ОБЩАЯ ФИЗИКА

УДК 517.95: 53.091: 681.7.069.24

# Интенсивность, вектор излучения и волновой вектор моды ускоренного резонатора

*Б. В. Мелкумян*

***Обсуждается вклад каждого параметра в комплексное изменение фазы и интенсивность излучения ускоренного резонатора с неподвижным содержимым. Получено условие синхронизма для интерферирующих рукавов излучения неравномерно движущегося источника. Получено, что при интерференции двух полей с комплексными фазами интерференционный член может превышать интенсивность исходного луча в восемь раз. Представлена связь между введённым в наших работах вектором излучения и волновым вектором. Показано, что вектор излучения, определяющий собственные значения пространственной задачи, кратен волновому вектору при наличии граничных условий вдоль лишь одной координаты, когда боковые граничные условия не определены (например, в двухзеркальном резонаторе с плоским волновым фронтом).***

PACS: 07.60.Ly, 42.87.Bg

*Ключевые слова*: вектор излучения, волновой вектор, интенсивность, резонатор, фаза.

## Введение

Мы продолжаем исследования новых оптических явлений, определяющих динамическое изменение фазы (или моды) лазерного излучения [1—13]. В настоящей работе рассмотрена интенсивность излучения ускоренного лазерного резонатора при мнимых собственных значениях частот и связь вектора излучения с волновым вектором.

## Постановка задачи

Как и ранее, мы предположили, что неравномерное движение источника света приводит к появлению у поля излучения в собственной системе отсчёта комплексной фазы, определяемой ускорением источника и параметрами фазовой структуры источника, так как наблюдалось изменение интенсивности излучения и появление дополнительных недифракционных пучков при движении резонатора излучения. Предположение подтвердилось экспериментально и теоретически [1—13].

**Мелкумян Баграт Владимирович**, докторант[1], професор[2].
[1] Институт общей физики им. А. М. Прохорова РАН.
Россия, 119991, Москва, ул. Вавилова, 38.
[2] Московский университет им. С. Ю. Витте.
Россия, 115432, Москва, 2[й] Кожуховский проезд, 12.
E-mail: bgo@bk.ru

*Статья поступила в редакцию 10 июля 2016 г.*



## Уравнение состояния излучения в ускоренном резонаторе

Для жёсткого неравномерно движущегося резонатора вектор $\vec{S}(t)$ перемещения резонатора как целого и его производные не зависят от точки пространства. Здесь и далее одна (или две) точки над вектором перемещения, означают полную первую (или вторую) производную по времени. В остальных случаях для фазы $\Phi(t;\ \vec{r}\ )$ и частоты $\omega(t;\ \vec{r}\ )$ точки над скалярными функциями обозначают частные производные по времени.

В [8—10] получено неоднородное уравнение фазы в равноускоренном резонаторе:

$$\ddot{\Phi}(t;\vec{r}) - \left\{\frac{3}{2}a^2t^2\right\}\Delta_0\Phi(t;\vec{r}) = \\ = \dot{\omega} - (\vec{a}\cdot\vec{\nabla}_0)\omega t - (\vec{a}\cdot\vec{\nabla}_0)\Phi(0;\vec{r}). \quad (1)$$

В (1) использованы величины: $\Phi(t;\ \vec{r}\ )$ — комплексная фаза излучения; $\omega(t;\ \vec{r}\ )$ — комплексная частота излучения в собственной системе отсчёта резонатора; $(a)$ — модуль постоянного ускорения; $\Phi(0;\ \vec{r}\ )$ — распределение фазы в начальный ($t = 0$) момент времени. Решение уравнения (1) искали, как сумму общего решения $\Phi^0(t;\ \vec{r}\ )$ однородного уравнения

$$\ddot{\Phi}^0(t;\vec{r}) - \left\{\frac{3}{2}a^2t^2\right\}\Delta_0\Phi^0(t;\vec{r}) = 0 \qquad (2)$$

и частного решения $\tilde{\Phi}(t;\vec{r})$ уравнения (1) для фазы излучения в ускоренном резонаторе.

Уравнение (2) допускает разделение переменных. Его решение ищем в виде:

$$\Phi^0(t;\vec{r}) = T(t)\cdot V(\vec{r}). \qquad (3)$$

Подставив (3) в (2), получим после разделения переменных соотношение:

$$\frac{2}{3}a^{-2}t^{-2}\cdot\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \frac{\Delta_0 V(\vec{r})}{V(\vec{r})} = -\frac{1}{\Lambda^2}; \qquad (4)$$

где введена разделительная постоянная ($\Lambda$ = const). Из (4) получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения от ($t$) и ($\vec{r}$ ) для функций $T(t)$ и·$V(\vec{r}\ )$ соответственно:

$$\ddot{T}(t) + \frac{3}{2}\frac{a^2t^2}{\Lambda^2}\cdot T(t) = 0; \qquad (5)$$

$$\Delta_0 V(\vec{r}) + \frac{1}{\Lambda^2}V(\vec{r}) = 0. \qquad (6)$$

Здесь (6) — уравнение Гельмгольца, а (5) — уравнение для функций Бесселя с дробным индексом, как в [14]. Конечное в нуле решение для (5) имеет вид:

$$T(t) = C_t\cdot\sqrt{t}\cdot J_{1/4}\left(\pm\sqrt{\left(\frac{3}{2}\frac{a^2}{\Lambda^2}\right)}\cdot\frac{t^2}{2}\right). \qquad (7)$$

В формуле (7), с учётом размерности, независимую от времени константу $C_t$ примем равной значению:

$$C_t = \pm\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{1/2}\cdot\frac{|\vec{a}|}{2\cdot\Lambda}\right)^{1/4} = \pm\sqrt{\gamma}. \qquad (8)$$

С учётом (8), решение уравнения (5) для постоянного ускорения примет вид:

$$T(t) = \pm\sqrt{\gamma t}\cdot J_{1/4}(\pm\gamma^2t^2). \qquad (9)$$

При решении уравнения для пространственной части введённую ранее константу $\Lambda$ определим через разделительные постоянные величины уравнений (4):

$$\frac{1}{\Lambda^2} = \frac{1}{\Lambda_x^2} + \frac{1}{\Lambda_y^2} + \frac{1}{\Lambda_z^2} = \text{const}. \qquad (10)$$

«Вектор излучения», введённый в [5—8], имеет квадрат модуля, равный (10). Он перпендикулярен линиям генерации излучения [10] ускоренного резонатора и равен выражению:

$$\vec{\Xi} = \left\{\frac{1}{\Lambda_x}; \frac{1}{\Lambda_y}; \frac{1}{\Lambda_z}\right\}. \qquad (11)$$

Можно показать, что каждое движение с постоянным ускорением ($\vec{a}$) определяет соответствующий вектор излучения ($\vec{\Xi}$). Решения уравнения (1) для фазы получены в [13]:

$$\begin{aligned}\Phi_{1;2}(t;\vec{r}) &= \omega_0 t\left\{1 + \left(\frac{v_0 t}{2}\right)^2\cdot\left[\sum_{m=0}^{\infty} j_{0;m}\left(\frac{v_0^2t^2}{2}\right)\cdot\left(\frac{m!}{(2m+1)!}\right)^2\right]\cdot\sin(\vec{\Xi}\cdot\vec{r})\right\} - (\vec{S}(t)\cdot\vec{\nabla}_0)\cdot\tilde{\Phi}(0)\mp\\ &\mp i\left\{\omega_0 t\left[\sum_{m=0}^{\infty} j_{0;m}\left(\frac{v_0^2t^2}{2}\right)\cdot\left(\frac{m!}{(2m)!}\right)^2\right] + T(t) + \frac{2}{3}\cdot(\vec{S}(t))^2(\vec{\Xi})^2\right\}\cdot\sin(\vec{\Xi}\cdot\vec{r}).\end{aligned} \qquad (12)$$

В формулах (12) функция $T(t)$ — это временная часть решения (9) для однородного уравнения (2). Индексы в величинах $\Phi_{1;2}(t;\vec{r})$ соответствуют двум разрешённым направлениям излучения для каждой моды линейного резонатора, а $\vec{\Xi}$ — это вектор излучения, который определяется собственными значениями уравнения (6).

Выразив функцию Бесселя с нулевым индексом в виде ряда:

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k!\cdot\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} j_{0;k}(z); \qquad (13)$$

увидим, что величина $j_{0;m}$ в (12) равна члену ряда в правой части (13) при $\left(z = \frac{v_0^2t^2}{2}\right)$.

Экспериментально обнаруженные и теоретически обоснованные явления динамического изменения моды света имеют трёхмерный характер и позволяют измерять линейное ускорение объекта относительно инерциальной системы отсчёта [11, 12].

## Интенсивность при интерференции излучения с комплексной фазой

Формулы (12) определяют фазу для вектора напряжённости электромагнитного поля. Полученные решения могут быть записаны коротко, в виде комплексных чисел:

$$\Phi_{1;2} = \Phi_{0(1;2)}(t;\vec{r}) + i\cdot\Theta_{1;2}(t;\vec{r}). \tag{14}$$

С учётом (14), вектор напряжённости поля [15] содержит зависимость от ускорения в виде вещественного множителя $(e^{-\Theta})$:

$$\vec{\mathbf{E}}_{1;2} = \vec{\mathbf{E}}_{0(1;2)}\cdot e^{i\Phi_{0(1;2)}(t;\vec{r})}\cdot e^{-\Theta_{1;2}(t;\vec{r})}. \tag{15}$$

Согласно (12), зависимость от ускорения есть и в действительной части фазы. Она содержится в величинах $v_0$ и $\vec{S}(t)$. Но можно показать, что интенсивность излучения зависит от ускорения только через величину $\Theta(t;\vec{r})$.

Интенсивность излучения $I(t;\vec{r})$ есть усреднённая за время измерения плотность мощности излучения [16] в данной точке и в данный момент времени. Она равна величине:

$$I = \langle \vec{\mathbf{E}}\cdot\vec{\mathbf{E}}^{*}\rangle = \langle(\vec{\mathbf{E}}_0)^2\rangle\cdot\langle e^{i\Phi_0}\cdot e^{-i\Phi_0}\cdot e^{-\Theta}\cdot e^{-\Theta}\rangle = \\ = I_0\cdot\langle e^{-2\Theta}\rangle, \tag{16}$$

где звёздочка обозначает комплексно сопряжённую величину, а амплитуда интенсивности равна значению:

$$I_0 = \langle(\vec{\mathbf{E}}_0)^2\rangle. \tag{17}$$

Для поля влияние ускорения системы на интенсивность этого поля сводится к вещественному множителю $\langle e^{-2\Theta(t;\vec{r})}\rangle$, как справа в (16). При достаточно чувствительном фотодетекторе (ток 3—20 нА; 0,1 мВ на выходе фотодиода) он надёжно измеряется [11, 12].

Как и с вещественной фазой, для применения в измерительных приборах «двухлучевая интерференция» предпочтительнее. Для двух векторов $\vec{\mathbf{E}}_1$ и $\vec{\mathbf{E}}_2$ в точке $(t;\vec{r})$ ускоренного резонатора, согласно принципу суперпозиции [16], суммарное поле равно

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2 = \vec{\mathbf{E}}_{01}\cdot e^{i\Phi_{01}(t;\vec{r})}\cdot e^{-\Theta_1(t;\vec{r})} + \\ +\vec{\mathbf{E}}_{02}\cdot e^{i\Phi_{02}(t;\vec{r})}\cdot e^{-\Theta_2(t;\vec{r})}. \tag{18}$$

Интенсивность суммарного комплексного поля (18), с учётом (16), равна

$$I = \langle(\vec{\mathbf{E}}_{01}e^{i\Phi_{01}}e^{-\Theta_1} + \vec{\mathbf{E}}_{02}e^{i\Phi_{02}}e^{-\Theta_2})\times \\ \times(\vec{\mathbf{E}}_{01}e^{-i\Phi_{01}}e^{-\Theta_1} + \vec{\mathbf{E}}_{02}e^{-i\Phi_{02}}e^{-\Theta_2})\rangle, \tag{19}$$

или примет вид

$$I = I_{01}\cdot\langle e^{-2\Theta_1}\rangle + I_{02}\cdot\langle e^{-2\Theta_2}\rangle + \\ +2\cdot\sqrt{I_{01}\cdot I_{02}}\cdot\langle e^{-(\Theta_1+\Theta_2)}\rangle\cdot\cos(\Phi_{01}-\Phi_{02}); \tag{20}$$

где

$$I_{0i} = \langle(\vec{\mathbf{E}}_{0i})^2\rangle,\ (i=1;2). \tag{21}$$

Разложим в (20) экспоненциальные множители от $\Theta_{1;2}$. В первом приближении получим

$$I = I_{01}(1-2\Theta_1) + I_{02}(1-2\Theta_2) + \\ +2\cdot\sqrt{I_{01}I_{02}}\cdot[1-(\Theta_1+\Theta_2)]\cdot\cos(\Phi_{01}-\Phi_{02}). \tag{22}$$

При одинаковых амплитудах интерферирующих лучей, когда ($I_{02} = I_{01}$), формула (22) примет удобный вид:

$$I = 2I_{01}[1-(\Theta_1+\Theta_2)][1+\cos(\Phi_{01}-\Phi_{02})]. \tag{23}$$

Формула (23) позволяет исследовать условия оптимальных соотношений межу векторами излучения интерферирующих лучей для практических применений.

## Условие синхронизма для векторов излучения

Запишем мнимые части фаз (12) для динамически интерферирующих лучей в виде выражения:

$$\Theta_{1;2} = \vartheta_{1;2}(t)\cdot\sin(\vec{\Xi}_{1;2}\cdot\vec{r}). \tag{24}$$

Преобразуем при равных временных частях фазы (24), когда $(\vartheta_2(t)=\vartheta_1(t))$, в точке $(\vec{r})$ резонатора сумму мнимых фаз двух лучей в (23) следующим образом:

$$\Theta_1+\Theta_2 = \vartheta_1(t)\left[\sin(\vec{\Xi}_1\vec{r})+\sin(\vec{\Xi}_2\vec{r})\right] = \\ = 2\vartheta_1(t)\sin\left(\frac{(\vec{\Xi}_1+\vec{\Xi}_2)}{2}\vec{r}\right)\cos\left(\frac{(\Xi_1-\Xi_2)}{2}\vec{r}\right). \tag{25}$$

При равных векторах излучения $(\vec{\Xi}_2 = \vec{\Xi}_1)$, с учётом (25), величина (23) примет вид

$$I = 2I_0\left[1 - 2\vartheta_1(t)\sin(\vec{\Xi}_1\vec{r})\right]\times \times\left[1+\cos(\Phi_{01}-\Phi_{02})\right]. \quad (26)$$

Разделим в (26) справа, при равных амплитудах, интенсивность обычной интерференции и изменение интенсивности с комплексной фазой следующим образом:

$$I = 2I_{01}[1+\cos(\Phi_{01}-\Phi_{02})] - -4I_{01}\vartheta_1(t)\sin(\vec{\Xi}_1\vec{r})[1+\cos(\Phi_{01}-\Phi_{02})]. \quad (27)$$

Как видим из (27), при равных векторах излучения $(\vec{\Xi}_2 = \vec{\Xi}_1)$, для равных фаз $(\Phi_{01} = \Phi_{02})$, изменение интенсивности $(\Delta I)$ интерференционной картины за счёт комплексной фазы может превышать интенсивность одного исходного луча в восемь раз:

$$\Delta I = -8I_{01}\vartheta_1(a;\, t)\sin(\vec{\Xi}_1\vec{r}). \quad (28)$$

### Вектор излучения и волновой вектор

Собственные значения вектора излучения $\vec{\Xi}$ (его координат) определяются нулевыми граничными условиями на границах резонатора. В прямоугольном резонаторе $d_x \times d_y \times d_z$ точки на стенках резонатора определяются координатами $\left\{\pm\frac{d_x}{2};\, \pm\frac{d_y}{2};\, \pm\frac{d_z}{2}\right\}$. Для фазы излучения на стенках должны соответственно выполняться граничные условия:

$$\Phi\left(\pm\frac{d_x}{2};\, y;\, z\right) = \Phi\left(x;\, \pm\frac{d_y}{2};\, z\right) = = \Phi\left(x;\, y;\, \pm\frac{d_z}{2}\right) = 0. \quad (29)$$

Скалярные произведения в пространственных частях (12) для координат точки $(x_{\text{ст}};\, y_{\text{ст}};\, z_{\text{ст}})$ на стенках резонатора должны обеспечивать условия (29) и быть равными

$$\Xi_x x_{\text{ст}} + \Xi_y y_{\text{ст}} + \Xi_z z_{\text{ст}} = (\vec{\Xi}\cdot\vec{a}) = \pi k_0. \quad (30)$$

Для каждого слагаемого в левой части (30), с учётом целых значений $k_0$; $k_x$; $k_y$; $k_z$, справедливы равенства:

$$\Xi_x\cdot(x_{\text{ст}}) = \pi k_x;\quad \Xi_y\cdot(y_{\text{ст}}) = \pi k_y;\quad \Xi_z\cdot(z_{\text{ст}}) = \pi k_z; \quad (31)$$

причём должно выполняться условие:

$$k_0 = k_x + k_y + k_z. \quad (32)$$

В граничных точках на координатных осях резонатора условия (31) имеют вид

$$\Xi_x\left(\pm\frac{d_x}{2}\right) = \pi k_x;\quad \Xi_y\left(\pm\frac{d_y}{2}\right) = \pi k_y;\quad \Xi_z\left(\pm\frac{d_z}{2}\right) = \pi k_z. \quad (33)$$

Для координат (11) вектора излучения получим из (33) собственные значения:

$$\Xi_x = \frac{1}{\Lambda_x} = \frac{2\pi k_x}{d_x};\quad \Xi_y = \frac{1}{\Lambda_y} = \frac{2\pi k_y}{d_y};\quad \Xi_z = \frac{1}{\Lambda_z} = \frac{2\pi k_z}{d_z}. \quad (34)$$

Определим связь между вектором излучения и волновым вектором для плоской волны, распространяющейся вдоль орта $\hat{y}$ оси $Y$. Размер резонатора вдоль каждой из боковых осей примем бесконечным ($d_x = \infty$; $d_z = \infty$), а вдоль орта $\hat{y}$ — конечным ($d_y$). Тогда собственные значения (34) примут вид:

$$\Xi_x = \Xi_z = 0;\quad \Xi_y = \pm\frac{2\pi k_y}{d_y}. \quad (35)$$

Для стоячей волны условие (29) автоматически выполняется вдоль $Y$, так как справедливо утверждение:

$$\sin\left(0\cdot x \pm \frac{2\pi k_y}{d_y}\cdot\frac{d_y}{2} + 0\cdot z\right) = 0. \quad (36)$$

Рассмотрим условие периодичности для процесса с длиной волны $\lambda$ в виде:

$$\Phi(t;\, x;\, y;\, z) = \Phi(t;\, x;\, (y\pm\lambda);\, x). \quad (37)$$

Тогда для пространственных частей из (37) следует условие

$$\sin\left(0\cdot x+\frac{2\pi k_y}{d_y}\cdot y+0\cdot z\right)= \\ =\sin\left(0\cdot x+\frac{2\pi k_y}{d_y}\cdot (y\pm\lambda)+0\cdot z\right), \tag{38}$$

или

$$\sin\left(\frac{2\pi k_y}{d_y}\cdot y\right)=\sin\left(\frac{2\pi k_y}{d_y}\cdot y\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi k_y}{d_y}\cdot\lambda\right)\pm \\ \pm\sin\left(\frac{2\pi k_y}{d_y}\cdot\lambda\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi k_y}{d_y}\cdot y\right), \tag{39}$$

которое выполняется при: $\cos\left(\frac{2\pi k_y}{d_y}\cdot\lambda\right)=1$; $\frac{2\pi k_y}{d_y}\cdot\lambda=2\pi l$; (здесь $l$ — целое). Из (37—39) следует, что для плоской волны вектор излучения $\vec{\Xi}$ *кратен* волновому вектору, что можно записать следующим образом:

$$\vec{\Xi}=\Xi_y\cdot\hat{y}=\frac{2\pi l}{\lambda}\cdot\hat{y}=\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\hat{y}\cdot l. \tag{40}$$

Таким образом, из (37) следует, что импульс излучения направлен вдоль оси резонатора только для плоской волны излучения с бесконечным фронтом.

## Заключение

Основные результаты работы можно представить следующим образом.

1. Получена, в первом приближении, практическая формула для интенсивности поля с комплексной фазой, когда резонатор излучения движется с ускорением.

2. Предсказано теоретически и наблюдается экспериментально, что при интерференции двух полей с комплексными фазами интерференционный член может превышать интенсивность исходного луча в восемь раз.

3. Вектор излучения кратен волновому вектору при наличии граничных условий вдоль лишь одной координаты, когда боковые граничные условия не определены.

*Автор выражает свою глубокую благодарность участниками семинара Отдела теоретической физики ИОФ им. А. М. Прохорова РАН и участникам семинара кафедры теории функций и функционального анализа мехмата МГУ им. М. В. Ломоносова за активные обсуждения и высказанные ценные замечания.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Melkoumian B. V.* // Proceedings of SPIE/ 2000. Vol. 4348. P. 4348-02.
2. *Melkoumian B. V.* // Proceedings of SPIE. 2001. Vol. 4365. P. 4365-28.
3. *Melkoumian B. V.* // Proceedings of SPIE. 2002. Vol. 4627. P. 4627-37.
4. *Melkoumian B. V.* // Proceedings of SPIE. 2005. Vol. 5978. P. 5978-1Q.
5. *Melkoumian B. V.* // Proceedings of SPIE. 2007. Vol. 6736. P. 67360B-1.
6. *Melkoumian B. V.* // Proceedings of SPIE. 2007. Vol. 6736. P. 67360D-1.
7. *Мелкумян Б. В.* // Инженерная физика. 2011. № 4. С. 13.
8. *Melkoumian B. V.* // Bulletin of the Lebedev Physics Institute. 2014. Vol. 41. Issue 2. P. 35.
9. *Melkoumian B. V.* // Bulletin of the Lebedev Physics Institute. 2014. Vol. 41. Issue 7. P. 181.
10. *Мелкумян Б. В.* // Прикладная физика. 2014. № 3. С. 17.
11. *Мелкумян Б. В.* // Прикладная физика. 2014. № 4. С. 97.
12. *Мелкумян Б. В.* // Прикладная физика. 2015. № 1. С. 96.
13. *Мелкумян Б. В.* // Инженерная физика. 2016. № 2. С. 15.
14. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: «Наука», 1976.
15. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. — М.: «Наука», 1970.
16. *Левич В. Г., Вдовин Ю. А., Мямлин В. А.* Курс теоретической физики, т. I-II. — М.: «Наука», 1971.

# Accelerated resonator mode intensity, vector of radiation and wave vector

*B. V. Melkoumian*[1,2]

[1] Prokhorov General Physics Institute, Russian Academy of Sciences
38 Vavilov str., Moscow, 119991, Russia

[2] Witte Moscow University
12 2-nd Kozhukhovskii proezd, Moscow, 115432, Russia
E-mail: bgo@bk.ru

*Received July 10, 2016*

***Contribution of each parameter in the phase complex changing and radiation intensity of accelerated radiation cavity with a fixed content is discussed. A condition of synchronization for the interfering sleeves of radiation for irregular moving source is obtained. It was found that during the interference of the two fields with complex phases, the interference term may exceed the intensity of the original beam eight times. It presents the connection between vector of radiation that was put into our work and wave vector. The radiation vector determines the eigenvalues of the spatial problem, and as it is shown it is a multiple of the wave vector in the presence of boundary conditions along only one coordinate, when the lateral boundary conditions are not determined (for example, two-mirror resonator with a plane wave front).***

*Keywords*: vector of radiation, wave vector, light intensity, laser resonator, phase of light.

**REFERENCES**

1. B. V. Melkoumian, Proceedings of SPIE **4348,** 4348-02 (2000).
2. B. V. Melkoumian, Proceedings of SPIE **4365,** 4365-28 (2001).
3. B. V. Melkoumian, Proceedings of SPIE **4627,** 4627-37 (2002).
4. B. V. Melkoumian, Proceedings of SPIE **5978,** 5978-1Q (2005).
5. B. V. Melkoumian, Proceedings of SPIE **6736,** 67360B-1 (2007).
6. B. V. Melkoumian, Proceedings of SPIE **6736,** 67360D-1 (2007).
7. B. V. Мелкумян. Inzhener. Fiz., No. 4, 13 (2011).
8. B. V. Melkoumian, Bulletin of the Lebedev Physics Institute **41** (2), 35. (2014).
9. B. V. Melkoumian, Bulletin of the Lebedev Physics Institute **41** (7), 181 (2014).
10. B. V. Melkoumian, Prikl. Fiz., No. 3, 17. (2014).
11. B. V. Melkoumian, Prikl. Fiz., No. 4, 97 (2014).
12. B. V. Melkoumian, Prikl. Fiz., No. 1, 96. (2015).
13. B. V. Melkoumian, Inzhener. Fiz., No. 2, 15. (2016).
14. E. Kamke, *Handbook on Differential Equations* (Nauka, Moscow, 1976) [in Russian].
15. M. Born and E. Wolf, *Foundations of Optics* (Nauka, Moscow, 1970) [in Russian].
16. V. G. Levich, Yu. A. Vdovin, and V. A. Myamlin, *Theoretical Physics, Vol. I-II.* (Nauka, Moscow, 1971) [in Russian].