

УДК 533.9.03

Пространственное распределение электрического потенциала в стационарном открытом разряде

А. И. Головин

Путем уточнения ранее предложенной математической модели стационарного открытого разряда проведено исследование пространственного распределения потенциала электрического поля. Показано, что в большей части катодного слоя потенциал описывается степенной зависимостью с показателем степени $5/3$, что отличается от квадратичной зависимости, использованной ранее в различных работах, включая модель открытого разряда. Однако численная погрешность квадратичной зависимости не превышает 20 %.

PACS: 52.59Vi

Ключевые слова: пучок электронов, тлеющий разряд, убегание электронов.

Введение

Перспективным направлением развития электронно-пучковых и плазменных технологий является получение пучков электронов в газовой среде за счет эффекта убегания из высоковольтного тлеющего разряда с полым или сетчатым анодом (открытый разряд). В обзорной работе [1] перечислены некоторые области применения генераторов электронных пучков на основе открытого разряда.

Математическая модель стационарного открытого разряда в одномерной постановке предложена в [2]. Модель построена в предположении, что электрическое поле в разряде превышает критическое и все эмитируемые с катода электроны переходят в режим непрерывного ускорения. Эмиссия происходит под воздействием бомбардировки катода ионами и быстрыми нейтральными молекулами, поток которых образуется в результате резонансной перезарядки. Для описания распределения концентрации ионов использовалось уравнение неразрывности, образование ионов было представлено отношением определяемых формулой Бете потерь энергии электронов к энергетической цене образования иона. Распределение

электрического поля описывалось уравнением Пуассона.

Для решения системы уравнений и получения выражений для размеров зоны катодного падения потенциала (КПП) и вольт-амперной характеристики было сделано предположение, что концентрация электронов одинакова во всем катодном слое. Это приводит к линейной зависимости напряженности электрического поля от координаты, как и в часто применяемой теории Энгеля и Штеенбека [3]. В экспериментах по измерению напряженности поля, выполненных в [4] для импульсного открытого разряда, на небольших расстояниях от катода получено линейное распределение поля. Необходимо отметить, что выводы [4] о механизме эмиссии электронов с катода подвергнуты серьезной критике в [5], однако это никоим образом не влияет на результаты измерений. В работе [6] линейное распределение поля использовано в расчетах ускорения электронов методом Монте-Карло и получено качественное совпадение с экспериментально измеренными интенсивностями излучения ионов гелия в зависимости от координаты. Аналогичное моделирование в [7] сопровождалось самосогласованным решением уравнений для электрического поля. За исключением случая высокой плотности тока, приводимые авторами зависимости для напряженности электрического поля близки к линейным.

Тем не менее, линейная зависимость напряженности поля (соответственно, квадратичная зависимость потенциала) нуждается в дополнительном обосновании, тем более, что в [2] было сделано дополнительное упрощение, а именно, предпола-

Головин Андрей Иванович, начальник отдела.
ГНЦ ФГУП «Центр Келдыша».
Россия, 125438, Москва, Онежская ул., 8.
Тел. (495) 456-64-13
E-mail: aigolovin@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 22 апреля 2016 г.

гальсь, что скорость дрейфа ионов одинакова везде в области КПП и определяется средней напряженностью поля. Как будет показано далее, это предположение может значительно повлиять на распределение электрического потенциала, хотя практически не влияет на полученную в [2] вольт-амперную характеристику (легко убедиться, что влияние сводится к коэффициенту порядка единицы в сочетании с величинами, которые должны быть определены эмпирически).

Целью данной работы является теоретическое исследование пространственного распределения потенциала электрического поля в открытом разряде в рамках уточненной математической модели для анализа погрешности, вносимой сделанными ранее допущениями.

Уравнение для потенциала

Ранее в работе [8] экспериментально и в работе [9] теоретически было показано, что влияние параметров анода на ток стационарного открытого разряда незначительно. Экспериментальные исследования импульсного разряда в [10] также показали, что ток разряда меняется незначительно в широком диапазоне расстояний между катодом и анодом. В связи с этим, поле далее рассматривается без учета анода. В таком приближении в [2] для безразмерного потенциала получено выражение:

$$\psi(\chi) = 2\chi - \chi^2, \quad (1)$$

где $\chi = x/d$ — безразмерное расстояние от катода, x — координата, d — размер катодного слоя. Для удобства выкладок знак потенциала в [2] был изменен по сравнению с общепринятым, поэтому при приложенном к разряду напряжении U обычный потенциал электрического поля записывается как $\phi(x) = \phi_0 + U\psi(x/d)$, а напряженность:

$$E = \frac{d\phi}{dx} = \frac{U}{d} \frac{d\psi}{d\chi}. \quad (2)$$

Уравнение Пуассона теперь имеет вид:

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{e}{\epsilon_0} N_i. \quad (3)$$

Уравнение неразрывности для концентрации ионов N_i :

$$eS \frac{d}{dx} (v_i N_i) = -\frac{\kappa}{I_i} J_e. \quad (4)$$

Здесь S — площадь катода, v_i — скорость дрейфа ионов, κ — потери энергии электронов на единицу

пути, I_i — энергетическая цена образования иона, J_e — ток эмитируемых катодом электронов (вторичные электроны не учитываются). Скорость дрейфа ионов к катоду можно представить следующим образом:

$$v_i = \beta_1 \left(\frac{U}{d}\right)^{\beta_2} \left(\frac{d\psi}{d\chi}\right)^{\beta_3}. \quad (5)$$

В исследованном в [2] случае аномального дрейфа ионов в собственном газе со скоростью, определяемой средней напряженностью поля, можно ввести выражения:

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{2eU}{\pi MN\sigma_r d}}, \quad \beta_2 = \frac{1}{2}, \quad \beta_3 = 0. \quad (6)$$

Здесь M — масса иона, N — концентрация молекул газа, σ_r — сечение перезарядки. С учетом пространственного распределения напряженности поля, а, следовательно, и скорости аномального дрейфа, имеем значения:

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{2e}{\pi MN\sigma_r}}, \quad \beta_2 = \frac{1}{2}, \quad \beta_3 = \frac{1}{2}. \quad (7)$$

В случае слабых полей (нормальный дрейф) скорость ионов определяется их подвижностью μ :

$$\beta_1 = \mu, \quad \beta_2 = 1, \quad \beta_3 = 1. \quad (8)$$

Следует отметить, что соотношения (6)—(8) применимы к дрейфу ионов в собственном газе, тогда как реальная ситуация в разряде может быть намного сложнее: например, в гелии образуются ионы He_2^+ , подвижность которых приблизительно вдвое выше, чем подвижность ионов He^+ [3]. При этом соотношение количества различных ионов определяется параметрами разряда и не может быть представлено в обобщенном виде. В смесях газов, особенно, молекулярных, определить среднюю скорость ионов еще сложнее. Поэтому указанные соотношения следует рассматривать как качественные, а в количественных оценках использовать эмпирические данные.

Торможение электронов к описывалось в [2] формулой Бете:

$$\kappa = \frac{2\pi e^4 Z N_a}{(4\pi\epsilon_0)^2 K} \ln \frac{2K}{I}, \quad (9)$$

где Z — заряд ядра атомов газа, N_a — концентрация атомов газа (для многоатомных молекул, очевидно, отличается от концентрации молекул N), K — кинетическая энергия электронов, I — сред-

ний ионизационный потенциал; при $K < I/2$ торможение отсутствует и $\kappa = 0$. В предположении, что потери энергии электрона пренебрежимо малы, значение $K(x) = eU\psi(x/d)$.

Вблизи максимума формула Бете имеет значительную погрешность. По данным [11], в гелии вычисленное по этой формуле значение максимума торможения приблизительно в два раза завышено, в неоне совпадает с уточненными оценками, а в ксеноне — в 4 раза занижено, причем положение максимума соответствует на порядок более высокой энергии, чем при вычислениях по уточненной формуле. При энергии электронов свыше ~300 эВ для гелия и ~2 кэВ для ксенона формула Бете показывает отличное совпадение с уточненной формулой. Основным достоинством формулы Бете является то, что вещество, через которое движутся электроны, помимо заряда ядра характеризуется лишь одним параметром с размерностью энергии — средним ионизационным потенциалом I . Это позволяет ввести безразмерное напряжение $u = 2eU/I$ и работать с универсальными, т. е. не зависящими от сорта газа, безразмерными функциями, как, например, в [9]. Поэтому для качественного исследования характеристик разряда формула Бете намного предпочтительнее уточненной формулы из [11].

Подставляя в левую часть (4) уравнения (3) и (2) с учетом соотношения (5), а в правую — формулу (9), можно получить уравнение для потенциала. После несложных преобразований и перехода к безразмерным величинам имеем выражение:

$$\frac{d^2}{d\chi^2} \left(\frac{d\psi}{d\chi} \right)^{1+\beta_3} = \alpha_e \frac{\ln(u\psi)}{\psi} \quad (10)$$

где α_e — независимая от координаты безразмерная величина, пропорциональная току электронов:

$$\alpha_e = \frac{1+\beta_3}{\beta_1} \frac{e^3 Z N_a U}{2\pi \epsilon_0^3 I S} \left(\frac{d}{U} \right)^{3+\beta_2} J_e. \quad (11)$$

Обозначим χ_1 безразмерное расстояние от катода, на котором выполнено $\psi(\chi_1) = 1/u$. Тогда при $\chi < \chi_1$ торможение отсутствует и $\alpha_e = 0$.

Граничным условием при $\chi = 0$ является $\psi = 0$. При $\chi = 1$ безразмерный потенциал $\psi = 1$, напряженность поля $d\psi/d\chi = 0$, поток ионов $d/d\chi (d\psi/d\chi)^{1+\beta_3} = 0$. Решения для $\chi < \chi_1$ и $\chi > \chi_1$ должны сшиваться в точке χ_1 так, чтобы совпадали напряженность и поток ионов.

Решение вблизи катода

В области $\chi < \chi_1$ правая часть (10) равна нулю, и решение может быть найдено простым интегрированием. С учетом граничного условия при $\chi = 0$ получаем соотношение:

$$\psi = \frac{1}{\beta_4 \alpha_i} \left[\alpha_n^{\beta_4} - (\alpha_n - \alpha_i \chi)^{\beta_4} \right]. \quad (12)$$

Здесь для сокращения записи введено обозначение $\beta_4 = (2 + \beta_3) / (1 + \beta_3)$. Постоянные интегрирования выбраны таким образом, что величина α_i пропорциональна току ионов на катод $J_i = eSv_i N_i$ при $x = 0$, а α_n — потоку нейтральных частиц J_n . Выражение для α_i может быть найдено из формул (3) и (5), а для α_n — из соотношений работы [2]:

$$\alpha_i = \frac{1+\beta_3}{\beta_1} \frac{U}{\epsilon_0 S} \left(\frac{d}{U} \right)^{2+\beta_2} J_i$$

$$\alpha_n^{2+\beta_3} = \frac{1+\beta_3}{\beta_1} \frac{I_n}{\epsilon_0 S} \left(\frac{d}{U} \right)^{2+\beta_2} J_n.$$

Здесь I_n — «энергетическая цена» образования быстрой нейтральной частицы. Сравнивая эти формулы с соотношениями работы [2], можно предположить, что α_i и α_n слабо (логарифмически) зависят от напряжения.

Следует отметить, что при $\alpha_e = 0$ решением (10), удовлетворяющим всем граничным условиям во всем диапазоне χ , является (12) со значениями $\alpha_i = \alpha_n = \beta_4^{1+\beta_3}$, т. е. справедливо выражение:

$$\psi = 1 - (1 - \chi)^{\beta_4}. \quad (13)$$

В использовавшемся в [2] приближении постоянной скорости ионов выполнено (6), следовательно, $\beta_4 = 2$ и зависимость потенциала от координаты является квадратичной, причем при $\alpha_e = 0$ распределение потенциала описывается формулой (1).

В более точном приближении (7) имеем $\beta_4 = 5/3$ и, соответственно, уточненное выражение:

$$\psi = \frac{3}{5\alpha_i} \left[\alpha_n^{5/3} - (\alpha_n - \alpha_i \chi)^{5/3} \right]. \quad (14)$$

Оценка потенциала у границы катодного слоя

При $\chi \sim 1$ в правой части (10) можно положить $\psi = 1$. С учетом граничных условий нетрудно найти соотношение:

$$\psi(\chi) = 1 - \frac{1+\beta_3}{3+\beta_3} \left(\frac{\alpha_e \ln u}{2} \right)^{\frac{1}{1+\beta_3}} (1-\chi)^{\frac{3+\beta_3}{1+\beta_3}}.$$

В приближении работы [2], это дает кубическую зависимость. В приближении (7), имеем соотношение:

$$\psi(\chi) = 1 - \frac{3}{7} \left(\frac{\alpha_e \ln u}{2} \right)^{\frac{2}{3}} (1-\chi)^{\frac{7}{3}}. \quad (15)$$

Аналогично, в приближении (8) можно записать выражение:

$$\psi(\chi) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_e \ln u}{2} \right)^{\frac{1}{2}} (1-\chi)^2. \quad (16)$$

Последнее выражение соответствует случаю нормального дрейфа ионов, т. е. малой напряженности поля. Именно такой случай реализуется у границы катодного слоя, где напряженность поля падает до нуля. Можно предположить, что по мере приближения к границе катодного слоя сначала реализуется зависимость (15), а затем уже (16). Подобный переход возможен, поскольку значение α_e в этих соотношениях различается, а именно, для (15) он определяется формулой (11) с коэффициентами (7), а для (16) — с коэффициентами (8).

Приближенное решение

Предположим, что решение уравнения (10) можно представить как сумму приближения (13) и малой поправки $\alpha_e \Delta\psi(\chi)$:

$$\psi(\chi) = 1 - (1-\chi)^{\beta_4} + \frac{\alpha_e}{1+\beta_3} \Delta\psi(\chi). \quad (17)$$

Тогда, линеаризуя (10), можно получить

$$\frac{d^3 \Delta\psi}{d\chi^3} = \frac{\ln(u\Psi)}{\Psi}.$$

Из этого уравнения трехкратным интегрированием можно найти $\Delta\psi$:

$$\begin{aligned} \Delta\psi''(\chi) &= -\int_{\chi}^1 \frac{\ln\left(u\left(1-(1-X)^{\beta_4}\right)\right)}{1-(1-X)^{\beta_4}} dX, \\ \Delta\psi'(\chi) &= -\int_{\chi}^1 \Delta\psi''(X) dX, \\ \Delta\psi(\chi) &= -\int_{\chi}^1 \Delta\psi'(X) dX. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что построенное таким образом решение удовлетворяет граничным условиям при $\chi = 1$. При сшивании (17) и (12) могут быть определены безразмерные токи α_i и α_n , а также величина χ_1 . Совместно с α_e они описывают

вольт-амперную характеристику разряда, однако для перехода к размерным величинам необходимо найти размер катодного слоя d , что может быть сделано из соотношения $J_e = \gamma_i J_i + e\gamma_n J_n$, связывающего токи через коэффициенты эмиссии под воздействием бомбардировки катода ионами и нейтралами, т. е. соответственно γ_i и γ_n . Однако исследование вольт-амперных характеристик выходит за рамки данной работы.

Оценим порядок величин в (17) вблизи χ_1 в приближении (7). Левая часть (17) равна $1/u$. Как следует из (12), такой же порядок имеет слагаемое $1 - (1-\chi)^{5/3}$ в правой части, однако для оценки α_e будем считать, что $\alpha_e \sim 3/(2u\Delta\psi)$. В гелии одна единица u соответствует приблизительно 21 В, поэтому киловольтному диапазону напряжений соответствуют u от 50 до 500.

На представленном рисунке показаны зависимости абсолютной величины $\Delta\psi$ от координаты, вычисленные для трех значений u из указанного диапазона.

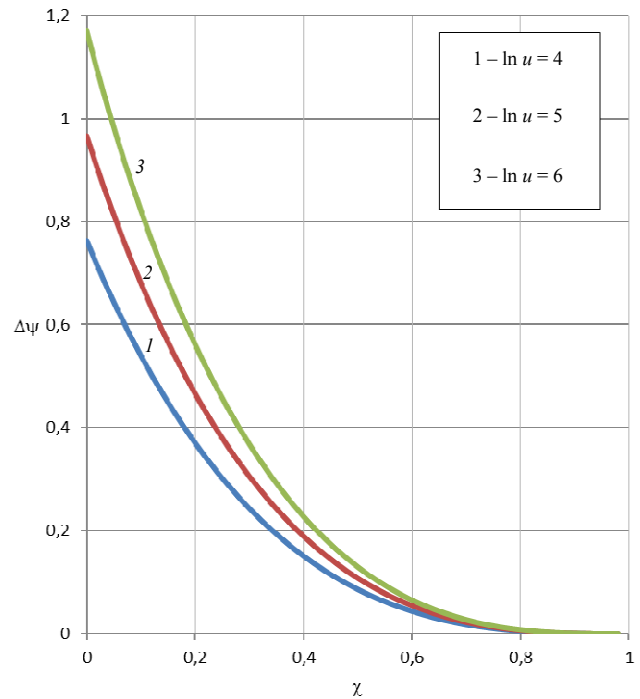


Рис. Зависимость $|\Delta\psi|$ от координаты при различном напряжении.

Для оценки $\Delta\psi$ в точке χ_1 можно положить $\chi_1 = 0$ и $\ln u \approx 4$, тогда $\Delta\psi \approx -0,76$. Следовательно, α_e не может превышать величины порядка 0,04. С увеличением напряжения верхняя оценка α_e уменьшается. Так как с увеличением χ абсолютная величина $\Delta\psi$ уменьшается, а $1 - (1-\chi)^{5/3}$ увеличивается, то при некотором значении координаты

начинает выполняться условие $1 - (1 - \chi)^{5/3} \gg \gg 2 / 3\alpha_e \Delta\psi(\chi)$. При $u \approx 50$ левая часть становится на порядок больше правой при $\chi \approx 0,08$, с увеличением напряжения эта величина убывает. Поэтому, за исключением небольшой области вблизи катода, можно использовать приближенное решение (13).

В целом полученный результат справедлив и для приближений постоянной скорости ионов (6) и нормального дрейфа (8).

Заключение

Поскольку в открытом разряде напряженность электрического поля достаточно велика для перехода испускаемых катодом электронов в режим непрерывного ускорения, можно предположить, что дрейф ионов к катоду в основной части катодного слоя являлся аномальным. Тогда в непосредственной близости от катода, т. е. там, где электроны еще не набрали достаточную для ионизации энергию, пространственная зависимость электрического потенциала описывается уравнением (14), причем коэффициенты в уравнении зависят от потока ионов и нейтралов на катод. По мере удаления от катода, зависимость потенциала от координаты переходит в (13) с показателем степени $5/3$, размер переходной области оценен сверху в 8 % размера катодного слоя. На большом удалении от катода напряженность электрического поля недостаточна для аномально-

го дрейфа ионов и распределение потенциала описывается уравнением (16). В переходной области может реализовываться зависимость (15) в случае сильного поля или (13) с показателем степени $3/2$ в случае слабых полей.

Полученные результаты значительно отличаются от квадратичной зависимости (1), использованной ранее в нескольких работах различных авторов. В то же время несложно убедиться, что относительная погрешность приближения (1) не превышает 20 % в непосредственной близости от катода и убывает по мере удаления от него.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хомич В. Ю., Ямщиков В. А. // Прикладная физика. 2010. № 6. С. 84.
2. Головин А. И., Егорова Е. К., Шлойдо А. И. // ЖТФ. 2014. Т. 84. № 10. С. 27.
3. Райзер Ю. П. Физика газового разряда. — Долгопрудный: Издательский дом «Интеллект», 2009.
4. Колбычев Г. В., Пташник И. В. // Оптика атмосферы и океана. 1999. Т. 12. № 11. С. 1070.
5. Сорокин А. Р. // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. № 24. С. 89.
6. Акишев Ю. С., Дятко Н. А., Напартович А. П., Пепелятько П. И. // ЖТФ. 1989. Т. 89. № 8. С. 14.
7. Arlantsev S. V., Borovich B. L., Buchanov V. V., Molydykh E. I., Yurchenko N. I. // Journal of Russian Laser Research. 1995. Vol. 16. No. 2. P. 99.
8. Головин А. И., Голубев М. М., Егорова Е. К., Туркин А. В., Шлойдо А. И. // ЖТФ. 2014. Т. 84. № 5. С. 41.
9. Головин А. И. // Прикладная физика. 2015. № 3. С. 43.
10. Сорокин А. Р. // ЖТФ. 2006. Т. 76. № 5, С. 47.
11. LaVerne J. A., Mozumder A. // J. Phys. Chem. 1985. Vol. 89. No. 20. P. 4219.
12. Никандров Д. С. // ЖТФ. 2008. Т. 78. № 12. С. 35.

Energy distribution of run-away electron beam generated by stationary open discharge

A. I. Golovin

M.V. Keldysh Research Centre, a State Scientific Centre of the Russian Federation
8 Onezhskaya str., Moscow, 125438, Russia
E-mail: aigolovin@yandex.ru

Received April 22, 2016

Investigations of spacial distribution of electric field potential have been done by clarification of suggested earlier mathematical model of stationary open discharge. It was shown that in main part of cathode layer electric potential is described by power dependence with the exponent $5/3$ that differ from square dependence used early in different publications including model of the open discharge. However, numerical error of the square dependence is not greater than 20 per cent.

PACS: 52.59Bi

Keywords: electron beam, glow discharge, run-away electrons.

REFERENCES

1. V. Yu. Khomich and V. A. Yamshchikov, *Prikladnaya Fizika*, No. 6, 84 (2010).
2. A. I. Golovin, E. K. Egorova, and A. I. Shlodo, *Tech Phys.* **84** (10), 27 (2014).
3. U. P. Rajzer, *Physics of Gas Discharges* (Izdatelskij dom "Intellekt", Dolgoprudnyj, 2009) [in Russian].
4. G. V. Kolbychev and I. V. Ptashnik, *Atmospheric and Oceanic Optics*, **12** (11), 1070 (1999).
5. A. R. Sorokin, *Tech. Phys. Lett.*, **26** (24), 89 (2000).
6. U. S. Akishev, N. A. Dyatko, A.P. Napartovich, and I.P. Perepyat'ko, *Tech. Phys.*, **89** (8), 14 (1989).
7. S. V. Arlantsev, B. L. Borovich, V. V. Buchanov, E. I. Molodykh, and N. I. Yurchenko, *Journal of Russian Laser Research* **16** (2), 99 (1995).
8. A. I. Golovin, M. M. Golubev, E. K. Egorova, et al., *Tech. Phys.* **84** (5), 41 (2014).
9. A. I. Golovin, *Prikladnaya Fizika*, No. 3, 43 (2015).
10. A. R. Sorokin, *Tech. Phys.* **76** (5), 47 (2006).
11. J. A. LaVerne and A. Mozumder, *J. Phys. Chem.*, **89** (20), 4219 (1985).
12. D. S. Nikandrov, *Tech. Phys.* **78** (12), 35 (2008).