолжает теоретическое обоснование динамического изменения моды излучения линейного лазерного резонатора при его ускоренном движении. Ранее наблюдалось изменение интенсивности излучения и появление дополнительных (не дифракционных) пучков при движении резонатора [1—3], были созданы прототипы автономного резонаторного датчика (АРД) ускоренного движения объекта [4—8].

Цель работы — определение условий и пределов существования динамического изменения моды излучения, в том числе: определение влияния однородной среды; определение фазы в пределе постоянной скорости движения и влияние скорости на частоту излучения в различных системах отсчёта.

Принимаем, что среда в резонаторе однородная, электронейтральная, с постоянными диэлектрической и магнитной проницаемостями ( $\epsilon$ ;  $\mu = \text{const}$ ).

Мы рассматриваем линейный лазерный резонатор из жёстких элементов, неподвижных друг

относительно друга при движении. Считаем, что для подобной системы выполняются преобразования Галилея [9] для времени и координат.

После замены переменных и оператора в волновом уравнении для излучения [10], уравнение примет, согласно [11], следующий вид для фазы поля  $\Phi$  в ускоренном резонаторе:

$$\Delta_0 \Phi = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (\dot{\mathbf{S}}(t) \cdot \vec{\nabla}_0) \right\}^2 \Phi. \quad (1)$$

Уравнение (1) записано относительно собственной системы отсчёта резонатора, но через переменные величины системы инерциального наблюдателя.

**Преобразования действия и энергии**

Уравнение (1) содержит несколько неизвестных функций. Поэтому для определения зависимости фазы  $\Phi$  от вектора перемещения необходимо использовать три уравнения связи фазы и координат вектора перемещения. Первое дополнительное уравнение:

$$\hat{E} = \hat{E}_0 - (\dot{\mathbf{S}}(t) \cdot \hat{\mathbf{P}}). \quad (2)$$

В (2) операторы  $\hat{E}$  и  $\hat{E}_0$  определяют энергию электромагнитного поля в неравномерно движущемся резонаторе и в системе инерциального наблюдателя соответственно,  $\hat{\mathbf{P}}$  — оператор импульса в собственной системе отсчёта резонатора.

**Мелкумян Баграт Владимирович**, профессор.  
Московский университет им. С. Ю. Витте.  
Россия, 115432, Москва, Кожуховский 2<sup>й</sup> проезд, 12.  
Институт общей физики им. А. М. Прохорова РАН.  
Россия, 119991 Москва, ул. Вавилова, 38.  
Тел. +7 (909) 995-34-67. E-mail: bgo@bk.ru

Статья поступила в редакцию 18 января 2016 г.

© Мелкумян Б. В., 2016

Впервые уравнение (2), но не в операторном виде, а как функциональное соотношение, предложили применить для анализа явлений в кольцевом лазере в работах [12, 13], но практических результатов там получено не было.

Второе уравнение связи для преобразования величины действия [14]:

$$A(t; \mathbf{r}) = A(0; \mathbf{r}) + (\mathbf{S}(t) \cdot \tilde{\mathbf{P}}). \quad (3)$$

В (3) функция  $A(t; \mathbf{r})$  — это действие излучения в собственной системе отсчёта при её неравномерном движении,  $A(0; \mathbf{r})$  — действие излучения в начальный момент времени, до перемещения ( $t = 0$ ), остальные обозначения — как в (2).

Общие собственные функции уравнений (1), (2) и (3) ищем в виде векторов напряжённости электрического поля с фазой  $\Phi(t; \mathbf{r})$ . Для этих функций уравнение (2) примет вид:

$$\dot{\Phi}(t; \mathbf{r}) \pm (\dot{\mathbf{S}} \cdot \tilde{\nabla}_0) \Phi(t; \mathbf{r}) = \omega(t; \mathbf{r}). \quad (4)$$

Так же, в единицах  $\hbar$ , соотношение (3) примет вид уравнения:

$$\Phi(t; \mathbf{r}) = \Phi(0; \mathbf{r}) \mp (\mathbf{S}(t) \cdot \tilde{\nabla}_0) \Phi(t; \mathbf{r}). \quad (5)$$

Из (1), (4) и (5) мы далее получим уравнение состояния излучения ускоренного резонатора (уравнение движения излучения).

### Однородная среда

Получим уравнение состояния излучения ускоренного резонатора в однородной среде. Для этого, с учётом (4) для положительных волн ( $\mathbf{E}_+$ ), преобразуем (1):

$$\begin{aligned} \Delta_0 \Phi(t; \mathbf{r}) &= \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (\dot{\mathbf{S}} \cdot \tilde{\nabla}_0) \right\} \omega(t; \mathbf{r}) = \\ &= \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \dot{\Phi}(t; \mathbf{r}) + (\dot{\mathbf{S}} \cdot \tilde{\nabla}_0) \Phi \right] + \right. \\ &\quad \left. + (\dot{\mathbf{S}} \cdot \tilde{\nabla}_0) \left[ \dot{\Phi}(t; \mathbf{r}) + (\dot{\mathbf{S}} \cdot \tilde{\nabla}_0) \Phi \right] \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

или, раскрыв квадратные скобки в правой части (6), приведём его к виду

$$\begin{aligned} \Delta_0 \Phi &= \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \left\{ \ddot{\Phi} + (\ddot{\mathbf{S}} \cdot \tilde{\nabla}_0) \Phi + \right. \\ &\quad \left. + 2 \cdot (\dot{\mathbf{S}} \cdot \tilde{\nabla}_0) \dot{\Phi} + (\dot{\mathbf{S}})^2 \cdot \Delta_0 \Phi \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

В (7) избавимся от коэффициента  $(\varepsilon\mu / c^2)$ , определяющего зависимость фазы от однородной среды. Заменим фазу в правой части (7), в слагаемом  $(\ddot{\mathbf{S}} \cdot \tilde{\nabla}_0) \Phi$ , на величину (5), а первую частную производную фазы по времени в слагаемом  $2 \cdot (\dot{\mathbf{S}} \cdot \tilde{\nabla}_0) \dot{\Phi}$  — на величину из (4). Получим соотношение, эквивалентное (1), (4) и (5), преобразовав (7) и сгруппировав, справа в (7), слагаемые с лапласианом:

$$\begin{aligned} \Delta_0 \Phi &= \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \left\{ \ddot{\Phi} - \left[ (\ddot{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{S}) + (\dot{\mathbf{S}})^2 \right] \cdot \Delta_0 \Phi + \right. \\ &\quad \left. + 2(\dot{\mathbf{S}} \cdot \tilde{\nabla}_0) \omega + (\ddot{\mathbf{S}} \cdot \tilde{\nabla}_0) \Phi(0; \mathbf{r}) \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Во втором слагаемом правой части (8) преобразуем коэффициент при лапласиане. Здесь далее  $S$  — модуль вектора  $\mathbf{S}$ . Приравняв лапласианы в (8) и (1), получим уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (\dot{\mathbf{S}} \cdot \tilde{\nabla}_0) \right\} \omega = \\ = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \left\{ \ddot{\Phi} - \frac{1}{2} S^2 \cdot \Delta_0 \Phi + 2(\dot{\mathbf{S}} \cdot \tilde{\nabla}_0) \omega + (\ddot{\mathbf{S}} \cdot \tilde{\nabla}_0) \Phi(0; \mathbf{r}) \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Сократив коэффициенты и сгруппировав слагаемые в (9), приходим, как и в [15—17], к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \ddot{\Phi}(t; \bar{\mathbf{r}}) - \left\{ \frac{1}{2} S^2 \right\} \Delta_0 \Phi(t; \bar{\mathbf{r}}) = \\ = \dot{\omega} - (\dot{\mathbf{S}} \cdot \tilde{\nabla}_0) \omega - (\ddot{\mathbf{S}} \cdot \tilde{\nabla}_0) \Phi(0; \bar{\mathbf{r}}). \end{aligned} \quad (10)$$

Как видим, в уравнении движения излучения (10) не осталось зависимости от однородного показателя преломления света ( $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ ) и фазовой скорости света в среде.

### Фаза излучения и доплеровские частоты

Получим из уравнения (4), что фаза  $\Phi(t; \mathbf{r})$  остаётся неизменной в собственной системе отсчёта, движущейся со скоростью ( $\mathbf{v} = \text{const}$ ) относительно инерциальной системы, и равной фазе  $\Phi(t; \mathbf{r}_0)$  того же излучения в неподвижной инерциальной системе.

Радиус-векторы  $\mathbf{r}(x'; y'; z')$  и  $\mathbf{r}_0(x; y; z)$  для одной и той же точки пространства относительно собственной системы отсчёта и неподвижной системы отсчёта инерциального наблюдателя соот-

ветственно связаны с постоянной скоростью  $\mathbf{v}$  следующим соотношением:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t; \quad (11)$$

если резонатор с излучением движется по направлению к неподвижному наблюдателю, и

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{v}t; \quad (12)$$

если резонатор с излучением движется по направлению от неподвижного наблюдателя.

Уравнение (4) при постоянной скорости допускает разделение переменных в виде:

$$\begin{aligned} \Phi(t; \mathbf{r}_0) &= \Phi_0(t) + \Theta(t; \mathbf{r}_0) = \\ &= \omega t + [\Theta_t(t) + \Theta_x(x) + \Theta_y(y) + \Theta_z(z)]. \end{aligned} \quad (13)$$

Используя (4), уравнение для  $\Theta(t; \mathbf{r})$ , с учётом соотношения (13), можно привести к виду:

$$\begin{aligned} \partial\Theta_t(t)/\partial t &= -[v_x \cdot \partial\Theta_x(x)/\partial x + \\ &+ v_y \cdot \partial\Theta_y(y)/\partial y + v_z \cdot \partial\Theta_z(z)/\partial z], \end{aligned} \quad (14)$$

где координаты вектора скорости удовлетворяют условию:

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = (\mathbf{v})^2. \quad (15)$$

Разделительные постоянные для (14) при  $(\mathbf{v} = \text{const})$  определяются из (16) и (17):

$$\xi = \partial\Theta_t(t)/\partial t = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}); \quad (16)$$

$$\xi_a = -v_a \cdot \partial\Theta_a(a)/\partial a = k_a \cdot v_a; \quad (17)$$

где:  $a = x; y; z$ .

Постоянные ( $\xi_x; \xi_y; \xi_z$  и  $\xi$ ) связаны, учитывая (14), (16) и (17), в виде суммы:

$$\xi = \xi_x + \xi_y + \xi_z = k_x \cdot v_x + k_y \cdot v_y + k_z \cdot v_z = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}). \quad (18)$$

Здесь есть два случая: когда резонатор с излучением движется к неподвижному наблюдателю и когда он (источник излучения) движется от неподвижного наблюдателя. В обоих случаях волновой вектор  $\mathbf{k}$  направлен от источника излучения к неподвижному наблюдателю, который должен принять излучение для определения частоты.

В первом случае, с учётом соотношений (16) и (17), разделительная постоянная величина  $\xi > 0$ ; а полная фаза (13), измеренная для собственной частоты  $\omega$  в движущейся системе, выраженная в координатах неподвижного наблюдателя, равна следующему значению:

$$\begin{aligned} \Phi_I(t; \mathbf{r}_0) &= \omega t + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})t - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0) = \\ &= [\omega + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})]t - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0) = (\omega_{+0} \cdot t) - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0). \end{aligned} \quad (19)$$

Согласно соотношениям (19), частота излучения источника, движущегося к неподвижному наблюдателю, равна доплеровской частоте «синего смещения»:

$$\omega_{+0} = \omega + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}). \quad (20)$$

Вместе с тем, в первом случае полная фаза, измеренная неподвижным наблюдателем для частоты излучения  $\omega_{+0}$  в координатах движущейся системы, равна полной фазе, измеренной, согласно соотношению (13), с учётом (11) и (17), в виде величины:

$$\begin{aligned} \Phi_I(t; \mathbf{r}) &= (\omega_{+0} \cdot t) + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})t - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \\ &= (\omega_{+0} \cdot t) - \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{v}t) = \\ &= (\omega_{+0} \cdot t) - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0) = \Phi_I(t; \mathbf{r}_0). \end{aligned} \quad (21)$$

Поэтому полная фаза излучения резонатора не зависит, согласно (21), от выбора инерциальной системы отсчёта.

Во втором случае, когда резонатор с излучением движется от неподвижного наблюдателя, разделительная постоянная  $\xi < 0$ ; а полная фаза для собственной частоты  $\omega$  в движущейся системе, выраженная в координатах неподвижного наблюдателя, равна величине:

$$\begin{aligned} \Phi_{II}(t; \mathbf{r}_0) &= \omega t - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})t - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0) = \\ &= [\omega - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})]t - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0) = \\ &= (\omega_{-0} \cdot t) - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0). \end{aligned} \quad (22)$$

Согласно соотношениям (22), частота излучения источника, движущегося от неподвижного наблюдателя, равна доплеровской частоте «красного смещения»:

$$\omega_{-0} = \omega - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}). \quad (23)$$

Вместе с тем, во втором случае получим, аналогично (21) для фазы, измеренной неподвижным наблюдателем, следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \Phi_{II}(t; \mathbf{r}) &= (\omega_{-0} \cdot t) - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})t - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \\ &= (\omega_{-0} \cdot t) - \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} + \mathbf{v}t) = \\ &= (\omega_{-0} \cdot t) - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0) = \Phi_{II}(t; \mathbf{r}_0). \end{aligned} \quad (24)$$

Поэтому и здесь, как и в (21), полная фаза излучения резонатора не зависит, согласно (24), от выбора инерциальной системы отсчёта. Собственная частота также не меняется.

## Заключение

Основные результаты работы можно сформулировать следующим образом.

1. Рассмотрено изменение состояния излучения в равноускоренном резонаторе.

2. Мнимая фаза излучения не зависит от показателя преломления однородной среды, заполняющей ускоренный лазерный резонатор с неизменной структурой фазы.

3. Из закона сохранения энергии при равномерном перемещении в операторном виде получено, что фаза излучения инвариантна величине скорости. Так, из закона сохранения энергии, можно получить постоянную фазовую скорость света для инерциальных систем.

*Автор выражает свою глубокую благодарность участникам семинаров, на которых обсуждались представленные результаты, за активные обсуждения и высказанные ценные замечания. В том числе участникам семинара отдела теоретической физики ИОФ им. А. М. Прохорова РАН и участникам семинара кафедры теории функций и функционального анализа мехмата МГУ им. М. В. Ломоносова.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Melkougian B. V. // Proc. SPIE. 2000. Vol. 4348. P. 2.
2. Melkougian B. V. // Proc. SPIE. 2001. Vol. 4365. P. 28.
3. Melkougian B. V. // Proc. SPIE. 2002. Vol. 4627. P. 37.
4. Melkougian B. V. US Patent No. 5,652,390; date of patent: July 29, 1997. Class: 073-657.000.
5. Melkougian B. V. // Proc. SPIE. 2005. Vol. 5978. P. 61.
6. Melkougian B. V. // Proc. SPIE. 2007. Vol. 6736. P. 10.
7. Мелкумян Б. В. // Прикладная физика. 2014. № 4. С. 97.
8. Мелкумян Б. В. // Прикладная физика. 2015. № 1. С. 96.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. — Москва: Наука, 1973.
10. Борн М., Вольф Э., Основы оптики. — Москва: Наука, 1970.
11. Melkougian B. V. // Proc. SPIE. 2007. Vol. 6736. P. 67360D-1.
12. Heer C. V. Physical Review. 1964. Vol. 134. P. A799.
13. Померанцев Н. М., Скоцкий Г. В. // Успехи физических наук. 1970. Т. 100. № 3. С. 361.
14. Melkougian B. V. / Proceedings of the 11th Workshop on Magneto-Plasma Aerodynamics. (Joint Institute of High Temperature of RAS, Moscow, 2012). P. 366.
15. Melkougian B. V. // Bulletin of the Lebedev Physics Institute. 2014. Vol. 41. No. 2. P. 35.
16. Melkougian B. V. // Bulletin of the Lebedev Physics Institute. 2014. Vol. 41. No. 7. P. 181.
17. Мелкумян Б. В. // Прикладная физика. 2014. № 3. С. 17.

## Radiation phase and the Doppler

B. V. Melkougian

Vitte Moscow University  
12 2-nd Kozhukhovskiy passage, Moscow, 115432, Russia  
E-mail: bgo@bk.ru

Prokhorov General Physics Institute, Russian Academy of Sciences  
38 Vavilov str., Moscow, 119991, Russia

Received January 18, 2016

*We discuss the previously observed complex radiation phase changing in irregular moving linear laser resonator with fixed relative to each other elements of the frame. It is shown that the variable imaginary phase of radiation does not depend on the refractive index of the homogeneous medium filling accelerated laser resonator with a constant phase structure. We consider the phase of the radiation in the limit of constant moving velocity of its own frame of reference of the radiation source (resonator). It is derived from the law of conservation of energy for a regular movement (in the operator form) that phase of radiation is invariant to the movement velocity. We proved that radiation frequency dependence from the resonator constant velocity is Doppler. So we get constant phase velocity of light in any of its own inertial systems derived from the law of conservation of energy for a regular movement in the operator form.*

PACS: 07.60.Ly, 42.87.Bg

*Keywords:* action, energy, index of refraction, imaginary phase, Doppler frequency.

## REFERENCES

1. B. V. Melkounian, SPIE Proceedings **4348**, 02 (2000).
2. B. V. Melkounian, SPIE Proceedings **4365**, 28 (2001).
3. B. V. Melkounian, SPIE Proceedings **4627**, 37 (2002).
4. B. V. Melkounian, US Patent No. 5,652,390; date of patent: July 29, 1997. Class: 073-657.000.
5. B. V. Melkounian, SPIE Proceedings **5978**, 61 (2005).
6. B. V. Melkounian, SPIE Proceedings **6736**, 10 (2007).
7. B. V. Melkounian, Prikl. Fiz., No. 4, 97 (2014).
8. B. V. Melkounian, Prikl. Fiz., No. 1, 96 (2015).
9. L. D. Landau and E. M. Lifshits, Mechanics (Nauka, Moscow, 1973) [in Russian].
10. M. Born and E. Volf, Principles of Optics (Nauka, Moscow, 1970) [in Russian].
11. B. V. Melkounian. SPIE Proceedings **6736**, 67360D-1 (2007).
12. C. V. Heer, Physical Review **134**, A799 (1964).
13. N. M. Pomerantsev and G. V. Skrotskii, Phys. Usp. **100**, 361 (1970).
14. B. V. Melkounian, in *Proceedings of the 11th Workshop on Magneto-Plasma Aerodynamics*. (Joint Institute of High Temperature of RAS, Moscow, 2012). P. 366.
15. B. V. Melkounian, Bulletin of the Lebedev Physics Institute **41** (2), 35 (2014).
16. B. V. Melkounian, Bulletin of the Lebedev Physics Institute **41** (7), 181 (2014).
17. B. V. Melkounian, Prikl. Fiz., No. 3, 17 (2014).