

## ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ОТ ИНТЕНСИВНОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ

А. М. Греков, М. Б. Береснев

Вятский государственный технический университет, г. Киров, Россия

*Рассмотрена зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций. В теорию расчета впервые вводится секущий модуль пластичности, который наряду с модулем упругости характеризует упруго-пластические свойства материала. Предложена оригинальная аналитическая формула для построения кривых упрочнения.*

Зависимость интенсивности напряжений  $\sigma_j$  от интенсивности деформации  $\epsilon_j$  приведена на рис. 1, а, б в виде диаграмм испытания материала на растяжение [1—7]. Так,  $\sigma_j$  в произвольной точке с криволинейного участка  $ab$  определяется ординатой  $cd$  и равна  $\sigma_s$  [7]:

$$\sigma_j = \sigma_s = dc = kd - kc = \epsilon_c \operatorname{tg}\beta - kc = E \epsilon_c (1 - kc/E \epsilon_c) = E \epsilon_c [1 - \omega(\epsilon_c)].$$

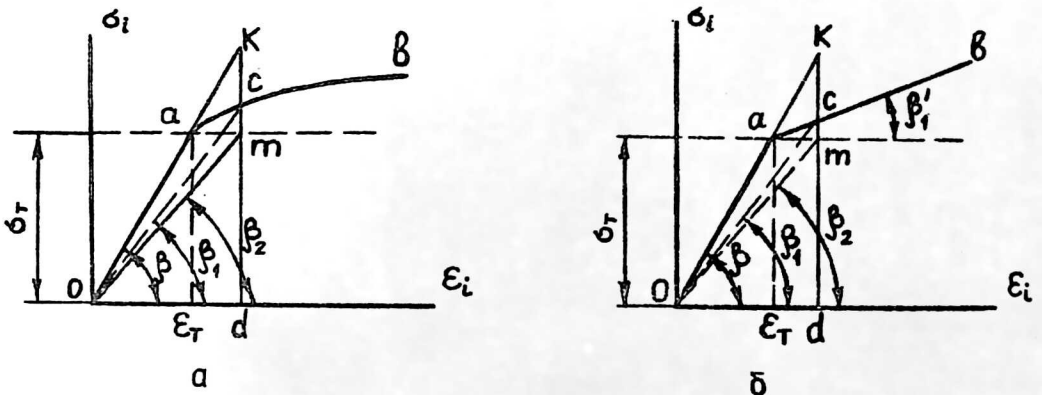


Рис. 1, а, б. Зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций

На основании третьего закона теории малых упруго-пластических деформаций [7] имеем:

$$\sigma_j = E \varepsilon_j [1 - \omega(\varepsilon_j)], \quad (1)$$

где  $\omega(\varepsilon_j)$  — функция понижения напряжений.

Для определенного вида диаграммы растяжения, например, рис. 1, а, функция  $\omega(\varepsilon_j)$  равна:

$$\begin{aligned} \omega(\varepsilon_j) &= \frac{kc}{E \varepsilon_j} = \frac{kd - md - cm}{E \varepsilon_j} = \frac{1}{E \varepsilon_j} [E \varepsilon_j - E \varepsilon_T - E'_1(\varepsilon_j - \varepsilon_T)] = \\ &= \frac{E - E'_1}{E} \frac{\varepsilon_j - \varepsilon_T}{\varepsilon_j} = \lambda \left( 1 - \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_j} \right), \end{aligned}$$

где  $\lambda = \frac{E - E'_1}{E}$  — параметр разупрочнения;

$E'_1$  — модуль разупрочнения первого рода.

Тогда формула (1) примет вид:

$$\sigma_j = E \varepsilon_j \left[ 1 - \lambda \left( 1 - \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_j} \right) \right].$$

Но справедливо было бы функцию  $\omega(\varepsilon_j)$  называть функцией повышения напряжений, а параметр разупрочнения  $\lambda$  — параметром упрочнения, так как с увеличением степени деформации происходит и упрочнение материала, и повышение интенсивности напряжений. Естественно, для определения указанных величин  $\omega(\varepsilon_j)$  и  $\lambda$  по диаграммам растяжения (сжатия) требуется другой подход, чем в рассмотренном случае.

На диаграмме упрочнения (см. рис. 1, б) введены два дополнительных угла —  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , определяющие положения точек на кривой упрочнения  $ab$  и линии текучести  $am$ , например, точек  $s$  и  $m$ . При этом  $\text{tg} \beta_1 = E_1$  — секущий модуль упругости материала первого рода,  $\text{tg} \beta_2 = E_2$  — секущий модуль пластичности идеально пластической среды.

Модуль  $E_1$  известен в теории обработки металлов давлением при изучении кривых упрочнения [8]. Что касается модуля  $E_2$ , то он впервые вводится в теорию расчета с целью изучения функции повышения напряжений  $\omega(\varepsilon_j)$  и параметра упрочнения  $\lambda$ .

Возвращаясь к рис. 1, а, видим, что теперь

$$\begin{aligned} \sigma_j &= \sigma_s = dc = dm + cm = \varepsilon_c \text{tg} \beta_2 + mc = \varepsilon_c E_2 \left( 1 + \frac{mc}{E_2 \varepsilon_c} \right) = \\ &= E \varepsilon_T \left( 1 + \frac{mc}{E \varepsilon_T} \right) = E \varepsilon_T [1 + \omega(\varepsilon_1)], \end{aligned} \quad (2)$$

так как  $E_2 \varepsilon_c = E \varepsilon_T$ .

В полученной формуле (2) функция  $\omega(\varepsilon_j)$  из единицы не вычитается, а прибавляется, что указывает на приращение интенсивности напряжений, а не на уменьшение ее, и согласуется с физической стороной решаемой задачи.

Аналогично, если рассматривать диаграмму, представленную на рис. 1, б, то здесь отрезок  $mc = E_1'(\varepsilon_c - \varepsilon_T)$ ,

$$\omega(\varepsilon_c) = \frac{E_1'(\varepsilon_c - \varepsilon_T)}{E \varepsilon_T} = \frac{E_1'}{E} \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_T} - 1 \right),$$

или в общем виде

$$\omega(\varepsilon_j) = \frac{E_1'}{E} \left( \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_T} - 1 \right) = \lambda \left( \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_T} - 1 \right).$$

С возрастанием величины  $E_1'$  параметр  $\lambda$  также не уменьшается, а увеличивается и его следует называть параметром упрочнения материала.

Формула связи между  $\sigma_j$  и  $\varepsilon_j$  теперь имеет следующий вид:

$$\sigma_j = \sigma_T \left[ 1 + \lambda \left( \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_T} - 1 \right) \right] = \sigma_T [1 + \omega(\varepsilon_j)].$$

Из рис. 1, б также видно, что  $dc = \sigma_c = E_1' \varepsilon_c$

отсюда  $\varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_1'} = \frac{\sigma_T}{E_2}$  и  $\sigma_c = \frac{E_1'}{E_2} \sigma_T$ .

Учитывая, что  $\sigma_c = \sigma_j$  и  $E_2 = \frac{\sigma_T}{\varepsilon_j} = \frac{E \varepsilon_T}{\varepsilon_j}$ , получим:

$$\sigma_j = \sigma_T \frac{E_1'}{E} \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_T} = \sigma_T \left( \lambda_1 \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_T} \right), \quad (3)$$

где  $\lambda = E_1'/E$ .

При  $E = E_1$ ,  $\lambda = 1$  и  $\sigma_j = E \varepsilon_j$ , что отвечает закону деформирования идеально упругого тела, при  $E = E_2$   $\sigma_j = \sigma_T$  обуславливает закон деформирования идеально-пластического тела.

Теоретически кривая упрочнения любого материала может быть построена, если будет установлена закономерность изменения параметра упрочнения  $\lambda$  прямо через модули упругости и пластичности, или косвенно — через другие параметры процесса упрочнения, например, плотность дислокаций.

В. С. Смирнов в своей работе [9] с позиции теории дислокаций дал интерпретацию кривой упрочнения. Он показал, что диаграммы растяжения (сжатия), не имеющие ярко выраженной площадки текучести и "зуба" текучести, хорошо аппроксимируются степенными функциями на основе теории дислокаций.

Согласно теории дислокаций скорость деформации сдвига зависит от скорости дислокаций  $c_g$ . Последняя, в свою очередь, возрастает с увеличением скорости сжатия (растяжения) величины деформации и уменьшается с ростом плотности дислокаций  $\rho_g$ , вектора Бюргерса  $b$  и длины очага деформации. Аналитически эта взаимосвязь имеет вид:  $\dot{\gamma} = b \rho_g c_g$ , а величину пластического сдвига принимают  $\gamma = b \rho_g l$ , где  $l$  — средний путь пробега дислокаций.

В силовом (дислокационном) поле напряжение  $\tau$  обратно пропорционально среднему расстоянию между дислокациями:

$$\tau = G \frac{b}{r} = Gb\sqrt{\rho_g} = G\left(\frac{b}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \gamma^{\frac{1}{2}},$$

где  $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{\sigma_T}{2(1+\nu)\epsilon_T}$  — модуль упругости второго рода;

$$\rho_g^{\frac{1}{2}} = (\gamma/bl)^{\frac{1}{2}};$$

$\nu$  — коэффициент Пуассона;

$\epsilon_T$  — деформация, соответствующая пределу текучести  $\sigma_T$ .

При одноосном растяжении имеем:

$$\tau = \frac{\sigma_1}{2}; \quad \gamma = \epsilon_1 - \epsilon_3 = \frac{\sigma_1}{E} - \left(-\nu \frac{\sigma_1}{E}\right) = \frac{3}{2} \epsilon_1;$$

$$\sigma_i = 2\tau = \left[ \left( \frac{\sigma_T}{1+\nu} \right) \left( \frac{3}{2} \frac{b}{l \epsilon_T} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left( \frac{\epsilon_i}{\epsilon_T} \right)^{\frac{1}{2}} = \sigma_T \left( \frac{\epsilon_i}{\epsilon_T} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

Здесь принимаются обычные для деформируемых металлических тел значения величин [9]: вектор Бюргерса  $b = 3 \cdot 10^{-8}$  см;  $\epsilon_T = 2 \cdot 10^{-3}$ ;  $\rho = 10^{10}$  1/см<sup>2</sup>;  $\nu = 1/2$ ;

$$l = \frac{3/2 \epsilon}{\rho_g b} \quad \text{и} \quad \frac{\sigma_T}{1+\nu} \left( \frac{b^2 \rho_g}{\epsilon \epsilon_T} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sigma_T}{1+\nu} \left( \frac{b^2 \rho_g}{\epsilon_T^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{при} \quad \epsilon = \epsilon_T.$$

Окончательно имеем:

$$\frac{\sigma_T}{1+\nu} \frac{b}{\epsilon_T} \rho_g^{\frac{1}{2}} = \sigma_T \frac{3 \cdot 10^{-8}}{2 \left( 1 + \frac{1}{2} \right) \cdot 10^{-3}} 10^5 = \sigma_T.$$

Однако В. С. Смирнов в работе [9] отмечает, что степенной коэффициент, равный 1/2, приемлем при деформировании монокристаллов, где имеется относительно небольшое количество границ раздела. Зависимость же между интенсивностью напряжений  $\sigma_i$  и интенсивностью деформаций  $\epsilon_i$  для поликристаллического тела в действительности сложнее, и равенство (4) приобретает следующий вид:

$$\sigma_i = \sigma_T \left( \frac{\epsilon_i}{\epsilon_T} \right)^n, \quad (5)$$

где  $n = f(\sigma_T, E, E_2, k)$ ;

$k$  — коэффициент, учитывающий особенности физико-химических свойств материала. Пределы изменения коэффициента  $n$  по абсолютной величине — от единицы до нуля. Формула (5) при таких пределах характеризует и идеальную упругость, и идеальную пластичность.

Так как левые части уравнений (3) и (4) равны между собой, то и равны их правые части, т. е.

$$\left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_T}\right)^n = \lambda \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_T}.$$

Если взять от обеих частей этого равенства натуральный логарифм, то получим:

$$\lambda = \exp(n-1) \ln \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_T}.$$

Учитывая, что  $E_1 = E\lambda_1 = E \exp(n-1) \ln \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_T}$ , имеем

$$\sigma_i = E \exp(n-1) \ln \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_T}.$$

Для определения коэффициента  $\lambda_1$  и построения теоретической кривой упрочнения  $\sigma_i - \varepsilon_i$  необходимо установить зависимости коэффициента  $n$  от физико-механических свойств материала на основе опытных кривых упрочнения.

В лабораторных условиях были подвергнуты деформированию на сжатие такие металлы, как медь, алюминий, пластичные и высокопрочные стали 12ХНЗА, 3Х2В8, 40ХМВ, 5ХНМ и др. Напряжение текучести определялось с помощью методики, изложенной в работе [10].

Характеристика механических свойств высокопрочных сталей необходима при изучении предела холодного выдавливания в условиях высокого давления. Исследования показали, что коэффициент  $n$  при изменении  $\varepsilon = \frac{h_0 - h}{h}$  от 0,05 до 0,90 для стали 5 при  $\sigma_{T,0,05} = 140$  МПа изменяется в пределах 0,57—0,40; для стали 12ХНЗА при  $\sigma_{T,0,05} = 450$  МПа — в пределах 0,39—0,28; для стали 3Х2В8 при  $\sigma_{T,0,05} = 640$  МПа —  $n = 0,27 \div 0,24$ ; для стали 40ХМВ при  $\sigma_{T,0,05} = 770$  МПа —  $n = 0,25 \div 0,21$ ; для стали 5ХНМ при  $\sigma_{T,0,05} = 1100$  МПа —  $n = 0,14—0,06$ ; для стали 36ХНТЮ при  $\sigma_{T,0,05} = 1350$  МПа —  $n = 0,1—0,05$ .

Коэффициент  $n$  определяется из формулы (5) путем логарифмирования обеих ее частей:

$$n = \frac{\ln \frac{\sigma_i}{\sigma_T}}{\ln \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_T}} = \frac{\ln \frac{E_1}{E_2}}{\ln \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_T}}.$$

Анализ полученных значений  $n$  для вышеприведенных сталей и других материалов, для которых кривые упрочнения построены и приведены в литературе [11—14], позволяет сделать первые выводы:

1. Степенной коэффициент  $n$  с повышением предела текучести материала повышается от единицы до нуля.

2. Для конкретного материала при росте деформации  $\varepsilon$  коэффициент  $n$  не считается постоянным, а изменяет свою величину в сторону ее уменьшения, при этом в большей степени для материалов с меньшим пределом текучести, чем с высоким  $\sigma_T$ .

Например, для Ст. 5 это понижение составляет  $n_{0,1} - n_{0,9} = 0,57 - 0,40 = 0,17$  единиц, для стали 40ХМВ  $n_{0,1} - n_{0,9} = 0,25 - 0,21 = 0,04$  единиц, т. е. в четыре раза меньше.

Таким образом, для исследованных материалов  $n$  коэффициент описывается криволинейной поверхностью, построенной в координатных осях  $\sigma_T$ ,  $\epsilon_j$  и  $n$  (рис. 2). Построенная поверхность может быть представлена с некоторым приближением математической зависимостью

$$n = \left[ \exp(-0,15\sigma_T^{0,55}) \right] \left[ 1 - \exp\left(-\sigma_T^{-0,25} \ln \frac{\epsilon_j}{\epsilon_T}\right) \right]. \quad (6)$$

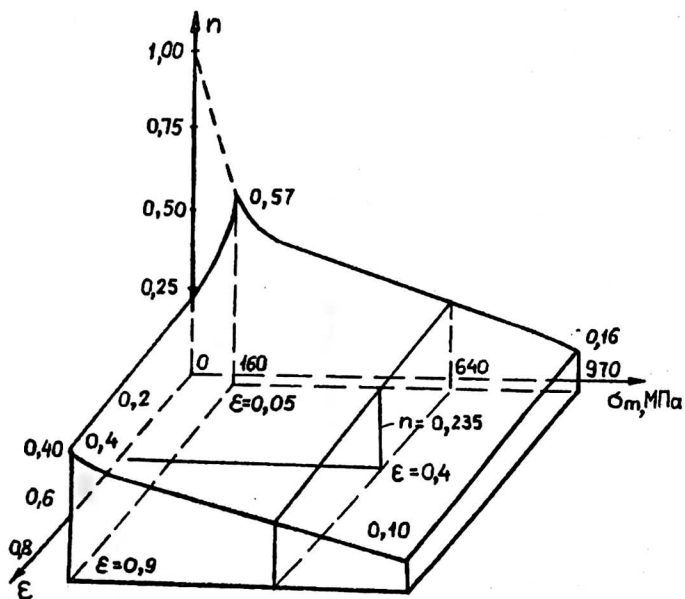


Рис. 2. Объемная эпюра степенного коэффициента  $n$

Первый член правой части уравнения (6) характеризует влияние только предела текучести материала на коэффициент  $n$ , второй член понижает коэффициент  $n$  с ростом степени деформации за счет изменения модуля пластичности идеально пластической среды  $E_2$ .

С помощью теории дислокации получен коэффициент  $n = 1/2$  при деформировании монокристалла. Анализ кривых упрочнения для вышеприведенных материалов показал, что коэффициент  $1/2$  соответствует Ст. 5 с пределом текучести 160 МПа при его сжатии до  $\epsilon = 0,05$  %. Следовательно, в формуле (6) при  $\epsilon = 0,05$  % для материала с  $\sigma_T = 160$  МПа коэффициент  $n$  должен иметь значение, близкое к  $1/2$ . Для других материалов, у которых предел текучести больше или меньше 160 МПа, установлено, что  $n$  понижается с увеличением  $\sigma_T$  и повышается, стремясь к единице, с уменьшением предела текучести материала. Такое изменение  $n$  описывается следующей зависимостью:

$$n = \frac{1}{2} \left( \sigma_T / \sigma_T^0 \right)^{0,55}, \quad (7)$$

где  $\sigma_T^0 = 160$  МПа — предел текучести материала (граничное условие), для которого  $n = 1/2$  при  $\epsilon = 0,05$ .

Логарифмируя левую и правую части формулы (7) и учитывая, что  $1/16 = 0,0625$ , получим:

$$\ln l = (0,0625\sigma_T)^{0,55} \ln 0,5 = \left(0,0625^{0,55} \sigma_T^{0,55}\right)(-0,693)$$

$$\text{или } l = \exp\left(-0,15\sigma_T^{0,55}\right). \quad (8)$$

Однако коэффициент  $l$  с ростом степени деформации не остается постоянным, а повышается в связи с уменьшением модуля пластичности  $E_2$ . Последний для разных металлов изменяется не одинаково. Интенсивность его изменения возрастает с уменьшением величины предела текучести материала. В этой связи и коэффициент  $l$  в пределах изменения степени деформации больше понижается для материалов с меньшим модулем пластичности. Для металлов с высокими прочностными характеристиками изменение  $l$  незначительно и не превышает 10—15 %. Понижение величины коэффициента  $l$ , вызванное изменением  $E_2$ , учитывается поправочным коэффициентом  $K$  (второй член правой части формулы (6)), который определяется следующим выражением:

$$K = 1 - \exp\left(-\frac{\ln E_2}{(\varepsilon E_2)^{0,25}}\right) = 1 - \exp\left(-\sigma_T^{-0,25} \ln \frac{\sigma_T}{\varepsilon}\right).$$

Таким образом, с помощью подобранной математической зависимости коэффициента  $l$  и обоснования величин, входящих в структуру этой зависимости, аналитически строятся кривые упрочнения по формуле:

$$\sigma_s = \exp\left\{\ln \sigma_T + \left[\exp\left(-0,15\sigma_T^{0,55}\right)\right] \left[1 - \exp\left(-\sigma_T^{-0,25} \ln \frac{\sigma_T}{\varepsilon}\right)\right] \ln \frac{\varepsilon}{\varepsilon_T}\right\}.$$

Однако при сжатии зафиксировать величину  $\sigma_T$  при  $\varepsilon = 0,002$  практически не представляется возможным из-за локального сжатия частиц металла на контактной поверхности. В этой связи начальный отсчет деформации, при которой берется условный предел текучести материала  $\sigma_T$ , следует принимать  $\varepsilon_T \approx 0,05$ . Следовательно, в теоретическую формулу (8) нужно подставить значения и напряжение текучести, взятые из кривой упрочнения при  $\varepsilon = 0,05$ .

## Л и т е р а т у р а

1. Безухов Н. И. Теория упругости, пластичности и ползучести. — М.: Высш. шк., 1961. — 536 с.
2. Соколовский В. В. Теория пластичности. — М.: Высш. шк., 1969. — 608 с.
3. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. — М.: Наука, 1969. — 420 с.
4. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел / Пер. с англ. — М.: Изд-во иностр. лит., 1954. — 647 с.
5. Прагер В., Ходис Ф. Г. Теория идеально пластичных тел / Пер. с англ. — М.: Изд-во иностр. лит., 1959. — 398 с.
6. Хилл Р. Математическая теория пластичности. — М.: ГИТТЛ, 1956. — 407 с.
7. Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. — М.: Изд-во АН СССР, 1963. — 271 с.
8. Сторожев М. В., Попов Е. А. Теория обработки металлов давлением. — М.: Машгиз, 1977. — 423 с.
9. Смирнов В. С. Теория обработки металлов давлением. — М.: Metallurgia, 1973. — 496 с.
10. А. с. 504130 СССР. Способ определения приращения напряжения текучести материала при сжатии / А. М. Греков.; Оpubл. в Б. И., 1976, № 7.
11. Губкин С. И. Теория обработки металлов давлением. — М.: Metallurgizdat, 1947. — 532 с.

12. З и б е л ь Э. Обработка металлов в пластическом состоянии. — М. — Л.: ОНТИ, 1934. — 194 с.  
13. Ш о ф м а н Л. А. Основы расчета процесса штамповки и прессования. — М.: Машгиз, 1961. — 341 с.  
14. У н к с о в Е. П. Инженерные методы расчета усилий при обработке металлов давлением. — М.: Машгиз, 1955. — 230 с.

## RESEARCH OF FUNCTIONAL DEPENDENCE OF STRESS INTENSITY FROM DEFORMATION INTENSITY

*A. M. Grekov, M. B. Beresnev*

Vjatka State Technical University, Kirov, Russia

*The dependence of stress intensity of deformation intensity is considered. For the first time a cutting modulus of plasticity, which together with modulus of elasticity describes the characteristics of elasticity-plasticity of material is introduced in the theory of calculation. The unique analytical formula to build a strengthening curve is proposed.*