УДК 538.9; 519.216

О спектрах случайных процессов

Б. И. Якубович

Вычисляются спектры случайных процессов, использующихся при описании многих физических явлений. Вычислен спектр суммы случайного числа случайных величин. Вычислен спектр случайной последовательности импульсов со статистически связанными амплитудой и длительностью импульса. Получены выражения общего вида для спектров рассмотренных процессов. Данные результаты могут быть использованы при анализе спектров физических процессов различной природы, для описания которых применяются рассмотренные случайные процессы. Из полученных выражений общего вида, переходя к частным случаям, можно непосредственно определить спектры конкретных физических процессов. Полученные результаты могут быть применены в различных областях физики при решении как фундаментальных, так и прикладных задач.

PACS: 05.40.-a; 72.70.+m

Ключевые слова: спектры, случайные процессы, физические процессы, случайные последовательности, импульсы.

Введение

Многие физические процессы, наблюдающиеся в объектах различной природы и относящиеся к различным областям физики, представляют собой стохастические процессы [1—5]. Важной и во многом определяющей характеристикой стохастического процесса является его спектр. При решении многочисленных физических задач, как фундаментальных, так и прикладных, необходимо вычислять спектры случайных процессов (с непрерывным временем и дискретным временем). В связи с этим представляется целесообразным вычислить в достаточно общем виде спектры наиболее значительных случайных процессов, часто встречающихся при решении различных физических задач. Полученные решения общего вида могли бы быть использованы в многочисленных частных случаях для непосредственного определения спектров процессов при изучении физических явлений различной природы.

Якубович Борис Иосифович, старший научный сотрудник.
Петербургский институт ядерной физики
Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт».
Россия, 188300, Ленинградская обл., г. Гатчина, Орлова роща.
Тел. 81371-4-64-92. E-mail yakubovich@pnpi.spb.ru

Статья поступила в редакцию 4 октября 2016 г.

Рассмотрим следующие случайные процессы. При теоретическом анализе физических процессов нередко приходится проводить суммирование случайного числа случайных величин. Такая задача рассматривается давно. Математическое ожидание суммы случайного числа случайных величин впервые вычислено в [6]. В более общем виде этот вопрос решен в [7]. Позднее вычислялись моменты более высокого порядка. В данной статье вычисляется спектр суммы случайного числа случайных величин.

Многие физические процессы имеют вид случайной последовательности импульсов [8—10]. В значительном числе случаев имеется корреляция между амплитудой и длительностью импульса. Характер статистической связи определяется конкретным типом процесса. Представляется целесообразным вычисление спектра случайного импульсного процесса со статистически связанными амплитудой и длительностью импульса при заданной в общем виде статистической связи. Такая задача решается в данной статье.

Сумма случайного числа случайных величин

Рассматриваем сумму случайного числа случайных величин. Имеется случайное число N_a взаимно независимых одинаково распределенных случайных величин $N_1, ..., N_{N_a}$. Сумму случайных величин N' в момент времени t запишем в следующем виде:

$$N'(t) = \sum_{i=1}^{\langle N_a\rangle+\delta N_a(t)} (\langle N_i\rangle + \delta N_i(t)). \quad (1)$$

Здесь $\langle N_i\rangle + \delta N_i(t)$ — значение случайной величины с номером i в момент времени t, где $\langle N_i\rangle$ — среднее значение случайной величины; $\langle N_a\rangle + \delta N_a(t)$ — число случайных величин в момент времени t, где $\langle N_a\rangle$ — среднее число случайных величин. Вычислим корреляционную функцию суммы случайного числа случайных величин $B_{N'}(\tau)$:

$$B_{N'}(\tau) = \langle N'(t)N'(t+\tau)\rangle - \langle N'(t)\rangle\langle N'(t+\tau)\rangle. \quad (2)$$

$$\begin{gathered}\langle N'(t)N'(t+\tau)\rangle = \langle N\rangle^2\langle N_a\rangle^2 + \\ +\langle N\rangle^2\langle \delta N_a(t)\delta N_a(t+\tau)\rangle + \\ + \sum_{i=1}^{\langle N_a\rangle+\delta N_a(t)} \sum_{j=1}^{\langle N_a\rangle+\delta N_a(t+\tau)} \langle \delta N_i(t)\delta N_j(t+\tau)\rangle,\end{gathered} \quad (3)$$

здесь учтено, что случайные величины распределены одинаково и что $\langle \delta N_i(t)\rangle = 0$, $\langle \delta N_j(t+\tau)\rangle = 0$, $\langle \delta N_a(t)\rangle = 0$, $\langle \delta N_a(t+\tau)\rangle = 0$. Рассмотрим практически важный для физики случай, когда характеристические времена изменения числа случайных величин много больше характеристических времен изменения значений случайных величин. Тогда учитывая, что случайные величины взаимно независимы, получаем следующее выражение:

$$\begin{gathered}\langle N'(t)N'(t+\tau)\rangle = \langle N\rangle^2\langle N_a\rangle^2 + \\ +\langle N\rangle^2\langle \delta N_a(t)\delta N_a(t+\tau)\rangle + \langle N_a\rangle\langle \delta N(t)\delta N(t+\tau)\rangle.\end{gathered} \quad (4)$$

Поскольку

$$\langle N'(t)\rangle\langle N'(t+\tau)\rangle = \langle N\rangle^2\langle N_a\rangle^2, \quad (5)$$

то имеем соотношение:

$$\begin{gathered}B_{N'}(\tau) = \langle N\rangle^2\langle \delta N_a(t)\delta N_a(t+\tau)\rangle + \\ +\langle N_a\rangle\langle \delta N(t)\delta N(t+\tau)\rangle.\end{gathered} \quad (6)$$

Вводя обозначения

$$B_{N_a}(\tau) = \langle \delta N_a(t)\delta N_a(t+\tau)\rangle, \quad (7)$$

$$B_N(\tau) = \langle \delta N(t)\delta N(t+\tau)\rangle, \quad (8)$$

получаем выражение для корреляционной функции

$$B_{N'}(\tau) = \langle N\rangle^2 B_{N_a}(\tau) + \langle N_a\rangle B_N(\tau). \quad (9)$$

Отметим, что в частном случае, когда $\tau = 0$, данное выражение переходит в известную формулу для дисперсии

$$D_{N'} = \langle N\rangle^2 D_{N_a} + \langle N_a\rangle D_N. \quad (10)$$

Применяя теорему Винера-Хинчина, связывающую спектр с корреляционной функцией:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau, \quad (11)$$

получаем из (9) следующую формулу:

$$S_{N'}(f) = \langle N\rangle^2 S_{N_a}(f) + \langle N_a\rangle S_N(f). \quad (12)$$

Таким образом, вычислен спектр суммы случайного числа случайных величин. Полученное выражение (12) является достаточно общим, так как не наложено ограничений на вид распределений случайных величин.

Случайная последовательность импульсов

Вычислим спектр случайной последовательности импульсов. Рассматриваем весьма общий случай: распределения параметров импульса заданы в общем виде, амплитуда и длительность импульса статистически связаны, статистическая связь задана в общем виде. Считаем, что рассматриваемый стохастический процесс стационарен. Случайную последовательность импульсов запишем следующим образом:

$$X(t) = \sum_{j=1}^{n} A_j x(t - \tau_1 - \theta_1 \ldots - \tau_{j-1} - \theta_{j-1}, \tau_j), \quad (13)$$

где $x(t)$ — функция, описывающая форму импульса, A — амплитуда, τ — длительность импульса, θ — временной интервал между импульсами. Проведем преобразование Фурье случайной последовательности импульсов:

$$\begin{gathered}F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-2\pi ift}dt = \\ = \sum_{j=1}^{n} A_j e^{-2\pi if(\tau_1+\theta_1 \ldots + \tau_{j-1}+\theta_{j-1})} F_0(f, \tau_j),\end{gathered} \quad (14)$$

где

$$F_0(f, \tau_j) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t, \tau_j)e^{-2\pi ift}dt. \quad (15)$$

Тогда

$$\left|F(f)\right|^2 = \sum_{j=1}^{n} A_j^{\,2} \left|F_0(f,\tau_j)\right|^2 +$$

$$+2\,\mathrm{Re}\sum_{j}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-j} A_j A_{j+i} e^{2\pi i f(\tau_j+\theta_j\ldots+\tau_{j+i-1}+\theta_{j+i-1})} \times \qquad (16)$$

$$\times F_0(f,\tau_j)F_0^{\,*}(f,\tau_{j+i}).$$

В соответствии с указанными выше статистическими связями в рассматриваемой последовательности импульсов, рассчитываем среднее по ансамблю $\langle \left|F(f)\right|^2 \rangle$:

$$\langle \left|F(f)\right|^2 \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle A_j^{\,2} \left|F(f,\tau_j)\right|^2 \rangle +$$

$$+2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-j} \langle A_j F_0(f,\tau_j) e^{2\pi i f \tau_j} \rangle \langle A_{j+i} F_0^{\,*}(f,\tau_{j+i}) \rangle \times \qquad (17)$$

$$\times \langle e^{2\pi i f \theta_j} \rangle \langle e^{2\pi i f \tau_{j+1}} \rangle \langle e^{2\pi i f \theta_{j+1}} \rangle \ldots \langle e^{2\pi i f \tau_{j+i-1}} \rangle \langle e^{2\pi i f \theta_{j+i-1}} \rangle.$$

Вычисляем спектральную плотность случайной последовательности импульсов, определяемую соотношением

$$S(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{\langle \left|F(f)\right|^2 \rangle}{T}. \qquad (18)$$

Учитывая стационарность рассматриваемого стохастического импульсного процесса, получаем следующее выражение:

$$S(f) = \nu \left\{ \begin{array}{l} \langle A^2 \left|F_0(f,\tau)\right|^2 \rangle + \\ +2\,\mathrm{Re}\langle A F_0(f,\tau) e^{2\pi i f \tau} \rangle \langle A F_0^{\,*}(f,\tau) \rangle \times \\ \times \dfrac{\langle e^{2\pi i f \theta} \rangle}{1-\langle e^{2\pi i f \tau} \rangle \langle e^{2\pi i f \theta} \rangle} \end{array} \right\}, \qquad (19)$$

где $\nu = \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{n}{T}$ — среднее число импульсов в единицу времени. Полученная формула (19) описывает спектр случайной последовательности импульсов в весьма общем случае. Импульсы имеют произвольную форму. Распределения параметров импульсов заданы в общем виде. Амплитуда и длительность импульса статистически связаны. Статистическая связь задана в общем виде. Заданная в столь общем виде случайная последовательность импульсов в различных частных случаях применима для описания многочисленных физических процессов. Соответственно из полученной общей формулы (19) легко определить в частных случаях выражения для спектров, описывающие конкретные физические процессы. Для этого достаточно задать форму импульсов, распределения параметров импульсов и вид статистической связи.

Заключение

В данной статье вычислены в достаточно общем виде спектры случайных процессов, широко применяющихся при решении различных физических задач. Вычислен спектр суммы случайного числа случайных величин. Вычислен спектр случайной последовательности импульсов при статистической связи амплитуды и длительности импульса, заданной в общем виде. Полученные результаты могут быть использованы при изучении физических явлений различной природы, для описания которых применяются рассмотренные случайные процессы. Из найденных решений общего вида в многочисленных частных случаях могут быть непосредственно определены спектры конкретных физических процессов. Полученные решения могут быть эффективно применены в разных областях физики при проведении как фундаментальных, так и прикладных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рытов С. М.* Введение в статистическую радиофизику. Часть 1. — М.: Наука, 1976.
2. *Ахманов С. А., Дьяконов Ю. Е., Чиркин А. С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1981.
3. *Ван Кампен Н. Г.* Стохастические процессы в физике и химии. — М.: Высшая школа, 1990.
4. *Бункин Н. Ф., Морозов А. Н.* Стохастические системы в физике и технике. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011.
5. *Якубович Б. И.* Электрические флуктуации в твердых телах. — Germany: AV Akademikerverlag, 2013.
6. *Wald A.* // Ann. of Math. Stat. 1944. Vol. 15. No. 3. P. 283.
7. *Колмогоров А. Н., Прохоров Ю. В.*// УМН. 1949. Т. 4. № 4. С. 168.
8. *Якубович Б. И.* Электрические флуктуации в неметаллах. — СПб.: Энергоатомиздат, 1999.
9. *Якубович Б. И.* // Письма ЖТФ. 1995. Т. 21. № 24. С. 10.
10. *Якубович Б. И.* Электрический шум и дефекты структуры твердых тел. — Germany: LAP Lambert Academic Publishing, 2012.

Spectra of some random processes

B. I. Yakubovich

Petersburg Nuclear Physics Institute
Gatchina, Leningrad district, 188300, Russia
E-mail: yakubovich@pnpi.spb.ru

Received October 4, 2016

Spectra of random processes which are used at the description of many physical phenomena are calculated. The spectrum of sum of random number of random values is calculated. The spectrum of random sequence of pulses with statistically connected amplitude and duration of pulse is calculated. Expressions of general form for spectra of considered processes are obtained. These results can be used in the analysis of spectra of physical processes of various nature when considered random processes are applied to their description. From obtained expressions of general form, passing to special cases, it is possible to define spectra of concrete physical processes immediately. The obtained results can be applied in various fields of physics at the solution of both fundamental, and applied tasks.

PACS: 05.40.-a; 72.70.+m

Keywords: spectra, random processes, physical processes, random sequences, pulses.

REFERENCES

1. S. M. Rytov, *Introduction in Statistical Radiophysics. Part 1.* (Nauka, Moscow, 1976) [in Russian].
2. S. A. Akhmanov, Yu. E. D'yakonov, and A. S. Chirkin, *Introduction in Statistical Radiophysics and Optics* (Nauka, Moscow, 1981) [in Russian].
3. N. G. Van Kampen, Stochastic *Processes in Physics and Chemistry* (Vyssh. Shkola, Moscow, 1990) [in Russian].
4. N. F. Bunkin and A. N. Morozov, *Stochastic Systems in Physics and Technique* (Izd. MGTU, 2011) [in Russian].
5. B. I. Yakubovich, *Electrical Fluctuations in Solids* (Germany: AV Akademikerverlag, 2013.)
6. A. Wald, Ann. of Math. Stat. **15,** 283 (1944).
7. A. N. Kolmogorov and Yu. V. Prokhorov, UMN **4** (4), 168 (1949).
8. B. I. Yakubovich, *Electrical Fluctuations in Nonmetals* (Energoatomizdat, St.-Petersburg, 1999).[in Russian].
9. B. I. Yakubovich, Tech. Phys. Lett. **21** (24), 10 (1995).
10. B. I. Yakubovich, *Electrical Noise and Defects of Solid State Structures* (Germany: LAP Lambert Academic Publishing, 2012).