УДК 621.382.53

Влияние анизотропии теплопроводности на распределение температуры в твердом теле

В. Г. Охрем

В статье исследуется влияние анизотропии теплопроводности на распределение температуры в твердом теле. Рассмотрены два случая. В первом — считается, что среда обладает естественной анизотропией теплопроводности. При этом методом малого параметра найдено распределение температуры и показано, что оно является двумерным. Двумерным является также и тепловой поток внутри образца. Эти результаты не совпадают с известными из литературы, в которой изначально полагается, что поперечный поток тепла в средней части образца отсутствует. Этот результат распространен также на гиротропную среду. На этом основании уточнено определение эффекта Риги-Ледюка, а также показано, что анизотропия теплопроводности приводит к возникновению поперечного перепада температур.

PACS: 85.80.F.

Ключевые слова: распределение температуры, теплопроводность, перепад температуры, эффект Риги-Ледюка.

Введение

Обычно при расчете распределения температуры в твердом теле анизотропия теплопроводности не учитывается и обосновывается это тем, что она мала. И это верно. Однако все же было бы интересно иметь количественные оценки, а также уверенность в том, что при таком подходе мы не теряем чего-то такого, что обусловлено именно малостью анизотропии теплопроводности.

Ниже рассмотрены две задачи: находится распределение температуры в собственно анизотропной по теплопроводности среде и распределение температуры в среде, которая является изотропной, но помещенной в магнитное поле, т. е. гиротропной среде. Надо сразу отметить, что эти задачи решаются приближенно, поскольку рассматриваемые уравнения нелинейны. Отметим также, что подобная задача рассматривалась в [1]. Однако там авторы преследовали другие цели.

В изотропном проводнике (полупроводнике), в котором задан градиент температуры при наличии перпендикулярного к нему магнитного поля, в перпендикулярной им плоскости возникает анизотропия теплопроводности [3—10]. Вследствие чего изотропная теплопроводность становится анизотропной. Возникающая поперечная теплопроводность приводит к эффекту Риги-Ледюка: возникновение перпендикулярного заданному градиенту температуры и магнитному полю поперечного градиента температуры, т. е. появление поперечной теплопроводности приводит к поперечной разности температур. Этот эффект очень слабый, плохо изучен и практического применения пока не нашел. Поперечная теплопроводность имеет место также в анизотропном материале. Этот случай также рассмотрен в настоящей работе.

Заметим, что эффект Риги-Ледюка был открыт давно [3, 5, 6, 10] и, тем не менее, он изучен недостаточно полно. По мнению автора настоящей публикации, одной из причин этого является то, что он слаб, а также не имеет четкого определения. Так, сказано, что он является адиабатическим, т. е. таким, который возникает при адиабатической изоляции боковых граней образца от внешней среды (см. рисунок). Это означает, что нет потока тепла через эти грани и ничего более. Между тем в литературе полагается, что тепловой поток вдоль оси x равен нулю и внутри образца [3—10], что, вообще говоря, не верно. Это замечание относится также и к поперечной теплопроводности в анизотропной среде. Показано, что анизотропия теплопроводности приводит к эффекту аналогичному эффекту Риги-Ледюка.

Постановка задачи и ее решение

Положим, что распределение температуры двумерно, т. е. температура $T = T(x, y)$. Тогда $T(x, y)$

Охрем Василий Георгиевич, доцент.
Национальный технический университет «ХПИ», Черновицкий факультет.
Украина, 58018, г. Черновцы, ул. Головна, 203-а.
E-mail: okhrem@ukr.net

Статья поступила в редакцию 10 ноября 2015 г.

для ***анизотропного*** образца будет удовлетворять уравнению:

$$\chi_{11}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+2\chi_{12}\frac{\partial^2 T}{\partial x\partial y}+\chi_{22}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0, \quad (1)$$

где χ_{11}, χ_{12} и χ_{22} — компоненты тензора удельной теплопроводности, которые считаются независимыми от температуры и координат. Граничные условия определим следующими соотношениями:

$$T(0,y)=T_0, \quad T(l,y)=T_l, \quad (2)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial T(x,0)}{\partial y}&=-\frac{\chi_{21}}{\chi_{22}}\frac{\partial T(x,0)}{\partial x},\\ \frac{\partial T(x,h)}{\partial y}&=-\frac{\chi_{21}}{\chi_{22}}\frac{\partial T(x,h)}{\partial x}.\end{aligned} \quad (3)$$

Условия (2) означают изотермичность концов образца, а соотношения (3) — адиабатическую изоляцию боковых граней (см. рисунок).

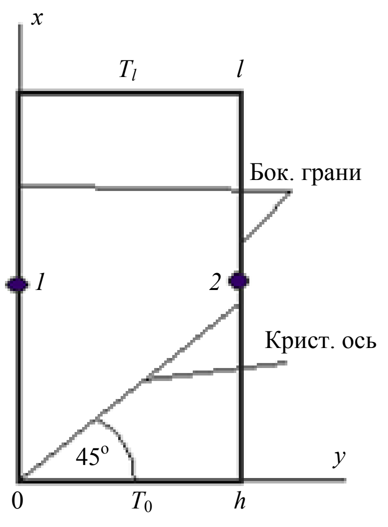

Рис. Схема образца для исследования поперечного перепада температуры.

Задачу будем решать методом малого параметра. В качестве такового выберем отношение $\varepsilon=\chi_{21}/\chi_{22}$. Решение будем искать в виде разложения в ряд по малому параметру [2]:

$$T(x,y)=T0(x,y)+\varepsilon\cdot T1(x,y)+\ldots . \quad (4)$$

Для упрощения расчетов примем $\chi_{11}=\chi_{22}=\left(\chi_{\parallel}+\chi_{\perp}\right)/2$. Это равенство будет иметь место при φ = 45° (см. рис.). Угол φ = 45° — это угол наклона кристаллографической оси к лабораторной оси *y*. При этом $\chi_{12}=\dfrac{\chi_{\parallel}-\chi_{\perp}}{2}$, где $\chi_{\parallel}$, $\chi_{\perp}$ — продольная и поперечная теплопроводности материала образца. Тогда $\varepsilon=\left(\chi_{\parallel}-\chi_{\perp}\right)/\left(\chi_{\parallel}+\chi_{\perp}\right)$.

Для ***гиротропного*** образца постановка задачи остается прежней. Отличие будет состоять в том, что в уравнении (1) средний член будет отсутствовать, поскольку $\chi_{21}=-\chi_{12}$ и $\chi_{11}=\chi_{22}=\chi$ [10]. При этом образец размещен в магнитном поле, которое направлено вдоль оси *z* (рисунок).

Рассмотрим вначале ***анизотропный*** случай. Подставим выражение (4) в уравнение (1), ограничившись первым членом разложения температуры в ряд по ε, получим:

$$\frac{\partial^2 T0}{\partial x^2}+\varepsilon\cdot\frac{\partial^2 T1}{\partial x^2}+2\cdot\varepsilon\cdot\left(\frac{\partial^2 T0}{\partial x\partial y}+\varepsilon\cdot\frac{\partial^2 T1}{\partial x\partial y}\right)+$$
$$+\frac{\partial^2 T0}{\partial y^2}+\varepsilon\cdot\frac{\partial^2 T1}{\partial y^2}=0.$$

Граничные условия в этом приближении будут иметь вид

$$T0(0,y)+\varepsilon\cdot T1(0,y)=T_0, \quad T0(l,y)+\varepsilon\cdot T1(l,y)=T_l,$$

$$\frac{\partial T0(x,0)}{\partial y}+\varepsilon\cdot\frac{\partial T1(x,0)}{\partial y}=-\varepsilon\cdot\left(\frac{\partial T0(x,0)}{\partial x}+\varepsilon\cdot\frac{\partial T1(x,0)}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial T0(x,h)}{\partial y}+\varepsilon\cdot\frac{\partial T1(x,h)}{\partial y}=-\varepsilon\cdot\left(\frac{\partial T0(x,h)}{\partial x}+\varepsilon\cdot\frac{\partial T1(x,h)}{\partial y}\right).$$

Далее легко получим

$$\frac{\partial^2 T0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T0}{\partial y^2}=0,$$

$$T0(0,y)=T_0, \quad T0(l,y)=T_l,$$

$$\frac{\partial T0(x,0)}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial T0(x,h)}{\partial y}=0.$$

Решение этой задачи приводит к выражению $T0\left(x,y\right)=T_0-\left(\Delta T/l\right)\cdot x$. В этом выражении $\Delta T=T_0-T_l$. Аналогично записывается задача для нахождения $T1(x,y)$. Она имеет вид

$$\frac{\partial^2 T1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T1}{\partial y^2}=0,$$

$$T1(0,y)=0, \quad T1(l,y)=0,$$

$$\frac{\partial T1(x,0)}{\partial y}+\frac{\partial T0(x,0)}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial T1(x,h)}{\partial y}+\frac{\partial T0(x,h)}{\partial x}=0.$$

Эта задача решается методом Фурье. Несложные вычисления приводят к выражению

$$T1(x,y)=\frac{2\cdot\Delta T}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(1-(-1)^k\right)}{k^2}\cdot\frac{ch\left(\frac{k\cdot\pi}{l}\cdot y\right)-ch\left(\frac{k\cdot\pi}{l}\cdot(h-y)\right)}{sh\left(\frac{k\cdot\pi}{l}\cdot h\right)}\cdot\sin\left(\frac{k\cdot\pi}{l}\cdot x\right).$$

Выражение для распределения температуры при указанных граничных условиях в указанном приближении будет иметь вид:

$$T(x,y)=T_0-\frac{\Delta T}{l}\cdot x+\varepsilon\cdot\frac{2\cdot\Delta T}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(1-(-1)^k\right)}{k^2}\cdot\frac{ch\left(\frac{k\cdot\pi}{l}\cdot y\right)-ch\left(\frac{k\cdot\pi}{l}\cdot(h-y)\right)}{sh\left(\frac{k\cdot\pi}{l}\cdot h\right)}\cdot\sin\left(\frac{k\cdot\pi}{l}\cdot x\right).$$

Гиротропный случай формально не будет отличаться от рассмотренного, и конечное выражение для распределения температуры будет таким же. Принципиальное отличие будет только в физическом смысле ε. В случае анизотропного образца $\varepsilon=\left(\chi_{\parallel}-\chi_{\perp}\right)/\left(\chi_{\parallel}+\chi_{\perp}\right)$, а в случае гиротропии $\varepsilon=\chi_{12}/\chi$, где χ_{12} обусловлена наличием магнитного поля.

Найдем далее поперечный перепад температуры. Конечно, он будут зависеть от *x*. Но обычно на эксперименте поперечный сигнал (в данном случае — это разность температур) снимают в средней части образца. Поэтому найдем разность температур между точками 1 и 2. Из выражения для температуры находим

$$\delta T=T\left(\frac{l}{2},0\right)-T\left(\frac{l}{2},h\right)=$$

$$=\frac{4\cdot\varepsilon}{\pi}\cdot\Delta T\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(1-(-1)^k\right)}{k^2}\cdot\frac{1-ch\left(\frac{k\cdot\pi}{l}\cdot h\right)}{sh\left(\frac{k\cdot\pi}{l}\cdot h\right)}\cdot\sin\left(\frac{k\cdot\pi}{2}\right).$$

Если $\varepsilon=\chi_{12}/\chi$, то будем иметь перепад температуры, обусловленный эффектом Риги-Ледюка. Если же $\varepsilon=(\chi_{\parallel}-\chi_{\perp})/(\chi_{\parallel}+\chi_{\perp})$, то перепад температуры обусловлен анизотропией теплопроводности. В первом случае ε и, соответственно, перепад температуры будет тоже очень мал. Во втором случае перепад температуры будет на порядок больше. Как видно из приведенного выражения, δT сложным образом зависит от размеров образца. Однако, как показывают числовые оценки, эта зависимость не является существенной.

Выражение для плотности потока тепла вдоль оси ***y*** имеет такой вид:

$$q=-\chi\cdot\varepsilon\cdot\frac{2\cdot\Delta T}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(1-(-1)^k\right)}{k}\cdot\frac{sh\left(\frac{k\cdot\pi}{l}\cdot y\right)+sh\left(\frac{k\cdot\pi}{l}\cdot(h-y)\right)}{sh\left(\frac{k\cdot\pi}{l}\cdot h\right)}\cdot\sin\left(\frac{k\cdot\pi}{l}\cdot x\right)+$$

$$+\chi_{12}\cdot\left(-\frac{\Delta T}{l}+\varepsilon\cdot\frac{2\cdot\Delta T}{l}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(1-(-1)^k\right)}{k}\cdot\frac{ch\left(\frac{k\cdot\pi}{l}\cdot y\right)-ch\left(\frac{k\cdot\pi}{l}\cdot(h-y)\right)}{sh\left(\frac{k\cdot\pi}{l}\cdot h\right)}\cdot\cos\left(\frac{k\cdot\pi}{l}\cdot x\right)\right).$$

Из этого выражения видно, что плотность потока тепла вдоль оси ***y*** при $x=l/2$ внутри образца не равна нулю, как это принято считать [3—10], и вообще внутри образца поперечный поток тепла нигде не равен нулю. Возможно, что это важное обстоятельство, которое выпало из внимания исследователей и привело к застою в исследовании эффекта Риги-Ледюка.

Аналогичное выражение для плотности потока тепла имеет место и в случае гиротропии материала образца. Отличие будет состоять только в том, что в выражении $\varepsilon=(\chi_{\parallel}-\chi_{\perp})/(\chi_{\parallel}+\chi_{\perp})$ числитель нужно заменить на поперечную теплопроводность χ_{21}, а знаменатель на — χ.

При расчете распределения температуры автор использовал приближенный метод малого параметра. Конечно, этот метод даст тем более точное выражение, чем больше будет членов разложения по малому параметру. В статье учтен только один член разложения. Поэтому может возникнуть сомнение в правомочности использованного приближения. На самом деле полученные результаты не должны вызывать сомнения, поскольку каждый из последующих членов разложения будет меньше предыдущего на порядок.

Заключение

В работе исследовано влияние анизотропии теплопроводности на распределение температуры в твердом теле. Рассмотрены два случая. В первом — считается, что среда обладает естественной анизотропией теплопроводности. При этом методом малого параметра найдено распределение температуры и показано, что оно является двумерным. Двумерным является также и тепловой поток внутри образца. Эти результаты не совпадают с известными из литературы, в которой изначально полагается, что поперечный поток тепла в средней части образца отсутствует. Этот результат распространен также на гиротропную среду. На этом основании уточнено определение эффекта Риги-Ледюка, а также показано, что анизотропия теплопроводности приводит к возникновению поперечного перепада температур.

Проведенные расчеты приводят к следующим практическим выводам:

1. Неверно утверждать, что адиабатическая изоляция боковых граней приводит к равенству нулю поперечного потока тепла и внутри образца.

2. Эффект Риги-Ледюка настолько мал, что его вряд ли можно уверенно фиксировать на практике. Поэтому его исследования в научной литературе отсутствуют.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Слипченко В. Н., Снарский А. А.* // ФТП. 1974. Т. 8. С. 2010.

2. *Васильев А. Н.* Maple 8. — Москва. Санкт-Петербург. Киев: Диалектика, 2003.

3. *Цидильковский И. М.* Термомагнитные явления в полупроводниках. — Москва: Государственное издательство физики-математической литературы. 1960.

4. *Самойлович А. Г., Коренблит Л. Л.* // УФН, 1953. Т. 49. № 2.

5. Термоэлементы и термоэлектрические устройства: Справочник. п /р Анатычук Л. И. — К.: Наук. Думка, 1979. — 768 с.

6. *Зеегер К.* Физика полупроводников. — М.: Издательство «Мир», 1977.

7. *Осипов Э. В.* Твердотельная электроника. — К.: Наук. Думка, 1977.

8. *Абрикосов А. А.* Основы теории металлов. — М.: Наука, 1987.

9. *Блатт Ф.* Физика электронной проводимости в твердых телах. — М., 1971.

10. *Самойлович А. Г.* Термоэлектрические и термомагнитные методы превращения энергии. — М.: Издательство ЛКИ, 2003.

Influence of anisotropy of the thermal conductivity on a temperature distribution in the solid

V. G. Okhrem

Chernivtsi Department of National Technical University "KhPI"
203-a Holovna str., Chernivtsi, 58018, Ukraine
E-mail: okhrem@ukr.net

Received November 10, 2015

The article investigates the influence of the anisotropy of the thermal conductivity on the temperature distribution in the solid. Two cases are considered. In the first — it is believed that the environment has a natural anisotropic thermal conductivity. When this parameter is found by small temperature distribution is shown that it is two-dimensional. It is also a two-dimensional heat flow in the sample. These results do not agree with known from the literature, which is initially assumed that the transverse heat flux in the middle part of the sample is absent. This result is also distributed on a gyrotropic medium. On this basis precised determination of the Righi-Leduc, and also shows that the thermal conductivity anisotropy gives rise to transverse temperature difference.

PACS: 85.80.F.

Keywords: temperature distribution, teploprovodngost, the temperature drop, the Righi-Leduc.

REFERENCES

1. V. N. Slipchenko and A. A. Snarskii, Semiconductors **8,** 2010 (1974).
2. A. N. Vasil'ev, *Maple 8.* (Dialektika, Moscow, 2003) [in Russian].
3. I. M. Tsidil'kovskii, *Thermomagnetic Phenomena in Semiconductors* (Gos. Izdat. Fiz.-Mat. Liter., Moscow, 1960) [in Russian].
4. A. G. Samoilovich and L. L. Korenblit, Phys. Usp. **49 (**2), (1953).
5. *Thermoelements and Thermoelectric Devices. Handbook.* Ed. by L. I. Anatychuk (Nauk. Dumka, Kiev, 1979) [in Russian].
6. K. Zeeger, *Physics of Semiconductors* (Mir, Moscow, 1977) [in Russian].
7. E. V. Osipov, *Solid State Electronics* (Nauk. Dumka, Kiev, 1977) [in Russian].
8. A. A. Abrikosov, *Foundations of Theory of Metals* (Nauka, Moscow, 1987) [in Russian].
9. F. Blatt, Physics of Electron Conductivity in Solids (Moscow, 1971) [in Russian].
10. A. G. Samoilovich, *Thermoelectric and Thermomagnetic Methods of Energy Transformation* (Izd. LKI, Moscow, 2003) [in Russian].